

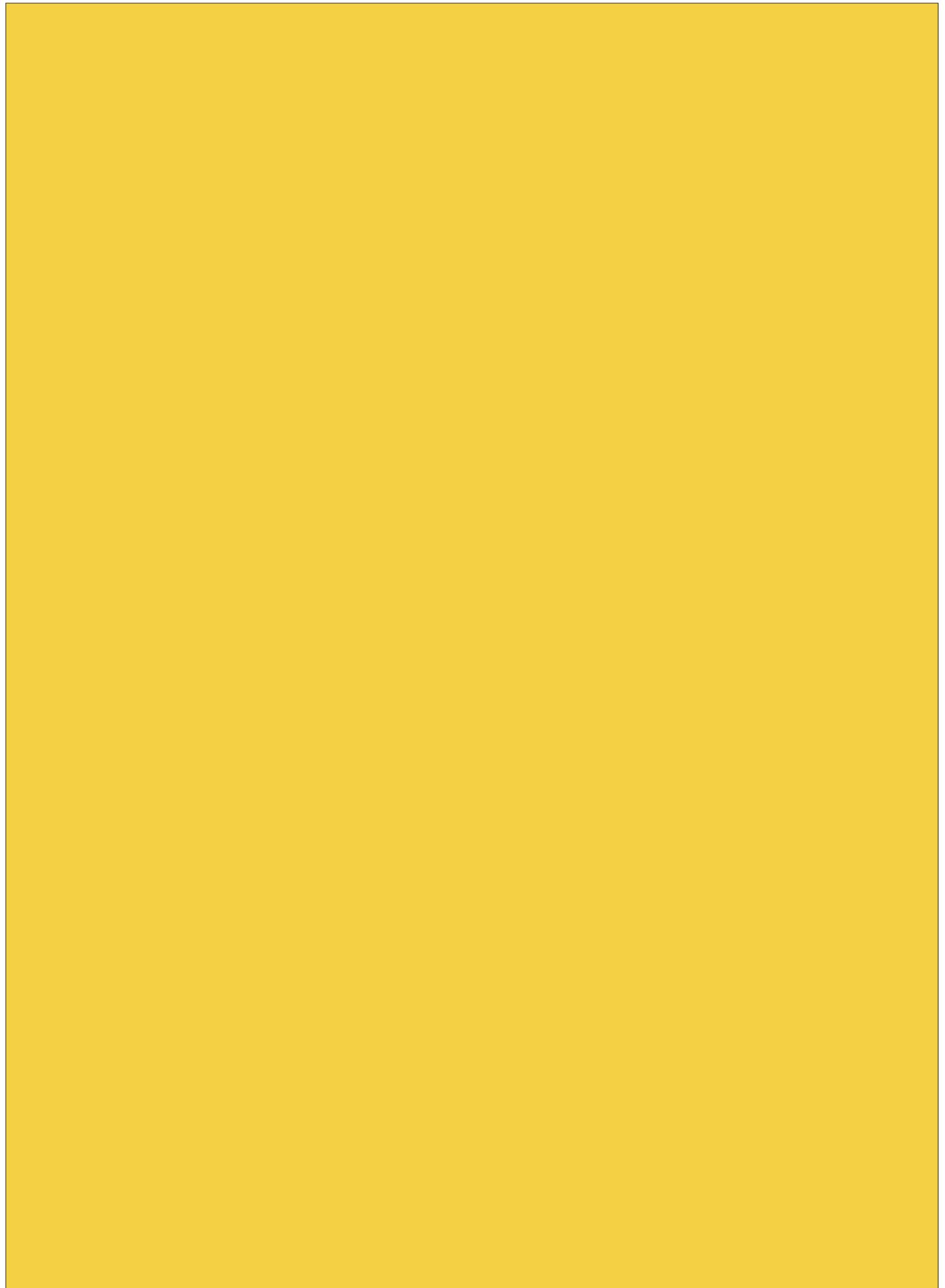
Н.А. РЕЗНИК

*Неопределенный
интеграл*

Визуальный
конспект-практикум

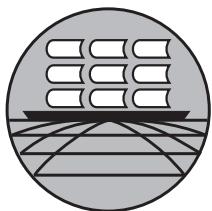
Выпуск I

*Начальные представления
о технике интегрирования*





ИНСТИТУТ ПРОДУКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ
МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ



Н.А. РЕЗНИК

Неопределенный интеграл

Визуальный
конспект-практикум

Выпуск I

*Начальные представления
о технике интегрирования*

Мурманск
1998

УДК 512.83(07)
ББК 22.143. я7

Резник Н.А. Неопределенный интеграл: Визуальный конспект-практикум. Вып. I. Начальные представления о технике интегрирования – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 82 с.

Первый выпуск визуального конспекта-практикума ориентирован на формирование начальных представлений по разделу "Неопределенный интеграл" курса высшей математики. Конспект разработан для студентов 1-го курса Мурманского государственного технического университета. В сборнике имеется более 300 задач и упражнений различного уровня сложности. Избыточность банка задач сформирована с целью помочь обучающимся вспомнить основные положения соответствующей темы "Алгебра и начала анализа", а также восстановить утраченные знания и навыки по другим разделам школьного курса математики. Большинство примеров пособия могут быть использованы в качестве дидактических материалов в 11-х классах средних общеобразовательных школ.

Математическое редактирование, а также составление самостоятельных работ и ответов ко всем задачам практикума осуществлено Казаковой Г.Б., которая является полноправным соавтором данной работы.

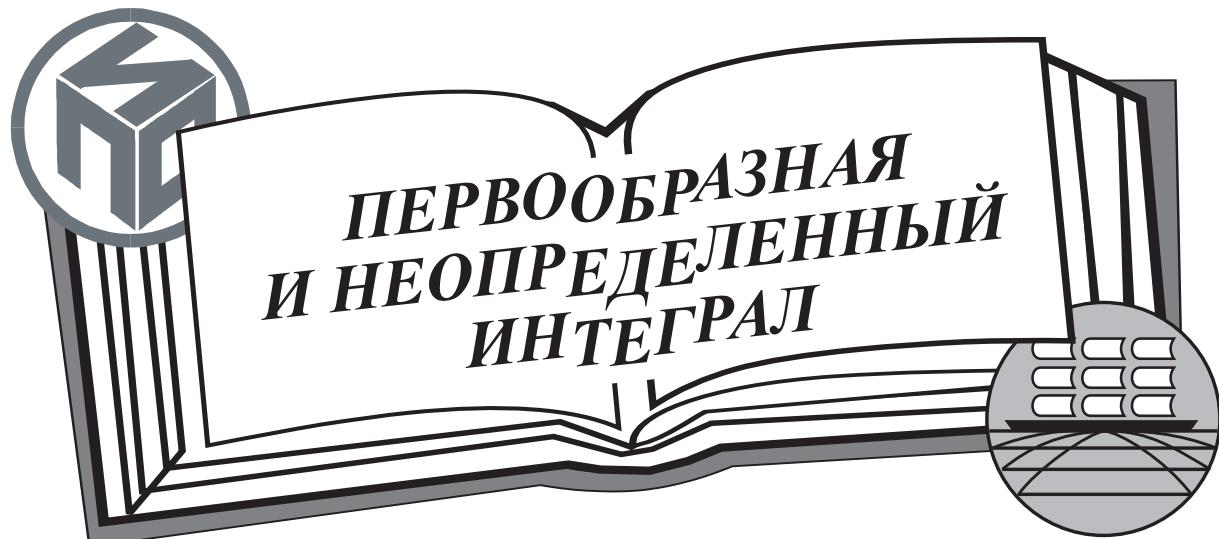
© Наталия Александровна Резник, 1998
Галина Борисовна Казакова, 1998
© Мурманский государственный технический университет, 1998

Наталия Александровна Резник,
Неопределенный интеграл: Визуальный конспект-практикум

© Компьютерный набор, верстка и графика Н.А. Резник
Редактор Е.В. Смирнова
Корректор Т.А. Пехтерева

Подписано в печать 15.06.08 г.
Зак. 561 Тир. 120 Печ .л. 2,32

ISBN 5-86185-087-9



1. Основные задачи	4
Введение первообразной	4
2. Связь между функцией и ее дифференциалом	6
Определение первообразной	6
Первообразная и дифференциал	6
3. Множество первообразных	8
Связи между первообразными одной и той же функции	8
Таблица первообразных	9
4. Неопределенный интеграл как множество первообразных	10
Объединение таблиц производных и интегралов	10
Расширенная таблица производных и интегралов	11
5. Структура неопределенного интеграла	12
Основные свойства неопределенного интеграла	12
6. Независимость функции от обозначения ее аргумента	14
Важное свойство таблицы интегралов	14
Интегрирование функции $f(kx+p)$	14
Информационная схема «Первообразная и неопределенный интеграл»	16
Самостоятельная работа 1. Вариант 1	17
Вариант 2	17
Вариант 3	18

1

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

$$\underbrace{[F(x)]'}_{\text{задана}} = \underbrace{f(x)}_{\text{ищем}}$$

↓ ↑
Основная задача дифференцирования

Основная задача:
дифференцирование

По заданной $F(x)$ находится $f(x)$: $F'(x) = f(x)$

↓
Обратная задача:
интегрирование

По заданной $f(x)$ находится $F(x)$: $f(x) = F'(x)$

$$\underbrace{[F(x)]'}_{\text{ищем}} = \underbrace{f(x)}_{\text{задана}}$$

↓ ↑
Основная задача интегрирования

ВВЕДЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ

$$F(x), f(x): x \in \langle a; b \rangle$$

$$\underbrace{[F(x)]'} = \underbrace{f(x)}$$

Первообразная
для $f(x)$

Производная
от $F(x)$

$$\underbrace{[F(x) + C]}' = \overbrace{f(x)}$$

*C –
произвольная
постоянная*

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ПРИМЕР

$$[\underbrace{\sin x}]' = \underbrace{\cos x}$$

Основная задача
дифференцирования

Для $\sin x$ имеем: $\sin' x = \cos x$

$$\downarrow \quad \boxed{\sin x, \cos x: x \in (-\infty; +\infty)} \quad \uparrow$$

Для $\cos x$ имеем: $\cos x = \sin' x$

$$[\underbrace{\sin x}]' = \underbrace{\cos x}$$

Основная задача
интегрирования

ПРИМЕР

$$[\underbrace{\sin x}]' = \underbrace{\cos x}$$

Первообразная
для $\cos x$

Производная
от $\sin x$

$$\begin{aligned} [\sin x + 1]', &= \cos x \\ [\sin x + 10]', &= \cos x \\ [\sin x - 100]', &= \cos x \end{aligned}$$

Первообразная
для $\cos x$

Производная
от $\sin x$

C – произвольная постоянная

2

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

СВЯЗЬ МЕЖДУ ФУНКЦИЕЙ И ЕЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛОМ

$$\left[F(x) \right]' = \\ = f(x)$$

$$F(x), f(x): x \in \langle a; b \rangle \\ F'(x) = f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x) dx$$

$$dF(x) = \\ = f(x) dx$$

производной

Операция нахождения

дифференциала

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ

$F(x)$
называется
первообразной для $f(x)$,
если
 $F'(x) = f(x)$



$$dF(x) = \\ = F'(x) dx = f(x) dx$$



$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x) dx \\ \forall x \in \langle a; b \rangle$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

$$\left. \begin{array}{l} f(x), F(x): \forall x \in \langle a; b \rangle \\ F(x): \\ F'(x) = f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow d\underbrace{F(x)}_{\substack{\text{Нахождение} \\ \text{первообразной} \\ \text{для функции} \\ f(x)}} = F'(x) dx = \underbrace{f(x) dx}_{\substack{\text{дифференциала} \\ \text{от функции} \\ F(x)}}$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Восстановите отсутствующие данные
в таблице производных
 $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x)dx$

1 Трениажер	1 $(\quad)' = \cos x$	1 Трениажер	$d(\quad) = \sin x dx$
2	$(\sqrt{x})' =$	2	$d\sqrt{x} = dx$
3	$(\quad)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	3	$d\quad = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$
4	$\left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]' =$	4	$d \ln x =$
5	$(-\ln \cos x)' =$	5	$d \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} =$

Оформите равенство
 $d f(x) = f'(x)dx$

3 Трениажер	1 $d \sin x =$	4 Трениажер	$d \sin^2 x =$
2	$d \sin 2x =$	2	$d \cos(x+1) =$
3	$d \sin \frac{x}{2} =$	3	$d \operatorname{tg} \frac{1}{x^2} =$
4	$d \sin \sqrt{x} =$	4	$d \arctg \sqrt{x} =$
5	$d \sin \frac{1}{x} =$	5	$d \arccos \frac{1}{x} =$

5 Докажите, что $d \frac{\mathbf{a}^x}{\ln a} = \mathbf{a}^x dx$

6 Докажите, что $d \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{x^2-1} dx$

3

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

МНОЖЕСТВО ПЕРВООБРАЗНЫХ

$$\forall x \in \langle a ; b \rangle$$

$$F(x), f(x) :$$

$$F'(x) = f(x)$$



$F(x)$ – первообразная для $f(x)$



$$[F(x) + C]' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x)$$

где C – произвольная постоянная



$F(x) + C$ – первообразная для $f(x)$



$F(x) + C$ – множество первообразных для $f(x)$ $\forall x \in \langle a ; b \rangle$,

где C – произвольная постоянная

СВЯЗИ МЕЖДУ ПЕРВООБРАЗНЫМИ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ФУНКЦИИ

Пусть
 $F_1(x), F_2(x), f(x)$:

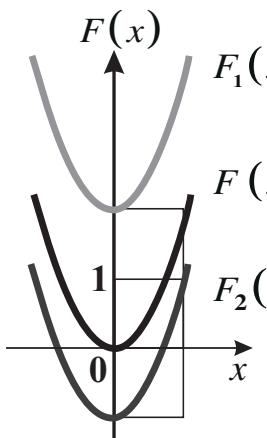
$$\left. \begin{array}{l} F'_1(x) = f(x) \\ F'_2(x) = f(x) \\ F'_1(x) \neq F'_2(x) \end{array} \right\} \forall x \in \langle a; b \rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} F'_1(x) = F'_2(x) \\ \downarrow \\ \Rightarrow F'_1(x) - F'_2(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' = \\ \downarrow \\ = 0 = [C] \\ F_1(x) - F_2(x) = C \quad \forall x \in \langle a; b \rangle \end{array} \right\}$$

*Две различные первообразные одной и той же функции,
определенной в некотором промежутке,
с одинаковой производной
с точностью до постоянной
(отличаются друг от друга на const)*

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ПРИМЕР



$$F_1(x) = x^2 + 2 \implies F_1'(x) = 2x$$

$$F(x) = x^2 \implies F'(x) = 2x$$

$$F_2(x) = x^2 - 1 \implies F_2'(x) = 2x^2$$

$$(x^2 + C)' = 2x \quad \forall x \in R$$

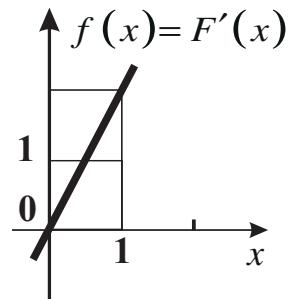


ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

$f(x)$



$F(x) + C$

nx^{n-1}

$x^n + C$

$\frac{1}{x}$

$\ln|x| + C$

$\cos x$

$\sin x + C$

$\frac{1}{\cos^2 x}$

$\operatorname{tg} x + C$

$\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

$\frac{1}{1+x^2} + C$

Функция,
для которой
находится
первообразная



Множество
первообразных
для исходной
функции

Серия 1 Восстановите
отсутствующие данные
в оформлении перехода
от функции
к ее первообразной

1 $2x \rightarrow$

2 $3x^{\square} \rightarrow x^3$

3 $\square x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow x^{\frac{1}{2}}$

4 $3x^{\square} \rightarrow 9x^{\frac{1}{3}}$

5 $\square \rightarrow x^{-\frac{4}{5}}$

4

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ КАК МНОЖЕСТВО ПЕРВООБРАЗНЫХ

$$\int f(x) dx = \underbrace{F(x) + C}_{\begin{array}{c} \text{неопределенный} \\ \text{интеграл} \\ \text{функции } f(x) \end{array}} \iff \left[\underbrace{F(x) + C}_{\begin{array}{c} \text{множество} \\ \text{всех первообразных} \\ \text{для } f(x) \end{array}} \right]' = f(x)$$

*Нахождение
первообразной
для $f(x)$*

C – заранее
не определено

*Нахождение
производной
от $F(x)$*

**Операция нахождения
множества первообразных для заданной функции
называется
интегрированием**

ОБЪЕДИНЕНИЕ ТАБЛИЦ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

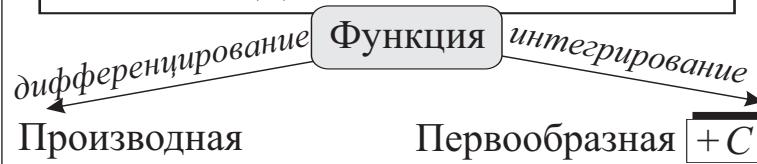
ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$f'(x)$		$f(x)$
$kx + p$		$k \frac{x^2}{2} + px$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

$f(x)$		$F(x)$	$+C$
$kx + p$		$k \frac{x^2}{2} + px$	

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ



ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

РАСШИРЕННАЯ ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

Производная		Первообразная $+C$
$f'(x)$	\rightarrow	$f(x)$ \rightarrow $\int f(x)dx$
k	$kx + p$	$k \frac{x^2}{2} + px$
$n x^{n-1}$	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$-\ln \cos x $
$\frac{2x}{(1+x^2)^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$

Запишите

неопределенный интеграл
как множество первообразных

2

Трениажер

1 $\int x^3 dx =$

2 $\int \frac{1}{x} dx =$

3 $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$

4 $\int \frac{1}{1+x^2} dx =$

5 $\int \cos x dx =$

3 Докажите,
что

$$\int \left(\frac{x}{k} - \frac{1}{p} \right) dx = \frac{x^2}{2k} - \frac{x}{p} + C$$

Запишите
неопределенный интеграл
как множество первообразных

4 Докажите,
что

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

5 Докажите,
что

$$\int \frac{2x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} + C$$

1 Трениажер

1 $\int (kx + p) dx$

2 $\int (3x + 2) dx$

3 $\int (2x + 3) dx$

4 $\int \left(x - \frac{1}{3} \right) dx$

5 $\int \left(-\frac{1}{2}x - 3 \right) dx$

5

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ



ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

С В О Й С Т В О

Д о к а з а т е л ь с т в о

Дифференциал от неопределенного интеграла
равен
подынтегральному выражению

$$\begin{aligned} &\text{подынтегральное} \\ &\text{выражение} \\ d \int f(x) dx &= \\ &= f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d \int f(x) dx &= \\ &= d [F(x) + C] = d F(x) + \underbrace{dC}_{0} = \\ &= d F(x) = F'(x) dx = f(x) dx \end{aligned}$$

Производная от неопределенного интеграла
равна
подынтегральной функции

$$\begin{aligned} &\text{подынтегральная} \\ &\text{функция} \\ \left[\int f(x) dx \right]' &= \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\int f(x) dx \right]' \cdot dx &= \\ &= \boxed{d \int f(x) dx} = \\ &= f(x) dx \end{aligned}$$

Неопределенный интеграл дифференциала функции
равен
самой функции
с точностью до постоянной

$$\begin{aligned} \int d F(x) &= \\ &= F(x) + \underbrace{C}_{\text{с точностью}} \\ &\quad \text{до постоянной} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int d F(x) &= \\ &= \int F'(x) dx = \int f(x) dx = \\ &= F(x) + C \end{aligned}$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Запишите результат преобразований	
1	$\int d \cos x =$
2	$d \int d \sqrt{x} =$
3	$\int d \ln \sin x =$
4	$d \int d \operatorname{tg} x =$
5	$\int d(x^2 - x + 1) =$

Запишите результат преобразований	
2	$\left[\int x dx \right]' =$
3	$\left[\int \cos x dx \right]' =$
4	$\int [-\operatorname{ctg} x]' dx =$
5	$\left[\int \frac{1}{x} dx \right]' =$

Тест 3						
Найдите интеграл	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x + C$	$\operatorname{tg} x dx$	$\operatorname{tg} x dx + C$	$-\ln \cos x $	$-\ln \cos x + C$
$\int \operatorname{tg} x dx$						
$\left[\int \operatorname{tg} x dx \right]'$						
$\int d \operatorname{tg} x$						
$d \int \operatorname{tg} x dx$						

4	Докажите, что	если $F'(x) = f(x)$, то $\int f(x) dx - \int d F(x) = C$

6

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

НЕЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИИ ОТ ОБОЗНАЧЕНИЯ ЕЕ АРГУМЕНТА

$$y(*) = f(*)$$
$$y(x) = f(x) \quad \quad \quad y(n) = f(n)$$
$$y(\alpha) = f(\alpha) \quad \quad \quad y(0) = f(0)$$
$$y(t) = f(t) \quad \quad \quad y(k) = f(k)$$

ВАЖНОЕ СВОЙСТВО ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛОВ

В таблице интегралов
обозначения
аргумента подынтегральной функции
и
переменной интегрирования
могут быть
изменены
(одновременно!)

$$\int f(*) d * = \\ = F(*) + C$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ $f(x \pm p)$

$$x' = \boxed{= 1} = \frac{(x \pm p)'}{d(x \pm p)}$$

$$\int f(x \pm p) dx = \underbrace{\int f(x \pm p) d(x \pm p)}_{\substack{\text{применение} \\ \text{важного свойства} \\ \text{таблицы интегралов}}} = \\ = \overbrace{F(x \pm p)} + C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Тест 1		Найдите значение функции											
$y(*) = \frac{1}{1+(*^2)}$	при	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
$* = 2$													
$* = \sqrt{2}$													
$* = \frac{1}{2}$													
$* = \frac{1}{\sqrt{2}}$													
$* = \frac{2}{\sqrt{2}}$													

Серия 2 Заполните пропуски в задании функции

$$y(*) = \frac{2(*)}{[1+(*)^2]^2}$$

1

$$y(p) = \frac{2(p)}{[1+()^2]^2}$$

2

$$y(x+k) = \frac{2()}{[1+()^2]^2}$$

3

$$y(x-kp) = \frac{2()}{[]^2}$$

4

$$y(x+\ln p) = []^2$$

5

$$y(x-e^{p-k}) =$$

Серия 3 Найдите интеграл

1

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t}$$

2

$$\int \frac{d(s+3)}{1+(s+3)^2}$$

3

$$\int \frac{d\alpha}{\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

4

$$\int \frac{d\vartheta}{\vartheta + \sin 3\pi}$$

5

$$\int \frac{d\omega}{1+(\omega - \log_2 \sqrt{5})^2}$$

**Информационная схема
«ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»**

$$dF(x) = \\ F'(x)dx = f(x)dx \\ x \in \langle a; b \rangle$$

$\forall x \in \langle a; b \rangle$
 $F(x)$ первообразная для $f(x)$,
если
 $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a; b \rangle$

$$\int f(x) dx = \underbrace{F(x) + C}_{\begin{array}{c} \text{неопределенный} \\ \text{интеграл} \\ \text{функции } f(x) \end{array}}$$

$C - \forall$

$$\left[\underbrace{F(x) + C}_{\begin{array}{c} \text{множество} \\ \text{всех первообразных} \\ \text{для } f(x) \end{array}} \right]' = f(x)$$

**СТРУКТУРА
НЕОПРЕДЕЛЕННОГО
ИНТЕГРАЛА**

$$\int \underbrace{f(x)}_{\begin{array}{c} \text{подынтегральная} \\ \text{функция} \end{array}} d \underbrace{x}_{\begin{array}{c} \text{переменная} \\ \text{интегрирования} \\ \text{дифференциал} \\ \text{независимой} \\ \text{переменной} \end{array}}$$

подынтегральное выражение

**СТРУКТУРА ТАБЛИЦЫ
ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ**

Производная	Первообразная
Функция	$+C$

$$k \quad kx + p \quad k \frac{x^2}{2} + px$$

$$\int f(x \pm p) dx = \int f(x \pm p) d(x \pm p)$$

**ОБРАТИМОСТЬ ОПЕРАЦИЙ
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ
И ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

$$d \int f(x) dx = f(x) dx$$

$$\int d F(x) = F(x) + C$$

$$\left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$$

1

Восстановите подынтегральную функцию

$$\int dx = x^3 \sqrt[3]{x} + C$$

2

Восстановите подынтегральную функцию

$$\int () dx = \frac{1}{4} x^4 + C$$

3 Запишите неопределенный интеграл как множество первообразных

$$\int \left(\pi - \frac{x}{\sqrt{3}} \right) dx =$$

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1 $-\int \sin x \, dx$

2 $\int (2+x) \, dx$

3 $\int \frac{dt}{1+t^2}$

4 $\int \cos 2x \, d2x$

5 $\int \operatorname{tg} \frac{x}{2} d\frac{x}{2}$

6 $\int \frac{ds^2}{1+s^2}$

7 $\int 2(x^2)' \, dx$

Вариант 2

1 $\int (-\sin x)' \, dx$

2 $\int \frac{1}{\cos^2(x+2)} \, dx$

3 $\int \frac{d\sqrt{t}}{1+t}$

4 $\int \cos(5x-\alpha) d(5x+\alpha)$

5 $\int \operatorname{tg}\left(m + \frac{\pi}{4}\right) dm$

6 $\int \sqrt{x^2 + 1} \, dx^2$

7 $\int d \left[\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right]$

Самостоятельная работа 1

Вариант 3

1 $\int \sin^2 x \cdot \underbrace{(\sin x)}' dx$

2 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

3 $\int \frac{d(\cos^2 2x)}{\cos^4 2x}$

4 $\left[\int (x)' dx \right]'$

5 $\int \operatorname{tg} x d \sqrt{\operatorname{tg} x}$

6 $\int (\operatorname{tg} s + 3) d(\operatorname{tg} s - 3)$

7 $\int (n-1) \cdot (n+1) dn^2$



1. Вынесение числа за знак интеграла	20
Вывод табличного интеграла	20
2. Свойства степени	22
3. Таблица степеней	24
4. Интеграл суммы	26
5. Алгебраические преобразования подынтегральной функции	28
6. Составляющие «неправильной» дроби	30
7. Свойства модулей	32
Свойства логарифмов	32
8. Разложение дроби $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$ на сумму простейших дробей ..	34
Интегрирование дроби $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$	34
9. Разложение дроби $\frac{kx+p}{(x-a)(x-b)}$ на сумму простейших дробей ..	36
Информационная схема «Линейность операции интегрирования» ..	38
Самостоятельная работа 2. Вариант 1	38
Вариант 2	38
Вариант 3	39

1

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ВЫНЕСЕНИЕ ЧИСЛА ЗА ЗНАК ИНТЕГРАЛА

$\mathbf{A} \neq 0$

$$\begin{aligned}
 F(x) : F'(x) &= f(x) \quad \forall x \in \langle a ; b \rangle \\
 &\Downarrow \\
 F'(x) = f(x) &\Leftrightarrow F(x) + C = \int f(x) dx \\
 &\Downarrow \\
 \mathbf{A} \cdot F'(x) = \mathbf{A} \cdot f(x) &\Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot F(x) + \mathbf{A} \cdot C = \mathbf{A} \cdot \int f(x) dx \\
 &\Downarrow \\
 [\mathbf{A} \cdot F(x)]' &= \mathbf{A} \cdot f(x) \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot F(x) + C^* = \int \mathbf{A} \cdot f(x) dx \\
 &\Downarrow \\
 \int \mathbf{A} \cdot f(x) dx &= \mathbf{A} \cdot F(x) + C^* = \mathbf{A} \cdot \int f(x) dx
 \end{aligned}$$

ВЫВОД ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x) dx = F(x) + C$$

$$(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n \Leftrightarrow \int [(n+1) \cdot x^n] dx = x^{n+1} + C,$$

$\forall n > 0$

$$(n+1) \int x^n dx = x^{n+1} + C,$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$\forall n > 0,$
 $n \neq 1$

$$\int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1

Докажите,
что

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x \pm p}} dx = \sqrt{x \pm p} + C$$

2

Докажите,
что

$$\int \left(x + \frac{p}{A} \right) dx = \frac{(Ax + p)^2}{2A^2} + C$$

3

Докажите,
что

$$\int \frac{1}{Bx} dAx = \frac{A \ln|x|}{B} + C$$

Найдите интеграл

1 $\int x dx =$

4
Трениажер

2 $\int 5x^4 dx =$

3 $\int \frac{x^5}{4} dx =$

4 $\int \frac{5}{x^4} dx =$

5 $\int \left(-\frac{4}{x^5} \right) dx =$

Серия 5

Найдите интеграл

1 $\int 2(x+1)^2 dx =$

2 $\int \frac{\sin(x+1)}{2} dx =$

3 $\int \frac{1}{4x-2} dx =$

4 $\int \sqrt{e} \operatorname{tg}(x-1) dx =$

5 $\int \frac{2}{\pi \cos^2(x-\sqrt{\pi})} dx =$

2

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$n, m \in R$

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

1

Докажите,
что

$$\int \sqrt[n]{x} \sqrt[m]{x} dx = \frac{x^{\frac{n+m}{n \cdot m}}}{\frac{n+m}{n \cdot m} + 1} + C$$

МАТРИЦА 2

Для каждого выражения выполните действия:

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНОЙ ДЛЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

преобразуйте в выражение вида
 x^n

найдите число
 $n+1$

запишите первообразную в виде
 $\frac{1}{n+1} x^{n+1}$

преобразуйте полученную первообразную к виду, аналогичному исходному

$$x^2$$

$$\frac{1}{x^2}$$

$$\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

3

Докажите,
что

$$\int \frac{1}{\sqrt[k]{(x \pm p)^n}} dx = \frac{k}{k-n} \cdot \frac{x \pm p}{\sqrt[k]{(x \pm p)^n}} + C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

4

Докажите,
что

$$\int \sqrt[n]{nx} dx = \frac{\sqrt[n]{n^{1+n} x^{1+n}}}{1+n} + C$$

5

Докажите,
что

$$\int \frac{\sqrt[n]{A^{n-1}x}}{\sqrt[m]{B^{m-1}x}} dx = \frac{A \cdot \sqrt[m]{B}}{B \cdot \sqrt[n]{A}} \int \sqrt[\frac{n-m}{nm}]{x} dx$$

6

Докажите,
что

$$\int x \sqrt[n]{x} dx = \frac{nx^2 \sqrt[n]{x}}{2n+1} + C$$

Серия 7 Найдите интеграл

1

$$\int (x \cdot x^{-1}) dx =$$

2

$$\int (x^{-2} \cdot x^3) dx =$$

3

$$\int (2x^2 \cdot 3x^{-3}) dx =$$

4

$$\int (2x)^{-2} \cdot x dx =$$

5

$$\int \frac{(x+2) \cdot [2(x+2)]^3}{2} dx =$$

3

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ТАБЛИЦА СТЕПЕНЕЙ		$k, n \in N$ $n \neq 1$	
$f'(x)$		$f(x)$	$\int f(x) dx$
$n \cdot x^{n-1}$		x^n	$\frac{x^{n+1}}{1+n} + C$
1		$\frac{1}{x^n}$	1
2		$\sqrt[n]{x}$	2
3		$\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	3
4		$\sqrt[n]{x^k}$	4
5		$\frac{1}{\sqrt[n]{x^k}}$	5
Запишите результаты		дифференцирования интегрирования	

3

Докажите, что

$$\left[\frac{1}{(1-n)x^{n-1}} \right]' + \int \frac{n}{x^{n+1}} dx = C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

4

Докажите,
что

$$\int x^{\frac{n}{n+p}} dx = \frac{n \cdot \sqrt[n]{x^{2n+p}}}{2n+p} + C$$

5

Докажите,
что

$$\int x^k \sqrt[n]{x^p} dx = \frac{n \cdot x^{k+1} \cdot \sqrt[n]{x^p}}{kn+p+n} + C$$

6

Найдите интеграл

1 $\int \sqrt{x+1} dx =$

2 $\int \sqrt[4]{x+1} dx =$

3 $\int \sqrt[5]{(x+1)^2} dx =$

4 $\int \sqrt[5]{(x-\sqrt{2})^3} dx =$

5 $\int (x-1)^{\frac{5}{4}} dx =$

Трениажер

Серия 7

Найдите интеграл

1 $\int 2\sqrt{x} dx$

2 $\int \sqrt{2x} dx$

3 $\int \sqrt{\sqrt{2}x} dx$

4 $\int \sqrt{\sqrt{2x}} dx$

5 $\int \frac{\sqrt{x}\sqrt{2x}}{\sqrt{2}} dx$

4

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ИНТЕГРАЛ СУММЫ

$$]f(x), g(x); x \in \langle a; b \rangle$$

$$F(x), G(x); \begin{cases} F'(x) = f(x) \\ G'(x) = g(x) \end{cases} \quad \forall x \in \langle a; b \rangle$$

$$F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x) \Leftrightarrow F(x) \pm G(x) + \underbrace{C_f \pm C_g}_C = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\begin{aligned} F'(x) = f(x) &\Leftrightarrow F(x) + C_f = \int f(x) dx \\ G'(x) = g(x) &\Leftrightarrow G(x) + C_g = \int g(x) dx \end{aligned}$$

$$[F(x) \pm G(x)]' = f(x) \pm g(x) \Leftrightarrow F(x) \pm G(x) + C = \int [f(x) \pm g(x)] dx$$

Найдите интеграл

и сравните
результаты

Найдите интеграл

1

$$\int (x^2 + 2x + 2) dx =$$

2

$$\int [(x+1)^2 + 1] dx =$$

Трениажер

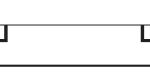
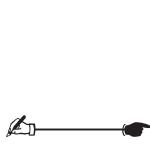
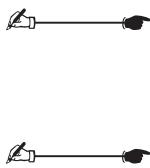
$$\int (x^2 - 3x + 1) dx =$$

Трениажер

$$\int (x^3 + 3x^2 + 5x + 1) dx =$$

$$\int (x^3 - 3x^2 + 3x + 2) dx =$$

$$\int (x^3 + 3x^2 + 4x + 1) dx =$$



3

Докажите,
что

$$a > 0, \neq 1: \int [e^x + a^x] dx = e^x + \frac{a^x}{\ln a} + C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Найдите интеграл	
1	$\int \left(x^5 + \frac{1}{\sqrt[5]{x}} - \frac{x}{5} \right) dx$
2	$\int (1 - \sqrt{x} + x) dx$
3	$\int \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{3x} \right) dx$
4	$\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{2} + 2\sqrt{x^3} \right) dx$
5	$\int \left(\frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{5x\sqrt{x}}{2} \right) dx$

Серия 5	Найдите интеграл
1	$\int [2^x + e^x] dx =$
2	$\int [x - \cos(x-2)] dx =$
3	$\int \left(\frac{e^{2+x}}{2} + \frac{e^x}{e^{2+x}} \right) dx =$
4	$\int \left(\frac{1}{\cos^2(x-2)} - \frac{1}{\sin^2(x+2)} \right) dx =$
5	$\int \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1+2x}{2}\right)} - \frac{1}{\operatorname{ctg}(x-1)} + \frac{1}{\sin^2(x-2)} dx =$

5

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

*Формулы
сокращенного умножения*

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$

$$x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 = (x \pm y)^3$$

ПРИМЕР

$$\int \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx = \int \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} dx = \int (x^2 - x + 1) dx = \\ = \int x^2 dx - \int x dx + \int dx = \\ = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$$

ПРИМЕР

$$\int \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) dx = \int (\sqrt{x} + 1) dx = \\ = \int \sqrt{x} dx + \boxed{\int d} x = \\ = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + x + C$$

1

Докажите,
что

$$\int \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{x^2} + C$$

2

Докажите,
что

$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3 dx = 2\sqrt{x} \left(\frac{1}{5} x^2 \sqrt{x} - x^2 + 3x + 1 \right) + C$$

3

Докажите,
что

$$\int (x - \sqrt{x} + x\sqrt{x}) (x\sqrt{x} - \sqrt{x} - x) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Найдите интеграл

1 $\int x(x-1)^2 dx$

4

2 $\int (1+x^2)^2 dx$

тренажер

3 $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$

4 $\int \frac{(x+1)^2}{x} dx$

5 $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$

Найдите интеграл

1 $\int \frac{\sqrt{x}-4}{4\sqrt{x}+2} dx$

5
тренажер

2 $\int \frac{\sqrt{x}-2}{4\sqrt{x}-\sqrt{2}} dx$

3 $\int \frac{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}+1}{4\sqrt[4]{x}+1} dx$

4 $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1} dx$

5 $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}}{4\sqrt{x}-2} dx =$

6

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

СОСТАВЛЯЮЩИЕ «НЕПРАВИЛЬНОЙ» ДРОБИ

$$\frac{kx+p}{rx+n} = \frac{k \cdot \left(x + \frac{p}{k} \right)}{r \cdot \left(x + \frac{n}{r} \right)} = \frac{k}{r} \cdot \left(\frac{x + \frac{p}{k}}{x + \frac{n}{r}} \right) =$$

$$= \frac{k}{r} \cdot \left(\frac{x + P}{x + N} \right) =$$

$$= \frac{k}{r} \cdot \left[\frac{(x+N)+(P-N)}{x+N} \right] = \frac{k}{r} \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{P-N}{x+N}}_{\text{простейшая дробь}} \right)$$

$\frac{A}{x+a}$
простейшая
дробь

$$\begin{aligned} \frac{x+p}{x+n} &= \\ &= \frac{x+n + (p-n)}{x+n} = \\ &= \frac{x+n}{x+n} + \frac{(p-n)}{x+n} \\ &\quad \text{целая} \quad \text{простейшая} \\ &\quad \text{часть} \quad \text{дробь} \end{aligned}$$

ПРИМЕР

$$\begin{aligned} \int \frac{x+7}{x-5} dx &= \\ &= \int \frac{(x-5)+(7+5)}{x-5} dx = \int \left(1 + \frac{12}{x-5} \right) dx = \\ &= \int dx + 12 \int \frac{dx}{x-5} = x + 12 \ln|x-5| + C \end{aligned}$$

ПРИМЕР

$$\begin{aligned} \frac{6x+1}{3x+5} &= \frac{6 \cdot \left(x + \frac{1}{6} \right)}{3 \cdot \left(x + \frac{5}{3} \right)} = 2 \cdot \left(\frac{x + \frac{5}{3} + \frac{1}{6} - \frac{5}{3}}{x + \frac{5}{3}} \right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{\frac{3}{2}}{x + \frac{5}{3}} \right) \\ \downarrow \\ \int \frac{6x+1}{3x+5} dx &= 2 \cdot \left[\int dx - \frac{3}{2} \cdot \int \frac{1}{x + \frac{5}{3}} dx \right] = 2 \cdot \left[x - \frac{3}{2} \cdot \ln \left| x + \frac{5}{3} \right| \right] + C \end{aligned}$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Разложите дробь на составляющие и найдите				
производную			интеграл	
2	1	1 Трениажер	1	1 Трениажер
Трениажер	2	2	$\frac{x+2}{x+1} =$ $\frac{x-1}{x} =$ $\frac{x-1}{x+2} =$ $\frac{1-x}{x+1} =$ $\frac{x+2}{2-x} =$	2
3	3	3		3
4	4	4		4
5	5	5		5

Серия 4		
Каждую дробь	разложите на составляющие	и найдите интеграл
1 $\frac{2x-1}{x-2}$		
2 $\frac{x+2}{2x+1}$		
3 $\frac{3x-2}{2x-3}$		
4 $\frac{x}{1-2x}$		
5 $\frac{2x-3}{2-3x}$		

7

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

СВОЙСТВА МОДУЛЕЙ

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

$$|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \left| \frac{|x|}{|y|} \right|$$

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\forall x > 0 \quad \log_x x = 1$$

$$\forall y > 0, \neq 1 \quad x^{\log_x y} = y \quad \forall x > 0$$

$$\forall x \quad \log_a x^n = n \cdot \log_a |x|$$

ПРИМЕР

$$\int \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} \right) dx = \underbrace{\int \frac{1}{x+3} dx + \int \frac{1}{x-3} dx}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= \underbrace{\int \frac{d(x+3)}{x+3} dx + \int \frac{d(x-3)}{x-3} dx}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= \ln|x+3| + \ln|x-3| + C = \underbrace{\ln|(x+3)(x-3)| + C}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= \ln|x^2 - 9| + C$$

ПРИМЕР

$$\int \left(\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x-2} \right) dx = \underbrace{\int \frac{2}{x-3} dx - \int \frac{3}{x-2} dx}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= \underbrace{2 \cdot \int \frac{dx}{x-3} - 3 \cdot \int \frac{dx}{x-2}}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= \underbrace{2 \cdot \int \frac{d(x-3)}{x-3} dx - 3 \cdot \int \frac{d(x-2)}{x-2} dx}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= 2 \ln|x-3| + 3 \cdot \ln|x-2| + C = \underbrace{\ln(x-3)^2 - \ln(x-2)^3 + C}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= \ln \frac{(x-3)^2}{|x-2|^3} + C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Тест 1	Найдите соответствующую подынтегральную функцию				
по заданной первообразной	$\frac{4}{x+1} - \frac{3}{x-1}$	$\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x+1}$	$\frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-1}$	$\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x+1}$	$\frac{3}{x+1} - \frac{4}{x-1}$
$\ln \frac{(x+1)^4}{ x-1 ^3}$					
$\ln \frac{ x-1 ^3}{(x+1)^4}$					
$\ln \frac{ x+1 ^3}{(x-1)^4}$					
$\ln \frac{(x-1)^4}{ x+1 ^3}$					
$\ln \left \frac{x+1}{x-1} \right ^3$					

Серия 2	Найдите интеграл
1	$\int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx =$
2	$\int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx =$
3	$\int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx =$
4	$\int \left(\frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2} \right) dx =$
5	$\int \left(\frac{2}{2x+1} + \frac{3}{3x+1} \right) dx =$

8

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$ НА СУММУ ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

Простейшая дробь

$$\frac{A}{x+a}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-a)(x-b)} &= \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(x-a)(x-b)} &= \frac{A(x-b) + B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\ &= A(x-b) + B(x-a) \\ 1 + 0 \cdot (x-b) + 0 \cdot (x-a) &= 0 + A(x-b) + B(x-a) \end{aligned}$$

$$\text{при } x=a: 1 = A(a-b) + B \cdot 0 \Rightarrow A = \frac{1}{a-b}$$

подстановка

$$\text{при } x=b: 1 = A \cdot 0 + B(b-a) \Rightarrow B = \frac{1}{b-a}$$

$$\frac{1}{(a-b)(x-a)} + \frac{1}{(b-a)(x-b)} \stackrel{\Downarrow}{=} \frac{1}{(x-a)(x-b)}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБИ $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} &= \\ \frac{1}{(a-b)} \cdot \int \frac{d(x-a)}{(x-a)} + \frac{1}{(b-a)} \cdot \int \frac{d(x-b)}{(x-b)} &= \\ \frac{\ln|x-a|}{(a-b)} + \frac{\ln|x-b|}{(b-a)} + C & \end{aligned}$$

1 Докажите, что дробь $\frac{1}{kx+p}$
можно преобразовать в простейшую

2 Докажите, что $\int \frac{dx}{kx+p} = \frac{\ln|x+\frac{p}{k}|}{k} + C$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Серия 3

Каждую дробь разложите на простейшие дроби

1

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

2

$$\frac{1}{(1-x)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

3

$$\frac{1}{x(x-2)}$$

4

$$\frac{1}{x^2 - \frac{1}{4}}$$

5

$$\frac{1}{x(2x-1)}$$

Приведите
интеграл к виду,
удобному для интегрирования

Найдите интеграл

4 Трениажер	1	$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$ $\int \frac{dx}{(1-x)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$ $\int \frac{dx}{x(x-2)}$ $\int \frac{dx}{x^2 - \frac{1}{4}}$ $\int \frac{dx}{x(2x-1)}$	5 Трениажер
	2		
	3		
	4		
	5		

9

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ

$$\frac{kx+p}{(x-a)(x-b)}$$

НА СУММУ ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

$$\frac{kx+p}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \quad \Leftrightarrow$$

$$kx+p = A(x-b) + B(x-a)$$



$$\text{при } x=a: ka+p = A(a-b) + 0 \Rightarrow A = \frac{ka+p}{a-b}$$

подстановка

$$\text{при } x=b: kb+p = 0 + B(a-b) \Rightarrow B = \frac{kb+p}{b-a}$$

$$\int \frac{kx+p}{(x-a)(x-b)} dx = \frac{ka+p}{a-b} \cdot \int \frac{d(x-a)}{x-a} + \frac{kb+p}{b-a} \cdot \int \frac{d(x-b)}{(x-b)}$$

ПРИМЕР

$$\frac{3x-2}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$3x-2 = A(x+2) + B(x-3)$$



$$x=3 \Rightarrow 3 \cdot 3 - 2 = A(3+2) \Rightarrow A = \frac{7}{5}$$

$$x=-2 \Rightarrow 3 \cdot (-2) - 2 = B(-2-3) \Rightarrow B = \frac{8}{5}$$

$$\int \frac{3x-2}{(x-3)(x+2)} dx = \frac{7}{5} \int \frac{dx}{x-3} + \frac{8}{5} \int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{7}{5} \ln|x-3| + \frac{8}{5} \ln|x+2| + C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Тест 1 Определите коэффициенты дроби

в ее разложении вида $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$	A =	3	2	5	5	2	5	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
	B =	-2	-3	5	2	3	3	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{5x}{x^2 - 1}$												
$\frac{5x - 1}{x^2 - 1}$												
$\frac{5x + 1}{x^2 - 1}$												
$\frac{5 - x}{x^2 - 1}$												
$\frac{x + 5}{x^2 - 1}$												

Серия 2	Каждую дробь	разложте на простейшие	найдите интеграл
1	$\frac{1}{(x+1)(x-2)}$		
2	$\frac{2}{(x+1)(x-2)}$		
3	$\frac{2x}{(x+1)(x-2)}$		
4	$\frac{2x}{(x-1)(x+2)}$		
5	$\frac{1-x}{x^2 - 4}$		

Информационная схема
«ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ»

СТРУКТУРА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{подынтегральная функция}} dx$$

переменная интегрирования
дифференциал независимой переменной
подынтегральное выражение

ГЛАВНЫЙ ПРИНЦИП ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТАБЛИЦЫ

$$\int f(*) dx = F(*) + C$$

ЧИСЛОВОЙ МНОЖИТЕЛЬ ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА

$$\int A f(x) dx = A \cdot \int f(x) dx$$

ИНТЕГРАЛ СУММЫ

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x}{1+n} \cdot x^n + C$$

$$\int \sqrt[n]{x^k} dx = \frac{nx}{k+n} \cdot \sqrt[n]{x^k} + C$$

Разложение дроби на простейшие

$$\int \frac{kx+p}{(x-a)(x-b)} dx = A \int \frac{dx}{x-a} + B \int \frac{dx}{x-b}$$

$$\frac{kx+p}{rx+n} = \frac{k}{r} \cdot \left(1 + \frac{P-N}{x+N} \right)$$

простейшая дробь

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{x^n} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[n]{x^k}} dx = \frac{kx}{k-n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x^k}} + C$$

A и B находятся методом подстановки

1 Найдите интеграл

$$\int \frac{\sin(x + \sqrt{2}) dx}{[\cos(x + \sqrt{2})]^2}$$

2

Найдите интеграл $\int \frac{\ln 2 dx}{(\ln 2 \cdot x + 2)}$

3 Запишите неопределенный интеграл как множество первообразных

$$\int [e^{(x-\ln 4)} - \ln 4 \cdot (e-x)] dx$$

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1 $\int \frac{\sin 3x}{3} dx$

2 $\int \frac{5}{x} d \frac{1}{5x}$

3 $\int \frac{3}{2} d \frac{2}{3} \sqrt{\cos x}$

4 $\int \frac{\pi x - 1}{\pi x} d \pi x$

5 $\int \frac{3dx}{(x+2)(1-x)}$

6 $\int \frac{2x-4}{(x-3)(x+1)} dx$

7 $\int (\operatorname{tg} 2x + 2x + 2) d 2x$

Вариант 2

1 $\int 4 \sin \left(\frac{x+4}{4} \right) d \left(\frac{x}{4} - 1 \right)$

2 $\int \left[(\sqrt{x} - 1)^2 - 1 \right] d\sqrt{x}$

3 $\int \left(\frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{3\sqrt{x}} \right) dx$

4 $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx$

5 $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$

6 $\int \frac{1+x}{15x - 3x^2 - 12} dx$

7 $\int (2 \operatorname{tg} x \cdot \cos x - 3 \operatorname{ctg} x \cdot \sin x) dx$

Самостоятельная работа 2

Вариант 3

1

$$\int \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{\ln 3} + \frac{\ln 3}{3}\right)}{\ln 3} d\frac{3x}{\ln 3}$$

2

$$\int \left[(\sqrt{x} - 1)^2 + 1 \right] dx$$

3

$$\int \frac{\cos 3x}{3} d9x$$

4

$$\frac{27}{4} \cdot \int \frac{4}{9} \ln x d\frac{2}{3} \sqrt{\ln x}$$

5

$$\int \frac{x-1}{x^3 + x^2 - 2x} dx$$

6

$$\int \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

7

$$\int \frac{\sin^2 e^x - \cos^2 e^x}{\sin^2 e^x \cdot \cos^2 e^x} d e^x$$



1. Структура аналитического задания функции с параметрами	42
Постановка задачи	42
2. Конструирование дроби $\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$	44
Интегрирование дроби $\frac{kx^2 + mx + p}{(x-a)(x-b)(x-c)}$	44
3. Алгоритм разложения на простейшие дроби $\frac{k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \dots + k_{n-1} x + p}{(x-a_1)(x-a_2) \cdot \dots \cdot (x-a_n)(x-a_2)}$	46
4. Корректировка переменной интегрирования	48
5. Простейшие тригонометрические преобразования	50
6. Интегрирование функций с линейным аргументом	52
7. Алгоритм корректировки переменной интегрирования Общая схема корректировки переменной интегрирования	54
8. Схема выделения целой части дроби	56
Информационная схема «Параметры подынтегральной функции»	58
Самостоятельная работа 3. Вариант 1	59
Вариант 2	59
Вариант 3	60

1

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

СТРУКТУРА АНАЛИТИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ С ПАРАМЕТРАМИ

$$y = \underbrace{\mathbf{A}}_{\text{параметр функции}} \cdot f(\underbrace{\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}}_{\substack{\text{аргумент} \\ \text{линейного аргумента}}}) + \underbrace{\mathbf{B}}_{\text{параметр функции}}$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$$\begin{aligned} & \int [\mathbf{A} \cdot f(\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}) + \mathbf{B}] dx = \\ & = \mathbf{A} \cdot \int f(\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}) dx + \mathbf{B} \int dx = \\ & = \mathbf{A} \cdot \int f(\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}) d(x + \mathbf{p}) + \mathbf{B} x = ? \end{aligned}$$

Преобразуйте функцию
к виду $y = \mathbf{A} \cdot f(\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}) + \mathbf{B}$

1	1	$y = \frac{1}{2x}$
Трениажер	2	$y = \frac{x}{2} + 3$
	3	$y = \frac{3}{x} + 2$
	4	$y = \frac{2x+3}{x}$
	5	$y = \frac{2}{3x+2} + 1$

2	1	$y = 2\cos(1+3x)$
Трениажер	2	$y = \frac{1}{2\cos(1-3x)}$
	3	$y = \frac{\cos 3x + 1}{2}$
	4	$y = \frac{3\cos(x+2)-1}{3}$
	5	$y = \cos[2(x-3)]$

3	1	$y = \sqrt{7x}$
Трениажер	2	$y = \sqrt{7x+7}$
	3	$y = \frac{7}{\sqrt{7x}}$
	4	$y = \frac{\sqrt{7x}}{7}$
	5	$y = \frac{7+\sqrt{x+7}}{\sqrt{7}}$

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Серия 4	постройте функцию с параметрами	при	A=3π	B = -3	k = $\frac{1}{\sqrt{3}}$	p = ln 3
1 $f(x) = x$	$f(k \cdot x) + B$					
2 $f(x) = \frac{1}{x}$	$A \cdot f(k \cdot x + p)$					
3 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$A \cdot f(x + p) + B$					
4 $f(x) = \frac{1}{x^2}$	$A \cdot f(k \cdot x) + B$					
5 $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$f(k \cdot x + p) + B$					

Серия 5	Найдите интеграл
1	$\int [\sin x - \cos(x-1)] dx =$
2	$\int [e^{2x-1} - (2x)^e] d(2x) =$
3	$\int \left[\frac{\operatorname{tg}(x-3)}{3} - 1 \right] dx =$
4	$\int \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} + \sqrt{\frac{x}{2}} \right) dx =$
5	$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sqrt{2} \sin^2 x} \right) dx =$

2

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

КОНСТРУИРОВАНИЕ ДРОБИ

$$\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-a)} + \frac{1}{(x-b)} + \frac{1}{(x-c)} &= \\ = \frac{(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)} &= \\ = \frac{(x^2 - bx - cx - bc) + (x^2 - ax - cx - ac) + (x^2 - ax - bx - ab)}{(x-a)(x-b)(x-c)} &= \\ = \frac{\overbrace{3x^2 - 2(a+b+c)x - (ab+ac+bc)}^{R(x)}}{(x-a)(x-b)(x-c)} &= \\ = \frac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} \end{aligned}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБИ

$$\frac{kx^2 + mx + p}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

Коэффициенты **A**, **B** и **C**
находятся
методом подстановки

$$\underbrace{\frac{kx^2 + mx + p}{(x-a)(x-b)(x-c)}}_{I \quad II \quad III} = \underbrace{\frac{A}{x-a}}_I + \underbrace{\frac{B}{x-b}}_{II} + \underbrace{\frac{C}{x-c}}_{III}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{kx^2 + mx + p}{(x-a)(x-b)(x-c)} dx &= A \cdot \int \frac{dx}{x-a} + B \cdot \int \frac{dx}{x-b} + C \cdot \int \frac{dx}{x-c} = \\ &= A \cdot \ln|x-a| + B \cdot \ln|x-b| + C \cdot \ln|x-c| + C \\ &= \ln(|x-a|^A \cdot |x-b|^B \cdot |x-c|^C) + C \end{aligned}$$

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

ПРИМЕР

$$\frac{5-x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$5-x = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

$$x=1 \Rightarrow 5-1 = A(1-2)(1-3) \Rightarrow A=2$$

$$x=2 \Rightarrow 5-2 = B(2-1)(2-3) \Rightarrow B=-3$$

$$x=3 \Rightarrow 5-3 = C(3-1)(3-2) \Rightarrow C=1$$

$$\int \frac{(5-x)dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = 2 \cdot \int \frac{dx}{x-1} - 3 \cdot \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= 2 \cdot \ln|x-1| - 3 \cdot \ln|x-2| + \ln|x-3| + C$$

$$= \ln \frac{(x-1)^2 |x-3|}{|x-2|^3} + C$$

МАТРИЦА 1	Для каждой дроби			
РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ	определите количество простейших дробей, на которые ее можно разложить	представьте данную дробь в виде суммы простейших дробей	определите числовой коэффициент каждой простейшей дроби	найдите интеграл
$\frac{2x}{x^2-1}$				
$\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}$				
$\frac{6x^2-3x+1}{x(x-1)(x+1)}$				
$\frac{3x^2-2x-4}{(x^2-4)(x-1)}$				
$\frac{x^2-4x+4}{(x-1)(4-x^2)}$				

3

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

АЛГОРИТМ РАЗЛОЖЕНИЯ НА ПРОСТЕЙШИЕ

ДРОБИ
$$\frac{k_1x^{n-1} + k_2x^{n-2} + \dots + k_{n-1}x + p}{(x-a_1)(x-a_2) \cdot \dots \cdot (x-a_n)}$$

$$\frac{k_1x^{n-1} + k_2x^{n-2} + \dots + k_{n-1}x + p}{(x-a_1)(x-a_2) \cdot \dots \cdot (x-a_n)}$$

Количество множителей знаменателя заданной дроби

равно

количество простейших дробей I типа

$$= \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \dots + \frac{A_{n-1}}{(x-a_{n-1})} + \frac{A_n}{(x-a_n)}$$

Числовые коэффициенты простейших дробей находятся методом подстановки

Серия 1

Разложите дробь на простейшие

1 $\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)}$

2 $\frac{2x-1}{x(x+1)(x+2)}$

3 $\frac{2x-1}{x^2-4}$

4 $\frac{2x-1}{(x^2-4)(x+1)}$

5 $\frac{2x-1}{x^3-6x^2+11x-6}$

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

МАТРИЦА 2	Для каждой дроби			
РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ	представьте данную дробь в виде суммы простейших дробей	определите числовой коэффициент каждой простейшей дроби	найдите производную и упростите	найдите первообразную и упростите
$\frac{5x - 2}{x(x-1)}$				
$\frac{3x - 2}{x(x-2)}$				
$\frac{x + 3}{x^2 - 1}$				
$\frac{1+7x}{x(2-x)(x+1)}$				
$\frac{x^2 - 2x - 2}{x(x^2 - x - 2)}$				

4

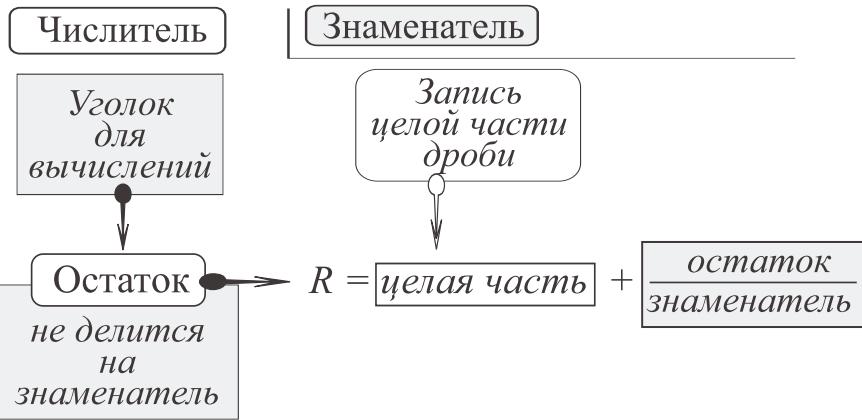
ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

СХЕМА ВЫДЕЛЕНИЯ ЦЕЛОЙ ЧАСТИ ДРОБИ

Если у дроби степень числителя **больше или равна** степени знаменателя

$$R = \frac{k_1 x^{n+s} + \dots + k}{p_1 x^n + \dots + p}$$

то выделение целой части дроби можно осуществлять «делением уголком»



ПРИМЕР

$$I = \int \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x - 2)} dx = ?$$

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x - 2)} =$$

для удобства вычислений в числителе учитываются все степени переменной x с соответствующими коэффициентами

$$= \frac{x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

$$I = \underbrace{\int (x+2) dx}_{\text{непосредственное применение таблицы}} + 3 \underbrace{\int \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x+1)(x-2)} dx}_{\text{разложение подынтегральной дроби на простейшие}}$$

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

МАТРИЦА 1	Для каждой дроби				
	запишите		разложите знаменатель остатка на множители	разложите остаток на простейшие дроби	найдите интеграл
целую часть	остаток				
$\frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 3x + 2}$					
$\frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 7x + 12}$					
$\frac{2x^2 - 3x - 7}{x^2 + x - 6}$					
$\frac{3x - 2x^3 - 9x^2 + 1}{x^2 + 6x + 8}$					
$\frac{x^3 + 8x^2 + 11x + 38}{x^3 + 8x^2 + 19x + 12}$					

5

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

КОРРЕКТИРОВКА ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$k \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x), F(x) : F'(x) &= f(x) \quad \forall x \in \langle a; b \rangle \\ \frac{1}{k} \cdot d(kx) &= \frac{k}{k} \cdot d(x) = d(x) \quad \downarrow \\ d(x) &= \frac{1}{k} \cdot d(kx) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \int \underbrace{f(kx)}_{\substack{\text{трудно} \\ \text{для} \\ \text{преобразования}}} dx = \int f(kx) \cdot \underbrace{\frac{1}{k} \cdot d(kx)}_{\substack{\text{элементарные} \\ \text{преобразования}}} = \\ = \frac{1}{k} \int f(kx) d(kx) = \\ = \frac{1}{k} F(kx) + C \end{array} \right.$$

ПРИМЕР

Вынесение числа
за знак интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\substack{1-\text{й способ}}} \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{x}}}_{\substack{2-\text{й способ}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{x} + C = \sqrt{2x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \underbrace{\frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{\sqrt{2x}}}_{\substack{\text{Корректировка} \\ \text{переменной интегрирования}}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2x} + C = \sqrt{2x} + C$$

ПРИМЕР

Осуществите в исходном задании
корректировку переменной интегрирования $I = \int \frac{dx}{\sin \sqrt{5}x}$
и найдите интеграл

Анализ

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d\sqrt{5}x}{\sin \sqrt{5}x}$$

Решение

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\sqrt{5}x}{2} \right| + C$$

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Восстановите переменную интегрирования	
1	$\int \cos 2x d\boxed{} = \sin 2x + C$
2	$\int \operatorname{ctg}(-3x) d\boxed{} = -\ln \sin 3x + C$
3	$\int \sin \frac{1}{4}x d\boxed{} = -\cos \frac{x}{4} + C$
4	$\int \frac{1}{\cos^2 5x} d\boxed{} = \operatorname{tg} 5x + C$
5	$\int \frac{d\boxed{}}{\operatorname{ctg}\left(-\frac{1}{2}x\right)} = \ln\left \cos \frac{x}{2}\right + C$

Мысленно измените в исходном задании переменную интегрирования, введите соответствующий множитель и найдите интеграл	
1	$\int 2 \cdot \operatorname{tg} x dx$
2	$\int \operatorname{ctg} 2x dx$
3	$\int (-2 \operatorname{ctg} 2x) dx$
4	$\int \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x dx$
5	$2 \int \operatorname{ctg}\left(-\frac{1}{2}x\right) dx$

Тест 3		$\frac{e^x}{2} + C$	$2e^x + C$	$e^{2x} + C$	$\frac{e^{2x}}{2} + C$	$\frac{e^2 e^{2x}}{2} + C$	$2e^{2x} + C$	$e^{4x} + C$	$e^2 + C$	$e^{2x} + C$
Найдите интеграл	$2 \int e^x dx$									
	$\int e^{2x} dx$									
	$2 \int e^{2x} dx$									
	$\int e^2 dx$									
	$\int e^{2x+2} dx$									

6

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Триногометрические тождества

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \\ &= \cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

ПРИМЕР

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^2 x dx &= \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \boxed{\int dx} = \\ &\quad \text{мысленное преобразование}\end{aligned}$$

$$= \operatorname{tg} x - x + C$$

ПРИМЕР

$$\int \cos^2(-3x) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \cos^2 3x d 3x =$$

мысленное преобразование

$$= \frac{1}{3 \cdot 2} \int 2 \cos^2 3x d 3x =$$

$$= \frac{1}{6} \int [1 + \cos(2 \cdot 3x)] d 3x =$$

мысленное преобразование

$$= \frac{1}{6} \left(\int d 3x + \int \cos 6x d 3x \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \left[3x + \frac{1}{2} \int \cos 6x d(2 \cdot 3x) \right] =$$

$$= \frac{1}{6} \left[3x + \frac{1}{2} \sin 6x \right] + C$$

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Найдите интеграл

1

$$1 \quad \int (\operatorname{tg}^2 x - 1) dx =$$

2

$$2 \quad \int (\operatorname{ctg}^2 2x + 1) dx =$$

Трениажер

$$3 \quad \int \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx =$$

$$4 \quad \int \left(\operatorname{tg} \frac{x}{3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{3} - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} \right) dx =$$

$$5 \quad \int [1 - \operatorname{tg} x]^2 dx =$$

Серия 2

Найдите интеграл

$$1 \quad \int (\sin x \cdot \cos x) dx$$

$$2 \quad \int \frac{2 - \sin 2x}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx$$

$$3 \quad \int \frac{dx}{\cos 2x - \cos^2 x}$$

$$4 \quad \int \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 2x} dx$$

$$5 \quad \int \frac{3 - \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$$

7

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ АРГУМЕНТОМ

$k, p \neq 0$

$$\begin{aligned} F(x) : F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a ; b \rangle \\ \int f(kx + p) dx \stackrel{\downarrow}{=} \int f(kx + p) \cdot \frac{1}{k} \cdot d(kx) = \boxed{\begin{aligned} d(kx) = \\ = d(kx + p) \end{aligned}} \\ = \frac{1}{k} \cdot \int f(kx + p) d(kx + p) = \\ = \frac{1}{k} \cdot F(kx + p) + C \end{aligned}$$

ПРИМЕР

Анализ
Числовой множитель
подынтегральной функции
 $\overbrace{4}$
 $\sqrt{\underbrace{2} \cdot x - \underbrace{7}}$
Параметры
аргумента
подынтегральной функции

$$\int \frac{4 dx}{\sqrt{2x-7}} = ?$$

Решение

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{\sqrt{2 \cdot x - 7}} dx &= \\ = \frac{4}{2} \int \frac{1}{\sqrt{2x-7}} d(2x-7) &= \\ = 4 \sqrt{2x-7} + C & \end{aligned}$$

Серия 1 Найдите интеграл

1 $\int \frac{1}{(2-x)^2} dx =$

2 $\int \frac{1}{(x-3)^3} dx =$

3 $\int \frac{3}{(5x-4)^4} dx =$

4 $\int \frac{6}{(7-6x)^5} dx =$

Серия 2 Найдите интеграл

1 $\int 2x dx =$

2 $\int 2\alpha d \frac{\alpha}{2} =$

3 $\int \frac{5t}{3} d \frac{t}{3} =$

4 $\int \frac{3\theta}{2} d \frac{2\theta}{3} =$

5 $\int \frac{y-2}{7} d \frac{y}{7} =$

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Осуществите корректировку переменной интегрирования и найдите интеграл

3 1 $\int (2x+1)dx$

2 $\int \frac{dx}{2x-1}$

3 $\int \left(\frac{x}{3}-3\right)^2 dx$

4 $\int \frac{dx}{(\sqrt{2}x+2)^4}$

5 $\int 5\sqrt{5-\frac{x}{5}} dx$

Запишите результат, мысленно осуществив корректировку переменной интегрирования

4 1 $\int \operatorname{ctg} 2x dx$

2 $\int \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx$

3 $\int \frac{dx}{\sin^2(x-2)}$

4 $\int \frac{dx}{\cos^2\left(2x-\frac{1}{2}\right)}$

5 $\int \operatorname{ctg}\left(2-\frac{x}{\sqrt{2}}\right) dx$

Тест 5

Найдите первообразную для подынтегральной функции

2^{x+2}	$2x^2$	$x \ln 2$	$\ln x$	$\ln 2$	4^x	x^2	$\frac{2^{2x}}{\ln 2}$
-----------	--------	-----------	---------	---------	-------	-------	------------------------

$\int 2^{2x+1} dx$

$\int 2^{x+2} \ln 2 dx$

$\int 2x dx$

$\int 2x d2x$

$\int 4^x \ln 2 d2x$

8

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

АЛГОРИТМ КОРРЕКТИРОВКИ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int f(kx+p) dx = \frac{1}{k} \cdot \int f(kx+p) d(k \cdot x) =$$

Преобразование дифференциала

$$= \frac{1}{k} \cdot \int f(kx+p) d(kx+p) =$$

Добавление свободного члена к переменной интегрирования

$$= \frac{1}{k} \cdot \int f(kx+p) d(kx+p) =$$

Нахождение результата по таблице

$$= \frac{1}{k} \cdot F(kx+p) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^3}{3} + C =$$

$$= \frac{(2x+1)^3}{6} + C$$

ОБЩАЯ СХЕМА КОРРЕКТИРОВКИ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int f(kx+p) d(x) =$$

$$= \frac{1}{k} \cdot F(kx+p) + C$$

Серия 1

Восстановите подынтегральную функцию

1 $\int (\ ? \) d \ x = -\cos x + C = \int (\ ? \) d \ x$

2 $\int (\ ? \) d \ 2x = -\operatorname{ctg} 2x + C = \int (\ ? \) d \ 2x$

3 $\int (\ ? \) d(3x+1) = \frac{(3x+1)^2}{2} + C = \int (\ ? \) d(3x+1)$

4 $\int (\ ? \) d \left(\frac{x}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C = \int (\ ? \) d \left(\frac{x}{2} \right)$

5 $\int (\ ? \) d(1-2x) = \cos(1-2x) + C = \int (\ ? \) d(1-2x)$

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Серия 2

Найдите интеграл

1 $\int \left(e^x - \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^x}{e^{2x}} \right) dx =$

2 $\int \left[(\sin 2x \cdot \cos 2x)^2 + \frac{\cos^2 2x}{4} \right] dx =$

3 $\int \left(\frac{\operatorname{ctg}^2 3x}{3} - 1 \right) dx =$

4 $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{2}} \right) dx =$

5 $\int \left[\frac{1}{\cos^2 \left(1 + \frac{x}{2} \right)} - \frac{1}{\operatorname{ctg} \left(1 - \frac{2x}{\sqrt{2}} \right)} \right] dx =$

Информационная схема
«ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ»

$$y = \underbrace{\mathbf{A}}_{\substack{\text{параметр} \\ \text{функции}}} \cdot f(\underbrace{\mathbf{k}}_{\substack{\text{параметры} \\ \text{линейного} \\ \text{аргумента}}} \cdot * + \underbrace{\mathbf{p}}_{\substack{\text{параметр} \\ \text{функции}}}) + \underbrace{\mathbf{B}}$$

КОРРЕКТИРОВКА
ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int f(x+p) dx = \int f(x+p) d(x+p) \quad \int f(kx) dx = \frac{1}{k} \int f(kx) d(kx)$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ
ФУНКЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ АРГУМЕНТОМ

$$\int f(kx+p) dx = \frac{\int f(kx+p) d(kx+p)}{k}$$

Выделяется целая часть дроби

$$R = \frac{k_1 x^{n+s} + \dots + k}{p_1 x^n + \dots + p}$$

Степень числителя
меньше
степени знаменателя

$$\int \frac{R(x) dx}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \int \frac{A dx}{x-a} + \int \frac{B dx}{x-b} + \int \frac{C dx}{x-c}$$

A, B, C
находятся
методом
подстановки

1 $\int \left(\frac{2}{\sqrt{2x-1}} + \frac{\sqrt{2}x}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{2}} \right) dx =$

2 $\int \frac{1 - \sin^2(1-x)}{\cos^2(x-1)} dx =$

3 По результату интегрирования $\ln \left| \frac{\sqrt[3]{x+5}}{(x-5)^3} \right| + C$ восстановите подынтегральную функцию

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

$$1 \int \frac{\sin 3x}{3} dx$$

$$2 \int \left(\frac{\sqrt{ex} - \sqrt{e^3}}{\sqrt{e}} \right)^2 dx$$

$$3 \int \left(\sin^2 \frac{3x}{2} - 1 \right) dx$$

$$4 \int \frac{\sin 2x}{2\sin^2 x} dx$$

$$5 \int \frac{2dx}{x^2 - 1}$$

$$6 \int \frac{3x-1}{6x-1} dx$$

$$7 \int \left(\frac{2}{\operatorname{tg}(2x+1)} + \frac{3}{\operatorname{ctg}(3x-1)} \right) dx$$

Вариант 2

$$1 \int \frac{x^4 - x^{-4} + 2}{x^2} dx$$

$$2 \int \sin^4 \frac{x}{4} dx$$

$$3 \int \frac{\sqrt{7x} - 1}{\sqrt{7\pi x}} dx$$

$$4 \int \frac{2x - 3x^2 - 1}{(x+1)(x-2)} dx$$

$$5 \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-2x}} + 2 \sqrt{\frac{1-2x}{2}} \right) dx$$

$$6 \int \frac{3\cos^2 3x dx}{\sin^2(-3x)}$$

$$7 \int \frac{2x^2 - 5}{2(x^2 - 1)(x^2 - 4)} dx$$

Самостоятельная работа 3

Вариант 3

1 $\int \left[\sin^2(1-x) - \operatorname{ctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} \right] dx$

2 $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$

3 $\int \operatorname{ctg}^3 \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) dx$

4 $\int \frac{e^x + 3}{e^{2x} - 4e^x + 3} d e^x$

5 $\int \cos \frac{x}{4} \cdot \sin \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{2} dx$

6 $\int \sqrt{\frac{4\sqrt{2x-1}}{2}} dx$

7 $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$

Разные задачи

1 $\int [f'(x) + g'(x)] dx$

2 $\int \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + f'(x) \cdot f(x) \right] dx$

3 Найдите $F(x)$:
$$\begin{cases} F'(x) = 6x + 3 \\ F(-2) = 4 \end{cases}$$

4 $\int (\ln x)' \frac{dx}{\ln^2 x}$

5 Докажите, что если $F'(x) = f(x)$,
то $\int f[f(x)] \cdot f'(x) dx = F[f(x)] + C$

Использованная литература

1. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк.– М.: Просвещение, 1991.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учебн. пособие для вузов.– 7-е изд., испр.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

ОТВЕТЫ

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ОТВЕТЫ

Тренажер

C. 7, № 1		C. 7, № 2		C. 7, № 3	
1	$(\sin x)' = \cos x$	1	$d(-\cos x) = \sin x dx$	1	$\cos x dx$
2	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	2	$d\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$	2	$2\cos 2x dx$
3	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	3	$d\operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	3	$\frac{1}{2}\cos \frac{x}{2} dx$
4	$\left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]' = \frac{1}{\cos x}$	4	$d \ln x = \frac{1}{x} dx$	4	$\frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$
5	$(-\ln \cos x)' = \operatorname{tg} x$	5	$d \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{dx}{\sin x}$	5	$-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$

Тренажер

C. 7, № 4	C. 11, № 1	C. 11, № 2	C. 13, № 1	C. 13, № 2
1 $2x \cos x^2 dx$	1 $k \frac{x^2}{2} + px + C$	1 $\frac{x^4}{4} + C$	1 $\cos x + C$	1 x
2 $-\sin(x+1)dx$	2 $3 \frac{x^2}{2} + 2x + C$	2 $\ln x + C$	2 $d\sqrt{x}$	2 $\cos x$
3 $-\frac{2dx}{x^3 \cos^2 \frac{1}{x^2}}$	3 $x^2 + 3x + C$	3 $\operatorname{tg} x + C$	3 $\ln \sin x + C$	3 $-\operatorname{ctg} x$
4 $\frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$	4 $x^2 - \frac{x}{3} + C$	4 $\operatorname{arctg} x + C$	4 $d \operatorname{tg} x$	4 $\ln \sin x $
5 $\frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$	5 $-\frac{x^2}{4} - 3x + C$	5 $\sin x + C$	5 $(x^2 - x + 1) + C$	5 $\frac{1}{x}$

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ

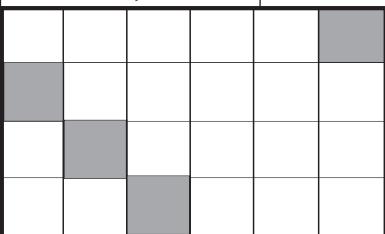
ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Серия

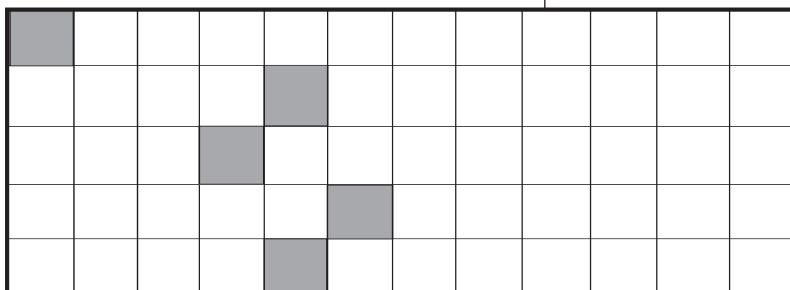
C. 9, № 1	C. 15, № 2	C. 15, № 3
1 $2x \rightarrow x^2$	1 $\frac{2(p)}{[1+(p)^2]^2}$	1 $\operatorname{tg} t + C$
2 $3x^2 \rightarrow x^3$	2 $\frac{2(x+k)}{[1+(x+k)^2]^2}$	2 $\operatorname{arctg}(s+3) + C$
3 $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow x^{\frac{1}{2}}$	3 $\frac{2(x-kp)}{[1+(x-kp)^2]^2}$	3 $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + C$
4 $3x^{-\frac{2}{3}} \rightarrow 9x^{\frac{1}{3}}$	4 $\frac{2(x+\ln p)}{[1+(x+\ln p)^2]^2}$	4 $\ln \vartheta + \sin 3\pi + C$
5 $-\frac{4}{5}x^{-\frac{9}{5}} \rightarrow x^{-\frac{4}{5}}$	5 $\frac{2(x-e^{p-k})}{[1+(x-e^{p-k})^2]^2}$	5 $\operatorname{arctg}(\omega - \log_2 \sqrt{5}) + C$

Тест

C. 13, № 3



C. 15, № 1



**Задачи
на доказательство**

C. 7, № 4

$$d \frac{a^x}{\ln a} = \left(\frac{a^x}{\ln a} \right)' dx = \frac{1}{\ln a} \cdot (a^x)' dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a dx = a^x dx$$

ОТВЕТЫ

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ОТВЕТЫ

Задачи на доказательство

C. 7, № 4

$$d \frac{a^x}{\ln a} = \left(\frac{a^x}{\ln a} \right)' dx = \frac{1}{\ln a} \cdot (a^x)' dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a dx = a^x dx$$

C. 7. № 5

$$\begin{aligned} d \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} &= d(\ln \sqrt{x-1} - \ln \sqrt{x+1}) = (\ln \sqrt{x-1} - \ln \sqrt{x+1})' dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1-x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1} \end{aligned}$$

C. 11, № 3

1-й способ: $\int \left(\frac{x}{k} - \frac{1}{p} \right) dx = \int \left[\frac{1}{k} \cdot x + \left(-\frac{1}{p} \right) \right] dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{1}{p} \right) \cdot x = \frac{x^2}{2k} - \frac{x}{p} + C$

2-й способ: $\left(\frac{x^2}{2k} - \frac{x}{p} + C \right)' = \left(\frac{x^2}{2k} \right)' + \left(-\frac{x}{p} \right)' + (C)' = \frac{1}{2k} \cdot 2x - \frac{1}{p} + 0 = \frac{x}{k} - \frac{1}{p}$

C. 11, № 4

$$x > 0 : |x| = x \Rightarrow (\ln x + C)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$x < 0 : |x| = -x \Rightarrow [\ln(-x) + C]' = [\ln(-x)]' = \frac{-1}{(-x)} = \frac{1}{x}$$

C. 11, № 5

$$\left(\frac{1}{1+x^2} + C \right)' = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' + (C)' = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

C. 13, № 4

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x) dx - \int dF(x) = [F(x) + C_1] - [F(x) + C_2] = C_1 - C_2 = C$$

ОТВЕТЫ

**ПЕРВООБРАЗНАЯ
И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**

ОТВЕТЫ

**Задачи
к информационной схеме**

1 $\int \frac{10}{3} x^2 \sqrt[3]{x} dx = x^3 \sqrt[3]{x} + C$	2 $\int \left(-\frac{1}{x^5} \right) dx = \frac{1}{4x^4} + C$
3 $\int \left(\pi - \frac{x}{\sqrt{3}} \right) dx = \pi x - \frac{x^2}{2\sqrt{3}} + C$	

Самостоятельная работа 1

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1 $\cos x + C$	1 $-\sin x + C$	1 $\frac{\sin^3 x}{3} + C$
2 $2x + \frac{x^2}{2} + C$	2 $\operatorname{tg}(x+2) + C$	2 $3\sqrt[3]{(x-1)} + C$
3 $\operatorname{arctg} t + C$	3 $\operatorname{arctg} \sqrt{t} + C$	3 $-\frac{1}{\cos 2x} + C$
4 $\sin 2x + C$	4 $\sin(5x-\alpha) + C$	4 $1 + C$
5 $-\ln \left \cos \frac{x}{2} \right + C$	5 $-\ln \left \cos \left(m + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$	5 $\frac{2}{3} \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{tg} x} + C$
6 $\ln(1+s^2) + C$	6 $\frac{2}{3} (x^2+1) \sqrt{x^2+1} + C$	6 $\frac{(\operatorname{tg} s+3)^2}{2} + C$
7 $2x^2 + C$	7 $\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + C$	7 $\frac{(n^2-1)^2}{2} + C$

ОТВЕТЫ

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ОТВЕТЫ

Тренажер

C. 21, № 4		C. 24, № 1		C. 24, № 2		C. 25, № 6	
1	$\frac{x^2}{2} + C$	1	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	1	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	1	$\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C$
2	$x^5 + C$	2	$\frac{\sqrt[n]{x}}{n x}$	2	$\frac{n x \sqrt[n]{x}}{n+1} + C$	2	$\frac{4}{5}(x+1)^4 \sqrt[4]{x+1} + C$
3	$\frac{x^6}{24} + C$	3	$-\frac{1}{n x \sqrt[n]{x}}$	3	$\frac{1}{\sqrt[n]{x}} \cdot x \cdot \frac{n}{1-n} + C$	3	$\frac{5}{7}(x+1) \sqrt[5]{(x+1)^2} + C$
4	$-\frac{5}{3x^3} + C$	4	$\frac{k \sqrt[n]{x^k}}{n x}$	4	$\frac{n x \sqrt[n]{x^k}}{n+k} + C$	4	$\frac{5}{8}(x-\sqrt{2}) \sqrt[5]{(x-\sqrt{2})^3} + C$
5	$\frac{1}{x^5} + C$	5	$-\frac{k}{n x \sqrt[n]{x^k}}$	5	$-\frac{k \sqrt[n]{x^{n-k}}}{n-k} + C$	5	$\frac{4}{9}(x-1)^2 (x-1)^{\frac{1}{4}} + C$

Тренажер

C. 26, № 1		C. 26, № 2		C. 27, № 4	
1	$\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + C$	1	$\frac{(x+1)^3}{3} + x + C$	1	$\frac{x^6}{6} + \frac{5}{4} \sqrt[5]{x^4} - \frac{x^2}{10} + C$
2	$\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + x + C$	2	$\frac{(x-1)^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$	2	$x - \frac{2}{3}x \sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$
3	$\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{5x^2}{2} + x + C$	3	$\frac{(x+1)^4}{4} + x^2 + C$	3	$\frac{x}{3} + \frac{9}{2} \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + C$
4	$\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{3x^2}{2} + 2x + C$	4	$\frac{(x+1)^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + C$	4	$6\sqrt[3]{x} - \frac{3x}{2} + \frac{4}{5}x \sqrt{x^3} + C$
5	$\frac{x^4}{4} + x^3 + 2x^2 + x + C$	5	$\frac{(x+1)^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C$	5	$-\frac{4}{\sqrt{x}} + x^2 \sqrt{x} + C$

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ

**ЛИНЕЙНОСТЬ
ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

Тренажер

C. 29, № 4		C. 29, № 5		C. 31, № 1		C. 31, № 2	
1	$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$	1	$\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - 2x + C$	1	$1 + \frac{1}{x+1}$	1	$-\frac{1}{(x+1)^2}$
2	$x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + C$	2	$\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + \sqrt{2}x + C$	2	$1 - \frac{1}{x}$	2	$\frac{1}{x^2}$
3	$-\frac{1}{x} - 2\ln x + x + C$	3	$\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + x + C$	3	$1 - \frac{3}{x+2}$	3	$\frac{3}{(x+2)^2}$
4	$\frac{x^2}{2} + 2x + \ln x + C$	4	$\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - x + C$	4	$-1 + \frac{2}{x+1}$	4	$-\frac{2}{(x+1)^2}$
5	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$	5	$\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + C$	5	$-1 - \frac{4}{x-2}$	5	$\frac{4}{(x-2)^2}$

Тренажер

C. 31, № 3		C. 35, № 4		C. 35, № 5	
1	$x + \ln x+1 + C$	1	$-\frac{1}{3} \left[\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} \right]$	1	$\frac{1}{3} \ln \left \frac{x-1}{x+2} \right + C$
2	$x - \ln x + C$	2	$-\frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+\frac{1}{2}}$	2	$\frac{2}{3} \ln \left \frac{2(1-x)}{2x+1} \right + C$
3	$x - 3\ln x+2 + C$	3	$\frac{1}{2} \left[\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-2} \right]$	3	$-\frac{1}{2} \ln \left \frac{x-2}{x} \right + C$
4	$-x + 2\ln x+1 + C$	4	$\int \frac{dx}{x-\frac{1}{2}} - \int \frac{dx}{x+\frac{1}{2}}$	4	$\ln \left \frac{2x-1}{2x+1} \right + C$
5	$-x - 4\ln x-2 + C$	5	$-\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-\frac{1}{2}}$	5	$\ln \left \frac{2x-1}{2x} \right + C$

ОТВЕТЫ

**ЛИНЕЙНОСТЬ
ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

ОТВЕТЫ

Матрица		C. 22, № 2	
x^2	3	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{x^3}{3}$
x^{-2}	-1	$\frac{1}{-1}x^{-1}$	$-\frac{1}{x}$
$x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$x^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}}$	$2\sqrt{x}$
$x^{-\frac{4}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{1}x^{-\frac{1}{3}}$	$-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

Серия	
C. 21, № 5	C. 23, № 6
1 $\frac{2(x+1)^3}{3} + C$	1 $x + C$
2 $-\frac{\cos(x+1)}{2} + C$	2 $\frac{x^2}{2} + C$
3 $\frac{1}{4} \ln \left x - \frac{1}{2} \right + C$	3 $6 \ln x + C$
4 $-\sqrt{e} \ln \cos(x-1) + C$	4 $\frac{1}{4} \ln x + C$
5 $\frac{2}{\pi} \operatorname{tg}(x - \sqrt{\pi}) + C$	5 $\frac{4(x+2)^5}{5} + C$

Серия	
C. 25, № 7	C. 27, № 5
1 $\frac{4x\sqrt{x}}{3} + C$	1 $\frac{2^x}{\ln 2} + e^x + C$
2 $\frac{2\sqrt{2}x\sqrt{x}}{3} + C$	2 $\frac{x^2}{2} - \sin(x-2) + C$
3 $\frac{2^4\sqrt{2}x\sqrt{x}}{3} + C$	3 $\frac{e^{2+x}}{2} + \frac{x}{e^2} + C$
4 $\frac{4^4\sqrt{2}x^4\sqrt{x}}{5} + C$	4 $\operatorname{tg}(x-2) + \operatorname{ctg}(x+2) + C$
5 $\frac{4x^4\sqrt{x^3}}{7\sqrt[4]{2}} + C$	5 $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}+x\right) + \ln \cos(x-1) - \operatorname{ctg}(x-2) + C$
C. 31, № 4	
1 $2x + 3 \ln x-2 + C$	
2 $\frac{x}{2} + \frac{3}{4} \ln \left x + \frac{1}{2} \right + C$	
3 $\frac{3}{2}x + \frac{5}{6} \ln \left x - \frac{3}{2} \right + C$	
4 $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \ln \left x - \frac{1}{2} \right + C$	
5 $-\frac{2}{3}x + \frac{5}{9} \ln \left x - \frac{2}{3} \right + C$	

ОТВЕТЫ

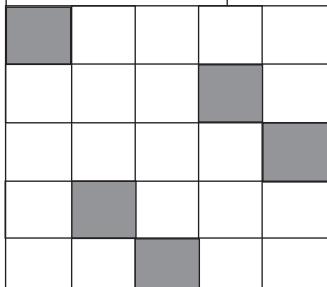
ОТВЕТЫ

**ЛИНЕЙНОСТЬ
ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

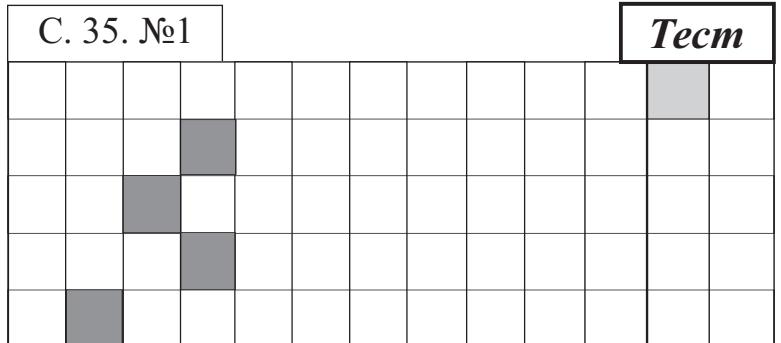
Серия

C. 33, № 2	C. 35, № 3	C. 37, № 2
1 $\ln x^2-3x+2 +C$	1 $\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}$	1 $\frac{1}{3} \ln \left \frac{x-2}{x+1} \right + C$
2 $\ln \left \frac{x+2}{x+3} \right + C$	2 $\frac{2}{3(1-x)} + \frac{2}{3\left(x+\frac{1}{2}\right)}$	2 $\frac{2}{3} \ln \left \frac{x-2}{x+1} \right + C$
3 $\ln(x^2+3x+2)^2+C$	3 $-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x-2)}$	3 $\frac{1}{3} \ln(x+1)^2(x-2)^4 + C$
4 $\ln \frac{ x-3 ^3}{(x-2)^2} + C$	4 $\frac{1}{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$	4 $\frac{1}{3} \ln(x-1)^2(x+2)^4 + C$
5 $\ln 6x^2+5x+1 +C$	5 $-\frac{1}{x} + \frac{2}{2x-1}$	5 $-\frac{1}{4} \ln \left \frac{x-2}{(x+2)^3} \right + C$

C. 33. №1



C. 35. №1



Тем

**Задачи
на доказательство**

C. 21, № 1

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x \pm p}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x \pm p)}{\sqrt{x \pm p}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{x \pm p} + C = \sqrt{x \pm p} + C$$

C. 21, № 2

$$\int \left(x + \frac{p}{A} \right) dx = \int \left(x + \frac{p}{A} \right) d \left(x + \frac{p}{A} \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{p}{A} \right)^2 + C = \frac{(Ax+p)^2}{2A^2} + C$$

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Задачи на доказательство

C. 21, № 3

$$\int \frac{1}{Bx} dAx = \int \frac{A}{Bx} dx = \frac{A}{B} \cdot \int \frac{dx}{x} = \frac{A}{B} \cdot \ln|x| + C = \frac{A \ln|x|}{B} + C$$

C. 22, № 1

$$\int \sqrt[n]{x^m} \sqrt[m]{x} dx = \int x^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{m}} dx = \int x^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} dx = \int x^{\frac{m+n}{n \cdot m}} dx = \frac{x^{\frac{m+n}{n \cdot m} + 1}}{\frac{m+n}{n \cdot m} + 1} + C = \frac{x^{\frac{n+m}{n \cdot m}}}{\frac{n+m}{n \cdot m} + 1} + C$$

C. 22. № 3

$$\int \frac{dx}{\sqrt[k]{(x \pm p)^n}} = \int (x \pm p)^{-\frac{n}{k}} d(x \pm p) = \frac{(x \pm p)^{-\frac{n}{k} + 1}}{-\frac{n}{k} + 1} + C = \frac{k}{k-n} \cdot \frac{x \pm p}{\sqrt[k]{(x \pm p)^n}} + C$$

C. 23, № 4

$$\int \sqrt[n]{nx} dx = n^{\frac{1}{n}} \int x^{\frac{1}{n}} dx = n^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{1+n} \cdot x^{\frac{1}{n} + 1} = \frac{n^{\frac{1+n}{n}} x^{\frac{1+n}{n}}}{1+n} + C = \frac{\sqrt[n]{n^{1+n} x^{1+n}}}{1+n} + C$$

C. 23, № 6

$$\int \frac{\sqrt[n]{A^{n-1}x}}{\sqrt[m]{B^{m-1}x}} dx = \frac{\sqrt[n]{A^{n-1}}}{\sqrt[m]{B^{m-1}}} \int \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{x}} dx = \frac{A^{\frac{n-1}{n}}}{B^{\frac{m-1}{m}}} \int x^{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}} dx = \frac{A^{\frac{m}{n}} \sqrt[B]{x}}{B^{\frac{n}{m}} \sqrt[A]{x}} + C$$

C. 23, № 6

$$\int x^{\sqrt[n]{x}} dx = \int \sqrt[n]{x^{n+1}} dx = \int x^{\frac{n+1}{n}} dx = \frac{x^{\frac{n+1}{n} + 1}}{\frac{n+1}{n} + 1} + C = \frac{nx^{\frac{n}{n+1}}}{2n+1} + C = \frac{nx^2 \sqrt[n]{x}}{2n+1} + C$$

C. 24, № 3

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{(1-n)x^{n-1}} \right]' + \int \frac{n}{x^{n+1}} dx = \frac{1}{(1-n)} \left[\frac{1}{x^{n-1}} \right]' + n \int \frac{dx}{x^{n+1}} \\ & = \frac{1-n}{(1-n)} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{n}{[1-(n+1)]} \cdot x \cdot \frac{1}{x^{n+1}} + C = \frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^n} + C = C \end{aligned}$$

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Задачи на доказательство

C. 25, № 5

$$\int x^{\frac{n}{n+p}} dx = \int \sqrt[n]{x^{n+p}} dx = \frac{n}{(n+p)+n} \cdot x \cdot \sqrt[n]{x^{n+p}} + C = \frac{n \sqrt[n]{x^{2n+p}}}{2n+p} + C$$

C. 25, № 6

$$\int x^k \sqrt[n]{x^p} dx = \int \sqrt[n]{x^{k+n+p}} dx = \frac{n}{(kn+p)+1} \cdot x \cdot \sqrt[n]{x^{k+n+p}} + C = \frac{n \cdot x^{k+1} \sqrt[n]{x^p}}{2n+p+1} + C$$

C. 26, № 3

$$\left(e^x + \frac{a^x}{\ln a} + C \right)' = (e^x)' + \frac{1}{\ln a} (a^x)' = e^x + \frac{1}{\ln a} \cdot \ln a \cdot a^x = e^x + a^x$$

C. 28, № 1

$$\int \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{x^2} + C$$

C. 28, № 2

$$\begin{aligned} \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3 dx &= \int \left(x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx = \\ &= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C = 2\sqrt{x} \left(\frac{1}{5}x^3 - x^2 + 3x + 1 \right) + C \end{aligned}$$

C. 28, № 3

$$\begin{aligned} \int (x - \sqrt{x} + x\sqrt{x}) (x\sqrt{x} - \sqrt{x} - x) dx &= \int \left[(x\sqrt{x} - \sqrt{x})^2 - x^2 \right] dx = \\ &= \int (x^3 - 2x^2 + x - x^2) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

C. 32, № 1

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\underbrace{x+\frac{p}{k}}_{\text{простейшая дробь}}}$$

C. 32, № 2

$$\int \frac{dx}{kx+p} = \frac{1}{k} \cdot \int \frac{d\left(x+\frac{p}{k}\right)}{x+\frac{p}{k}} = \frac{1}{k} \ln \left| x + \frac{p}{k} \right| + C$$

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ

**ЛИНЕЙНОСТЬ
ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

*Задачи
к информационной схеме*

1 $-\frac{1}{\cos(x+\sqrt{2})} + C$	2 $\ln \left x + \frac{2}{\ln 2} \right + C$
3 $\frac{e^x}{4} - 2e \cdot \ln 2 \cdot x + x^2 \ln 2 + C$	

Самостоятельная работа 2

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1 $-\frac{\cos 3x}{9} + C$	1 $-4 \cos\left(\frac{x}{4} + 1\right) + C$	1 $-\frac{\ln \cos\left(\frac{3x}{\ln 3} + \frac{\ln 3}{3}\right) }{\ln 3} + C$
2 $\frac{1}{2x^2} + C$	2 $\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{3} - \sqrt{x} + C$	2 $\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 2x + C$
3 $\sqrt{\cos x} + C$	3 $x\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt{x} + C$	3 $\sin 3x + C$
4 $\pi x - \ln \pi x + C$	4 $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \sqrt{x} + C$	4 $\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x} + C$
5 $-\ln\left \frac{x-1}{x+2}\right + C$	5 $\ln\left \frac{x-3}{x-2}\right + C$	5 $\frac{1}{2}\ln\left \frac{x}{x+2}\right + C$
6 $\frac{\ln x-3 + 3\ln x+1 }{2} + C$	6 $\frac{2\ln x-1 - 5\ln x-4 }{9} + C$	6 $\ln\frac{(x-1)^2}{ x+1 } + C$
7 $-\ln \cos 2x + 2x^2 + 4x + C$	7 $-2\cos x - 3\sin x + C$	7 $2\ln \sin 2e^x + C$

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ

**ПАРАМЕТРЫ
ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ**

Тренажер

C. 42, № 1		C. 42, № 2	
1	$y = 1 \cdot \frac{1}{2 \cdot x + 0} + 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot x + 0} + 0$	1	$y = 2 \cdot \cos(3 \cdot x + 1) + 0$
2	$y = 1 \cdot \frac{1}{2 \cdot x + 0} + 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot x + 0} + 3$	2	$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos(-3 \cdot x + 1)} + 0$
3	$y = 3 \cdot \frac{1}{1 \cdot x + 0} + 2 = 1 \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot x + 0} + 2$	3	$y = \frac{1}{2} \cdot \cos(3 \cdot x - 0) + \frac{1}{2}$
4	$y = 3 \cdot \frac{1}{1 \cdot x + 0} + 2 = 1 \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot x + 0} + 2$	4	$y = 1 \cdot \cos(1 \cdot x + 2) - \frac{1}{3}$
5	$y = 2 \cdot \frac{1}{3 \cdot x + 2} + 1 = 1 \cdot \frac{1}{\frac{3}{2} \cdot x + 1} + 2$	5	$y = 1 \cdot \cos(2 \cdot x - 6) + 0$

Тренажер

C. 42, № 3		C. 51, № 1		C. 51, № 2	
1	$y = \sqrt{7} \cdot \sqrt{1 \cdot x + 0} + 0 = 1 \cdot \sqrt{7 \cdot x + 0} + 0$	1	$2x$	1	$-2 \ln \cos x + C$
2	$y = 1 \cdot \sqrt{7 \cdot x + 7} + 0 = \sqrt{7} \cdot \sqrt{1 \cdot x + 1} + 0$	2	$3x$	2	$\frac{\ln \sin 2x }{2} + C$
3	$y = 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{7 \cdot x + 0}} + 0 = \sqrt{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 \cdot x + 0}} + 0$	3	$\frac{x}{4}$	3	$-\ln \sin 2x + C$
4	$y = \frac{1}{7} \cdot \sqrt{7 \cdot x + 0} + 0 = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{1 \cdot x + 0} + 0$	4	$5x$	4	$-\frac{\ln \cos 2x }{4} + C$
5	$y = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{x + 7} + \sqrt{7}$	5	$\frac{x}{2}$	5	$-4 \ln \left \sin \frac{x}{2} \right + C$

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ

**ПАРАМЕТРЫ
ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ**

Тренажер

C. 53, № 1		C. 55, № 4		C. 55, № 5	
1	$\operatorname{tg} x - 2x + C$	1	$\frac{(2x+1)^2}{4} + C$	1	$\frac{1}{2} \ln \sin 2x + C$
2	$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2x + C$	2	$\frac{\ln 2x-1 }{2} + C$	2	$-2 \ln \left \cos \frac{x}{2} \right + C$
3	$-\frac{1}{2} \cos x + C$	3	$\left(\frac{x}{3} - 3 \right)^3 + C$	3	$-\operatorname{ctg}(x-2) + C$
4	$2x - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3} + C$	4	$-\frac{1}{3\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}x+2 \right)^3 + C$	4	$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(2x - \frac{1}{2} \right) + C$
5	$2 \ln \cos x + \operatorname{tg} x + C$	5	$-\frac{2\sqrt{5}}{3} (25-x) \sqrt{25-x} + C$	5	$-\sqrt{2} \ln \left \sin \left(2 - \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right + C$

Матрица

C. 45, № 1

2	$\frac{\mathbf{A}}{x-1} + \frac{\mathbf{B}}{x+1}$	$\mathbf{A=1}$ $\mathbf{B=1}$	$\ln x^2-1 + C$
2	$\frac{\mathbf{A}}{x-1} + \frac{\mathbf{B}}{x-2}$	$\mathbf{A=2}$ $\mathbf{B=-1}$	$\ln \frac{(x-1)^2}{ x-2 } + C$
3	$\frac{\mathbf{A}}{x} + \frac{\mathbf{B}}{x-1} + \frac{\mathbf{C}}{x+1}$	$\mathbf{A=-1}$ $\mathbf{B=2}$ $\mathbf{C=5}$	$\ln \frac{(x-1)^2 x+1 ^5}{ x } + C$
3	$\frac{\mathbf{A}}{x-2} + \frac{\mathbf{B}}{x+2} + \frac{\mathbf{C}}{x-1}$	$\mathbf{A=1}$ $\mathbf{B=1}$ $\mathbf{C=1}$	$\ln \frac{(x-1)(x-2)}{ x+2 } + C$
3	$\frac{\mathbf{A}}{x-1} + \frac{\mathbf{B}}{x+2} - \frac{\mathbf{C}}{x-2}$	$\mathbf{A=1}$ $\mathbf{B=-1}$ $\mathbf{C=3}$	$\ln \left \frac{(x-1)(x+2)^3}{x-2} \right + C$

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ

**ПАРАМЕТРЫ
ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ**

Матрица

C. 47, № 2

$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$	A = 2 B = 3	$-\left[\frac{2}{x^2} + \frac{3}{(x-1)^2} \right]$	$\ln \left x^2 (x-1)^3 \right $
$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$	A = 1 B = 2	$-\left[\frac{1}{x^2} + \frac{2}{(x-2)^2} \right]$	$\ln \left x (x-2)^2 \right $
$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$	A = 2 B = -1	$-\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$	$\ln \frac{(x-1)^2}{ x+1 }$
$\frac{A}{x} - \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$	A = $\frac{1}{2}$ B = $-\frac{5}{2}$ C = 2	$-\frac{5}{2(x-2)^2} - \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{(x+1)^2}$	$\ln \left[\left(\frac{x+1}{x-2} \right)^2 \sqrt{\frac{x}{x-2}} \right]$
$\frac{A}{x} - \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$	A = 1 B = $\frac{1}{3}$ C = $-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-2)^2}$	$\ln \left x^3 \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}} \right $

Матрица

C. 49. № 1

□	$\frac{5}{x^2 - 3x + 2}$	$\frac{5}{(x-1)(x-2)}$	$-\frac{5}{x-1} + \frac{5}{x-2}$	$x + 5 \ln \left \frac{x-2}{x-1} \right + C$
□	$\frac{3x-10}{x^2 - 7x + 12}$	$\frac{3x-10}{(x-3)(x-4)}$	$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-4}$	$x + \ln \left x-3 (x-4)^2 \right + C$
□	$\frac{-5x+5}{6-x^2-x}$	$\frac{-5x+5}{(x-2)(x+3)}$	$-\frac{4}{x+3} - \frac{1}{x-2}$	$2x - \ln (x+3)^4 - \ln x-2 + C$
2x+3	$\frac{x-4}{x^2+6x+8}$	$\frac{x-4}{(x+2)(x+4)}$	$\frac{4}{x+4} - \frac{3}{x+2}$	$-x^2 + 3x + \ln \frac{(x+4)^4}{ x+2 ^3} + C$
1	$\frac{26-8x}{x^3+8x^2+19x+12}$	$\frac{-8x+26}{(x+3)(x+4)(x+1)}$	$\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x+4} - \frac{3}{x+1}$	$x + \ln \frac{ x+3 (x+4)^2}{ (x+1)^3 } + C$

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ

**ПАРАМЕТРЫ
ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ**

Серия

C. 43, № 4		C. 43, № 5	
1	$\frac{1}{\sqrt{3}}x - 3 = \frac{x}{\sqrt{3}} - 3$	1	$\cos x - \sin(x-1) + \tilde{N}$
2	$3\pi \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}x + \ln 3} = \frac{3\sqrt{3}\pi}{x + \sqrt{3}\ln 3}$	2	$e^{2x-1} - \frac{(2x)^{e+1}}{e+1}$
3	$3\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{x+\ln 3}} - 3 = 3\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+\ln 3}}\right)$	3	$-\frac{\ln \cos(x-3) }{3} - x + C$
4	$3\pi \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}x^2}} - 3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{x^2} - 3$	4	$\sqrt{2x} + \frac{x\sqrt{2x}}{3} + C$
5	$\cos x^2 \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \ln 3 \right) - 3$	5	$2\operatorname{tg} x + \frac{\ln \cos x }{\sqrt{2}} - \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}} + C$

Серия

C. 46, № 1		C. 53, № 2		C. 54, № 1	
1	$\frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{2(x+1)}$	1	$-\frac{\cos 2x}{4} + C$	1	$\frac{1}{2-x} + C$
2	$\frac{1}{2x} + \frac{1}{5(x+2)} - \frac{5}{2(x+2)}$	2	$2x + \frac{\cos 2x}{2} + C$	2	$-\frac{3}{2(x-3)^2} + C$
3	$\frac{3}{4(x-2)} + \frac{5}{4(x+2)}$	3	$\operatorname{ctg} x + C$	3	$\frac{3}{5(4-5x)^3} + C$
4	$\frac{1}{4(x-2)} - \frac{5}{4(x-2)} + \frac{1}{x+1}$	4	$-\frac{\operatorname{tg}^2 2x + 2x}{8} + C$	4	$\frac{1}{4(7-6x)^4} + C$
5	$\frac{1}{2(x-2)} - \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2(x-3)}$	5	$3\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x + C$		

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ

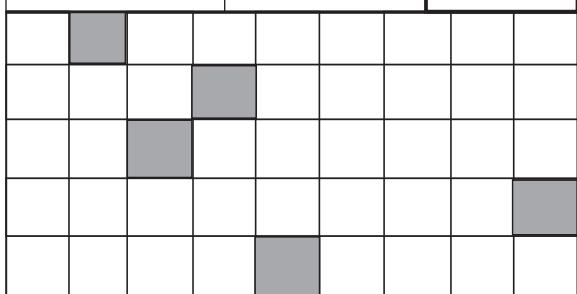
**ПАРАМЕТРЫ
ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ**

Серия

C. 54, № 2	C. 56, № 1	C. 57, № 2
1 $x^2 + C$	1 $\sin x$	1 $e^x - \frac{e^{2x}}{4} - e^{-x} + C$
2 $\frac{\alpha^2}{2} + C$	2 $\frac{1}{\sin^2 2x}$	2 $\frac{1}{4}x + C$
3 $\frac{5t^2}{18} + C$	3 $3x+1$	3 $-\frac{\operatorname{ctg} 3x}{9} - \frac{4x}{3} + C$
4 $\frac{\theta^2}{2} + C$	4 $\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$	4 $\sqrt{2x-1} + \frac{\sqrt{2}(x-1)}{3}\sqrt{x-1} + C$
5 $\frac{y^2}{98} - \frac{2y}{49} + C$	5 $-\sin(1-2x)$	5 $2\operatorname{tg}\left(1+\frac{x}{2}\right) - \frac{\sqrt{2} \ln \cos(1-\sqrt{2}x) }{2} + C$

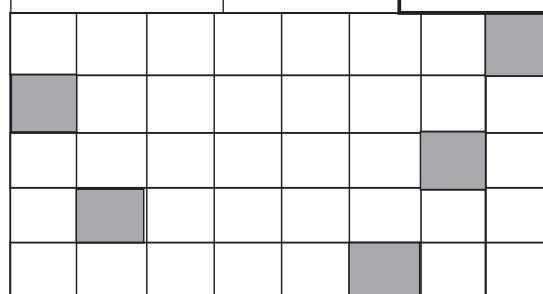
C. 51. №3

Тест



C. 55. №5

Тест



**Задачи
к информационной схеме**

1 $2\sqrt{2x-1} + \frac{x\sqrt{2x}}{6} + C$		2 $x + C$
3 $-\frac{2}{3} \cdot \frac{4x+25}{x^2-25}$		

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Самостоятельная работа 3

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1 $-\frac{\cos 3x}{9} + C$	1 $\frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{\ln 1-x }{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} + C$	1 $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2(1-x) - \sqrt{2} \ln \left \sin \frac{x-1}{\sqrt{2}} \right + C$
2 $\frac{x^2}{2} - \frac{4ex\sqrt{x}}{3} - ex^2 + C$	2 $\frac{3x}{8} - \sin \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{8} + C$	2 $x + \frac{\ln x }{6} - \frac{9 \ln x-2 }{2} + \frac{28 \ln x-3 }{3} + C$
3 $-\frac{\sin 3x}{6} - \frac{x}{2} + C$	3 $\frac{x}{\sqrt{\pi}} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{7\pi}} + C$	3 $-\frac{1}{4 \sin^2 2x} - \frac{1}{2} \ln \sin 2x + C$
4 $\ln \sin x + C$	4 $-3x + 2 \ln x+1 - \frac{10 \ln x-2 }{3} + C$	4 $3 \ln e^x - 3 - 2 \ln(e^x - 1) + C$
5 $\ln \left \frac{x-1}{x+1} \right + C$	5 $-\sqrt{1-2x} - \frac{\sqrt{2}(1-2x)\sqrt{1-2x}}{2} + C$	5 $-\frac{1}{4} \cos x + C$
6 $\frac{x}{2} - \frac{\ln 6x-1 }{12} + C$	6 $-\operatorname{ctg} 3x - 3x + C$	6 $\frac{4(2x-1)^8 \sqrt{2x-1}}{9\sqrt{2}} + C$
7 $\ln \left \frac{\sin(2x+1)}{\cos(3x-1)} \right + C$	7 $\frac{1}{8} \ln \frac{(x-1)^2(x-2)^4}{(x+1)^2 x+2 } + C$	7 $-\frac{2}{5^x \ln 5} + \frac{25}{2^x \ln 2} + C$

Разные задачи

1 $f(x) + g(x) + C$	3 $F(x) = 3x^2 + 3x + C$ $F(-2) = 4$
2 $\ln f(x) + \frac{f^2(x)}{2} + C$	$\left. \begin{array}{l} F(x) = 3x^2 + 3x + C \\ F(-2) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 = 12 - 6 + C$ $F(x) = 3x^2 + 3x - 2$
4 $-\frac{3}{\ln^3 x} + C$	5 $\int f[f(x)] \cdot \underbrace{f'(x) dx}_{df(x)} = F[f(x)] + C$

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Основные задачи	4
Введение первообразной	4
2. Связь между функцией и ее дифференциалом	6
Определение первообразной	6
Первообразная и дифференциал	6
3. Множество первообразных	8
Связи между первообразными одной и той же функции	8
Таблица первообразных	9
4. Неопределенный интеграл как множество первообразных	10
Объединение таблиц производных и интегралов	10
Расширенная таблица производных и интегралов	11
5. Структура неопределенного интеграла	12
Основные свойства неопределенного интеграла	12
6. Независимость функции от обозначения ее аргумента	14
Важное свойство таблицы интегралов	14
Интегрирование функции $f(kx+p)$	14
Информационная схема «Первообразная и неопределенный интеграл»	16
Самостоятельная работа 1. Вариант 1	17
Вариант 2	17
Вариант 3	18

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Вынесение числа за знак интеграла	20
Вывод табличного интеграла	20
2. Свойства степени	22
3. Таблица степеней	24
4. Интеграл суммы	26
5. Алгебраические преобразования подынтегральной функции	28
6. Составляющие «неправильной» дроби	30
7. Свойства модулей	32
Свойства логарифмов	32
8. Разложение дроби $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$ на сумму простейших дробей	34
Интегрирование дроби $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$	34
9. Разложение дроби $\frac{kx+p}{(x-a)(x-b)}$ на сумму простейших дробей	36
Информационная схема «Линейность операции интегрирования»	38
Самостоятельная работа 2. Вариант 1	38
Вариант 2	38
Вариант 3	39

СОДЕРЖАНИЕ

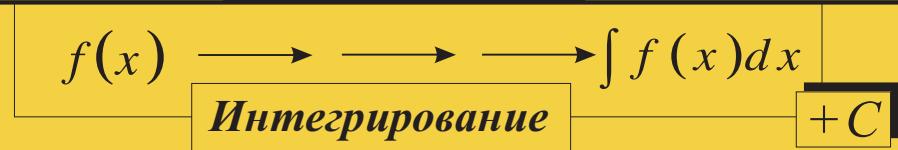
ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

1. Структура аналитического задания функции с параметрами	42
Постановка задачи	42
2. Конструирование дроби $\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$	44
Интегрирование дроби $\frac{kx^2+mx+p}{(x-a)(x-b)(x-c)}$	44
3. Алгоритм разложения на простейшие дроби	
$\frac{k_1x^{n-1} + k_2x^{n-2} + \dots + k_{n-1}x + p}{(x-a_1)(x-a_2) \cdot \dots \cdot (x-a_n)(x-a_2)}$	46
4. Корректировка переменной интегрирования	48
5. Простейшие тригонометрические преобразования	50
6. Интегрирование функции с линейным аргументом	52
7. Алгоритм корректировки переменной интегрирования	54
Общая схема корректировки переменной интегрирования	54
8. Схема выделения целой части дроби	56
Информационная схема «Параметры подынтегральной функции»	58
Самостоятельная работа 3. Вариант 1	59
Вариант 2	59
Вариант 3	60
Разные задачи	61
Использованная литература	62
ОТВЕТЫ	63

Дифференцирование

$$f'(x) \longleftrightarrow \longleftrightarrow \longleftrightarrow f(x)$$

k	$kx + p$	$k\frac{x^2}{2} + px$
nx^{n-1}	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n+1)x^{n-1}}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$-\frac{1}{x^2 \cdot \ln a}$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\log_a x $
$a^x \cdot \ln a$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
e^x	e^x	e^x
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$-\ln \cos x $
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{ctg} x$	$\ln \sin x $
$-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{arc tg} x$ $-\operatorname{arc ctg} x$



Неопределенный интеграл

Визуальный конспект-практикум

Выпуск I

**Начальные
представления
о технике
интегрирования**

**ПЕРВООБРАЗНАЯ
И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ
ИНТЕГРАЛ**

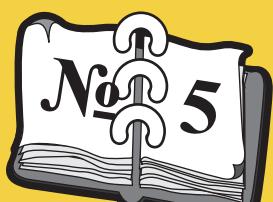


*Выпуск II
Часть 1*

**Простейшие
методы
интегрирования**

**АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ
ТАБЛИЧНОГО
ИНТЕГРАЛА**

**ЛИНЕЙНОСТЬ
ОПЕРАЦИИ
ИНТЕГРИРОВАНИЯ**



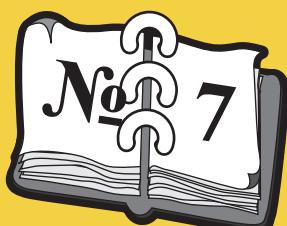
**ПАРАМЕТРЫ
ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ
ФУНКЦИИ**



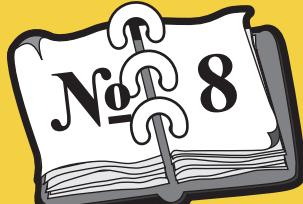
**ИЗМЕНЕНИЕ
СТРУКТУРЫ
ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО
ВЫРАЖЕНИЯ**

*Выпуск II
Часть 2*

**Общие методы
и частные приемы
интегрирования**



**ОБЩИЕ
МЕТОДЫ
ИНТЕГРИРОВАНИЯ**



**ЧАСТНЫЕ
ПРИЕМЫ
ИНТЕГРИРОВАНИЯ**