

Н. Резник,
Н.Неделько, Н.Ежова

*Начальные
представления
о матрицах
и определителях*

МУРМАНСК

2003

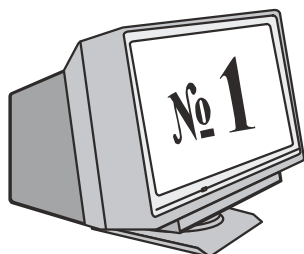
УДК 512.83(07)
ББК 22.143. я7

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. - Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. - 44 с.

Наталия Александровна Резник,
Наталя Станиславовна Неделько,
Наталия Михайловна Ежова
**Начальные представления о матрицах и определителях:
Визуальный конспект.**

ISBN 5-94245-017-X

© Наталия Александровна Резник, 2003
© Наталя Станиславовна Неделько, 2003
© Наталия Михайловна Ежова, 2003



Система 2-х линейных уравнений с 2-мя неизвестными

1. Система уравнений и ее матрица	2
2. Система уравнений и ее определитель	3
3. Ряды матрицы и определителя	4
4. Диагонали матрицы и определителя	5
5. Раскрытие главного определителя	6
6. Нахождение значения определителя	7
7. Определители системы	8
8. Решение системы с помощью определителей	9
9. Геометрическая интерпретация системы	10
10. Условие единственности решения системы	11
Информационная схема	
«ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА»	12
Разные задачи	13

1

Система уравнений и ее матрица

Система 2-х линейных уравнений с 2-мя неизвестными

$$S_2: \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Система
2-х линейных уравнений с 2-мя неизвестными

$\begin{Bmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{Bmatrix}$	Коэффициенты (<i>постоянные</i>)	$\begin{matrix} \overbrace{x, y} \\ \text{Неизвестные} \\ \text{(переменные)} \end{matrix}$	$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}$	Свободные члены (<i>постоянные</i>)
--	---------------------------------------	---	--	---

Матрица системы 2-х линейных уравнений с 2-мя неизвестными

Из коэффициентов
системы
при ее неизвестных

$$\begin{matrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{matrix}$$

и ее
свободных
членов

$$\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}$$

можно составить

*квадратную
матрицу*

*матрицу-
столбец*

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \text{ расширенную } \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array} \right)$$

1

ПОСМОТРИТЕ И

*восстановите
систему
по ее
расширенной матрице*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

2

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -x + 3y = -1 \end{cases}$$

ПОСМОТРИТЕ И

*составьте
расширенную матрицу
системы*

$$\begin{cases} -5 + y = 3x \\ x - 2 = 0 \end{cases}$$

3

Система уравнений и ее определитель

2

$$S_2: \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Если для пары чисел $\begin{cases} x^* \\ y^* \end{cases}$ выполняется: $\begin{cases} a_1x^* + b_1y^* = c_1 \\ a_2x^* + b_2y^* = c_2 \end{cases}$, то $\begin{cases} x^* \\ y^* \end{cases}$ – решения системы S_2

Например, для системы $\begin{cases} x - y = 9 \\ 2x + 3y = 38 \end{cases}$

находят ее решения

и записывают:

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ 2 \cdot \underbrace{(x - y)}_9 + 5y = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 9 \\ 5y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 4 \end{cases} \text{ – решения системы}$$

Главный определитель системы 2-х линейных уравнений с 2-мя неизвестными

Из коэффициентов системы при ее неизвестных

$$\begin{matrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{matrix}$$

можно составить

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

главный определитель системы

Например, для системы $\begin{cases} x - y = 9 \\ 2x + 3y = 38 \end{cases}$ ее главный определитель выглядит так: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

Точно также можно составить главный определитель системы по ее матрицам:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc} 5 & 7 \\ -2 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

расширенная матрица системы квадратная матрица системы главный определитель системы

ПОСМОТРИТЕ И

1 $\begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

составьте главный определитель системы

$\begin{cases} y = 2 \\ y - x = 0 \end{cases}$ 2

3

Ряды матрицы и определителя

Каждый элемент матрицы имеет в ее структуре строго определенное место
 Каждый элемент определителя имеет в его структуре строго определенное место

Например:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Например:

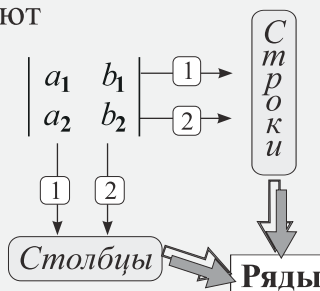
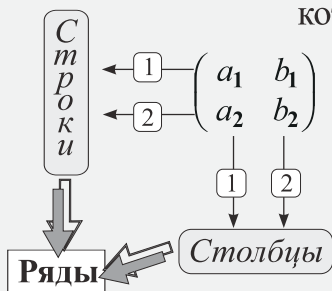
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Из одинаковых чисел можно составлять разные определители и матрицы

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

У матриц и у определителей различают столбцы и строки, которые называют рядами



Матрицу системы 2-х уравнений с 2-мя неизвестными обозначают символом $M^{2 \times 2}$
 Определитель системы 2-х уравнений с 2-мя неизвестными обозначают символом D_2

$M^{2 \times 2}$

обозначают символом

D_2

1 Тренажер		В определителе вида $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ найдите значение элемента	
1	$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$	2	$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & t \end{vmatrix}$
3	$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	4	$\Delta_2 = \begin{vmatrix} s & t \\ z & y \end{vmatrix}$
$b_2 =$		$a_1 =$	
$b_1 =$		$a_2 =$	

4

У матриц A и B у определителей различают диагонали

$$M^{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

побочную главную

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

побочную главную

1	Тренажер
---	----------

Из данных фигурок



составьте квадратную матрицу,
если известно, что
у нее равны только элементы

1

Bce

$$M^{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \textcircled{\bullet\bullet} & \textcircled{\bullet\bullet} \\ \textcircled{\bullet\bullet} & \textcircled{\bullet\bullet} \end{pmatrix}$$

2

главной
диагонали

$$M^{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \textcircled{\bullet\bullet} & \textcircled{\bullet\bullet} \\ \textcircled{\bullet\bullet} & \textcircled{\bullet\bullet} \end{pmatrix}$$

3

первого
столбца

$$M^{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \textcircled{\bullet\bullet} & \textcircled{\bullet\bullet} \\ \textcircled{\bullet\bullet} & \textcircled{\bullet\bullet} \end{pmatrix}$$

4

второй
строки

$$M^{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \odot & \odot \\ \odot & \odot \end{pmatrix}$$

У определителя
разрешается перемножать
элементы

побочной диагонали

главной диагонали

Найдите

значение произведения элементов

побочной диагонали
определителя

главной диагонали
определителя

2

1

$$\begin{vmatrix} y & x \\ x & y \end{vmatrix}$$

1

2

$$\begin{array}{|l} a^3 \\ b^3 \end{array} \quad \mathbf{1}$$

1

3

$$\begin{vmatrix} -a & a^2 \\ -b & b^2 \end{vmatrix}$$

•

•

4

$$\begin{vmatrix} y-x & x+y \\ x-y & x+y \end{vmatrix}$$

4

5

Раскрытие главного определителя

Раскрыть определитель – значит записать его в виде алгебраического выражения

Раскрывают определитель по правилу:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \boxed{-} & \boxed{+} \\ \swarrow & \searrow \end{matrix}$$

$$= \underbrace{-b_1 \cdot a_2}_{\text{Побочная диагональ}} + \underbrace{a_1 \cdot b_2}_{\text{Главная диагональ}}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \boxed{-} & \text{так} & \boxed{+} \\ & \text{видим} & \end{matrix}$$

$$= \underbrace{a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2}_{\text{так пишем}}$$

1	Тест	Найдите представление выражения				
в виде определителя		$5 \cdot c - b \cdot 7$	$c \cdot 7 - 5 \cdot b$	$5 \cdot 7 - b \cdot c$	$b \cdot c - 5 \cdot 7$	$5 \cdot b - 7 \cdot c$
$\begin{vmatrix} 5 & b \\ c & 7 \end{vmatrix}$						
$\begin{vmatrix} 5 & b \\ 7 & c \end{vmatrix}$						
$\begin{vmatrix} b & c \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$						
$\begin{vmatrix} c & b \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$						
$\begin{vmatrix} b & 7 \\ 5 & c \end{vmatrix}$						

Алгебраическое выражение вида $a \cdot b - c \cdot d$ можно представить определителем

$$\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}$$

2	Тест	Найдите определитель, представленный				
в виде выражения		$\begin{vmatrix} a & b \\ 2 & d \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a & b \\ d & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} b & 2 \\ d & a \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & b \\ a & d \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} b & d \\ a & 2 \end{vmatrix}$
$a \cdot 2 - b \cdot d$						
$2 \cdot d - a \cdot b$						
$a \cdot d - b \cdot 2$						
$b \cdot 2 - a \cdot d$						

Нахождение значения определителя

6

При раскрытии определителя, все элементы которого являются числами, получают число

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ - & + \end{matrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} =$$

Решите сами

При раскрытии определителя обязательно учитываются знаки всех его элементов

$$\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ - & + \end{matrix} = (-5) \cdot 2 - 6 \cdot (-2) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} =$$

1 Тренажер

Найдите и упростите значение определителя

1 $\begin{vmatrix} -x_1 & z_1 \\ x_2 & -z_2 \end{vmatrix} =$	2 $\begin{vmatrix} x_1 & -z_1 \\ x_2 & -z_2 \end{vmatrix} =$	3 $\begin{vmatrix} x_1 & -z_1 \\ -x_2 & z_2 \end{vmatrix} =$	4 $\begin{vmatrix} x_1 & -z_1 \\ -x_2 & -z_2 \end{vmatrix} =$

2 Тест Найдите значение

выражения	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$							
$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$							
$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$							
$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$							

3 Докажите, что

$$\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = 1$$

7

Определители системы

Из столбцов коэффициентов и столбца свободных членов

$$\text{системы } S_2: \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

можно составлять разные определители,
заменяя
столбцом свободных членов

$$\begin{array}{ccc} \text{столбец} & & \text{столбец} \\ \text{при } x & \left| \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{array} \right| & \text{столбец} \\ & \text{дополнительный} & \text{главный} & \text{дополнительный} \\ & \text{определитель} & \text{определитель} & \text{определитель} \\ & \Delta_x & \Delta & \Delta_y \end{array}$$

1
 дополнительный
определитель
 Δ_x

ПОСМОТРИТЕ И
составьте
 по расширенной матрице
 системы
 $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & 4 \end{array} \right)$

2
 дополнительный
определитель
 Δ_y

При составлении определителей системы
нужно учитывать, что
в ее уравнениях может быть изменен порядок слагаемых:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow S_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1y + a_1x = c_1 \\ b_2y + a_2x = c_2 \end{cases}$$

Составьте и вычислите определители		из коэффициентов системы	из коэффициентов	
			при x	при y
			и свободных членов системы	
1	$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ -x + 3y = 12 \end{cases}$	3 Т р е н а ж е р	4	5
2	$\begin{cases} x - 3y = -12 \\ -x + 3y = 12 \end{cases}$		Т р е н а ж е р	Т р е н а ж е р
3	$\begin{cases} y - x = 0 \\ x + 3y = 12 \end{cases}$			
4	$\begin{cases} 3 - y = x \\ y = 1 - 3x \end{cases}$			

Решение системы с помощью определителей

8

а) Найдем x :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1y = c_1 - a_1x \\ b_2y = c_2 - a_2x \end{cases}$$

$$\frac{c_1 - a_1x}{b_1} = \frac{c_2 - a_2x}{b_2}$$

$$b_2c_1 - a_1b_2x = b_1c_2 - a_2b_1x$$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2} = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

б) Найдем y :

$$\begin{cases} a_1x = c_1 - b_1y \\ a_2x = c_2 - b_2y \end{cases}$$

$$\frac{c_1 - b_1y}{a_1} = \frac{c_2 - b_2y}{a_2}$$

$$a_2c_1 - a_2b_1y = a_1c_2 - a_1b_2y$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Решения системы можно находить с помощью определителей

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

Дополнительные определители системы S_2

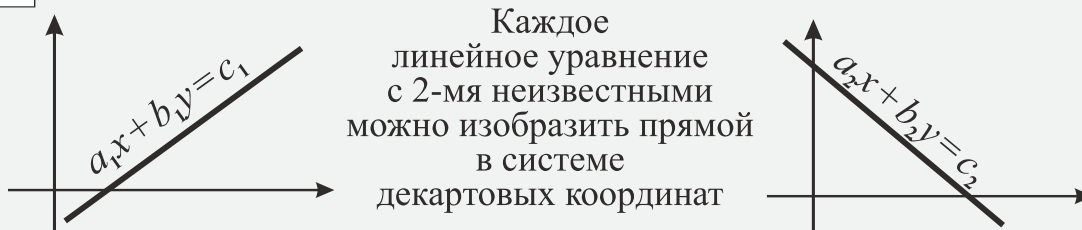
$$\Delta_y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = y$$

Главный определитель системы S_2

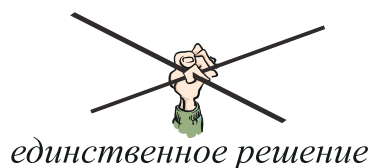
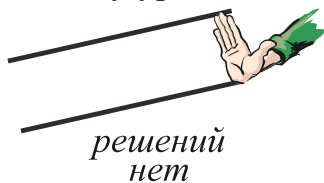
1	ПОСМОТРИТЕ И	2
решите систему методом подстановки $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 57x + 13y = 153 \end{cases}$ ↓	решите систему с помощью определителей $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 57x + 13y = 153 \end{cases}$ ↓ $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} & b_1 \\ & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \\ a_2 & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \end{array} \right.$	

9

Геометрическая интерпретация системы

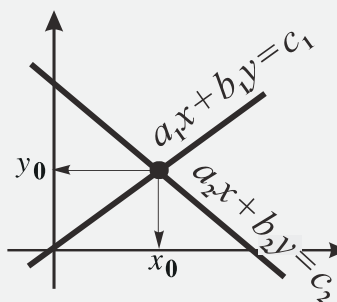


Систему уравнений $S_2: \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ можно решить графически.



Если эти прямые **пересекаются**, то есть **имеют одну общую точку**,

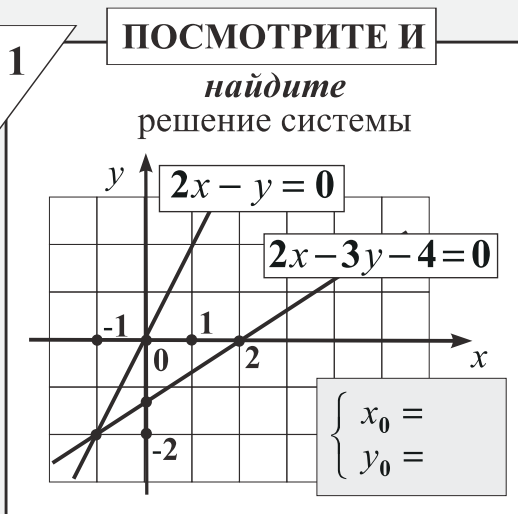
Единственная общая точка



Только одна пара координат (чисел)

то координаты этой точки (x_0, y_0) являются решением данной системы.

∃! (существует и единственно) решение системы S_2



Условие единственности решения системы

10

Если система $S_2: \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ имеет единственное решение то его можно записать в виде пары отношений определителей 2-го порядка

$$S_2: \begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases} \quad \text{где } \Delta \neq 0$$

Следовательно,

если	Δ_x и Δ_y	Δ	$\frac{\Delta_x}{\Delta}$ и $\frac{\Delta_y}{\Delta}$	то система имеет единственное решение
	любые числа	$\neq 0$	$\frac{\text{любые числа}}{\Delta}$	

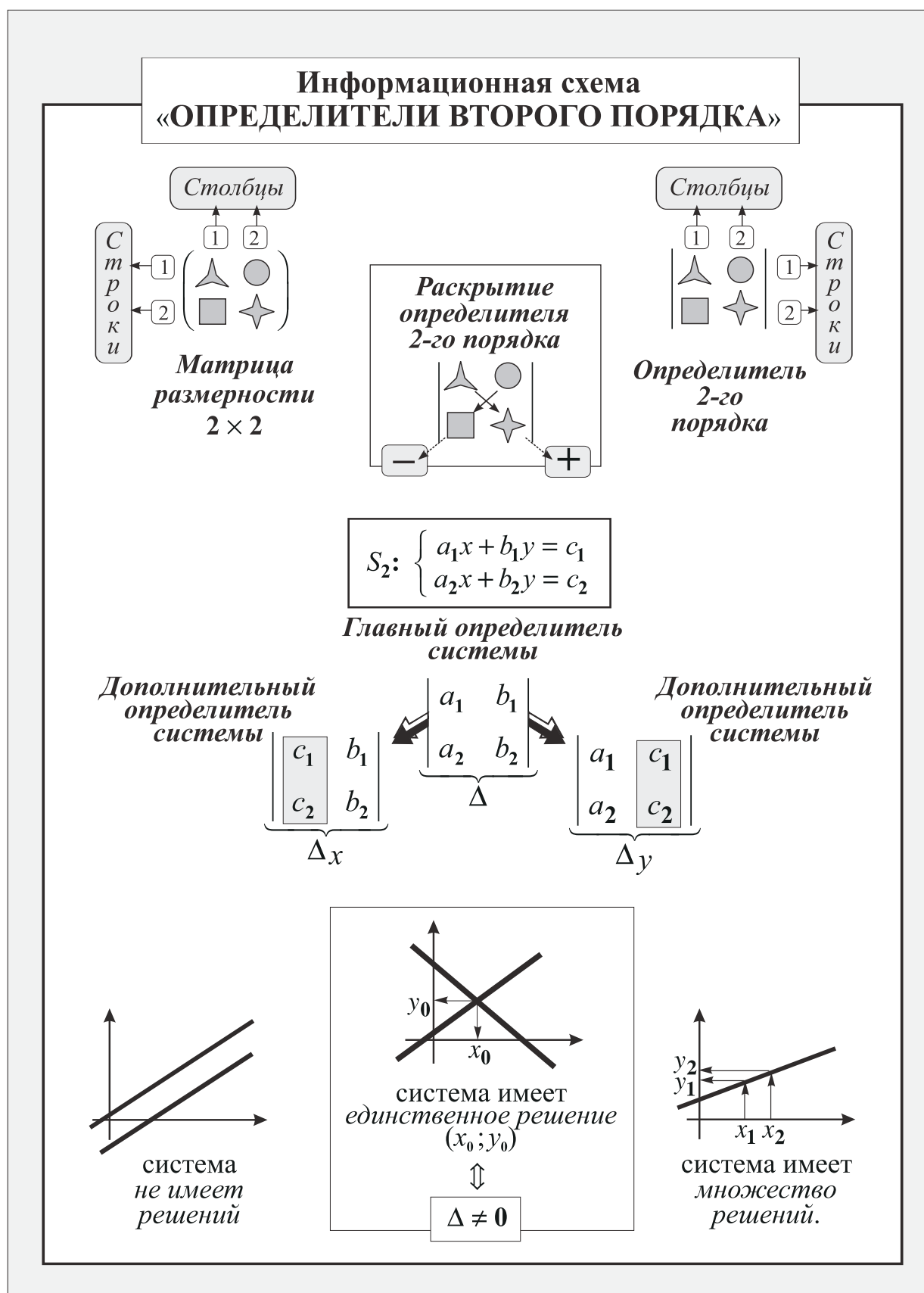
Например $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$
 $\Downarrow$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists! \text{ решение}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{8}{3}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{3} = -\frac{1}{3}$$

1	МАТРИЦА	Для каждой системы уравнений					
<i>Анализ решений системы</i>	составьте и вычислите Δ	определите, имеет ли система единственное решение	составьте и вычислите		найдите значение		
			Δ_x	Δ_y	x	y	
$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$							
$\begin{cases} 5x - 3y = -13 \\ 7x + 4y + 10 = 0 \end{cases}$							
$\begin{cases} x - y = -2 \\ 4 = -2x + 2y \end{cases}$							
$\begin{cases} 3x - 3y - 6 = 0 \\ 5y + 6x + 10 = 0 \end{cases}$							



1 ПОСМОТРИТЕ И
найдите
 значение
 элемента матрицы $s =$

$$\begin{pmatrix} m & d \\ s & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$
 $m =$
 $z =$
 $d =$

2 Докажите,
 что $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$

3 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ ПОСМОТРИТЕ И $\begin{vmatrix} m & s \\ p & o \end{vmatrix}$ **4**
составьте
 определитель вида
 $a = 2b = 2c = d = 2$ если $m = o - 1 = s + 1 = p = 2$

5 Докажите,
 что $\begin{vmatrix} x-y & 1 \\ 0 & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y & 0 \\ 1 & x-y \end{vmatrix}$

6 Тест	Найдите значение определителя										
матрицы	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$											
$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$											
$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$											
$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$											
$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$											

7 Решите задачу



Для компьютеров института приобрели новые мышки:

для 22 ПК учебных аудиторий:

4 упаковки беспроводных
и 2 упаковки с проводом;

для 39 ПК сотрудников:

3 упаковки беспроводных
и 6 упаковок с проводом.

Сколько мышек в каждой упаковке?

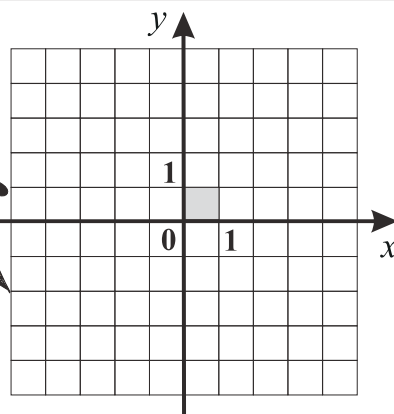


8

Тренижер

Постройте прямые, проходящие через пары заданных точек

1	(1 ; -3)	(2 ; 3)
2	(0 ; 3)	(-3 ; 2)
3	(- 3 ; -4)	(-2 ; 2)
4	(-3 ; -2)	(0 ; -1)



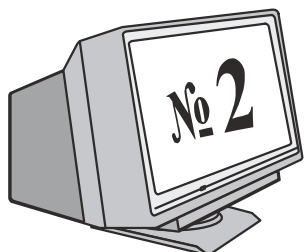
укажите,
система каких
уравнений
будет иметь

единственное решение	
не иметь решений	

9

ПОСМОТРИТЕ И

10	Тест	Найдите решения системы	$x =$	1	1	3	1	2	3	2	3	2	1
			$y =$	2	3	1	2	1	2	3	3	2	1
		$\begin{cases} 3x+2y=11 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$											
		$\begin{cases} 3x+2y=13 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$											
		$\begin{cases} 3x+2y=15 \\ 2x+3y=15 \end{cases}$											
		$\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$											



Система 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными

1. Матрица и определитель системы	16
2. Размерность матрицы и порядок определителя	17
3. Структура определителя 3-го порядка	18
4. Разложение определителя по его первой строке	19
5. Миноры определителя 3-го порядка	20
6. Таблица знаков для миноров	21
7. Разложение определителя по любой строке	22
8. Разложение определителя по любому ряду	23
9. Геометрическая интерпретация системы	24
10. Правила Крамера	25
Информационная схема	
«ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА»	26
Разные задачи	27

1

Матрица и определитель системы

Система 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными

$$S_3: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$\text{Коэффициенты (постоянные)} \left\{ \begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{matrix} \right. \underbrace{\begin{matrix} x, y, z \\ \text{Неизвестные} \\ \text{(переменные)} \end{matrix}} \left\{ \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{Свободные} \\ \text{члены} \\ \text{(постоянные)} \end{matrix}$$

Матрица системы 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными

Расширенная матрица системы

$$\left. \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array} \right)$$

Такую запись применяли древнекитайские математики во II веке до нашей эры

Главный определитель системы 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными

$$\left. \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

квадратная матрица системы главный определитель системы

ПОСМОТРИТЕ И

восстановите отсутствующие элементы

$$\begin{pmatrix} k_1 & \square & k_3 \\ \square & l_2 & \square \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

матрицы

$$\begin{vmatrix} a_1 & \square & c_1 \\ \square & b_2 & \square \\ a_3 & b_3 & \square \end{vmatrix}$$

определителя

Размерность матрицы и порядок определителя

2

У квадратной матрицы
системы 3-х уравнений с 3-мя неизвестными
различают
ряды
(столбцы и строки)

1	2	3	Нумерация столбцов	1	2	3
a_1	b_1	c_1	1	a_1	b_1	c_1
a_2	b_2	c_2	2	a_2	b_2	c_2
a_3	b_3	c_3	3	a_3	b_3	c_3
			Нумерация строк			

Квадратную матрицу системы
обозначают
символом $M^{3 \times 3}$
и говорят: *матрица*
размерности 3×3

Определители системы
обозначают
символом D_3
и говорят: *определитель*
3-го порядка



ПОСМОТРИТЕ И

определите
для заданной системы

значения элементов
побочной диагонали
ее главного
определителя

$S_3: \begin{cases} 4z - 3x - 2y = 5 \\ 3x - y - 5 = -2x \\ 7 = 2y - x - 5x \end{cases}$

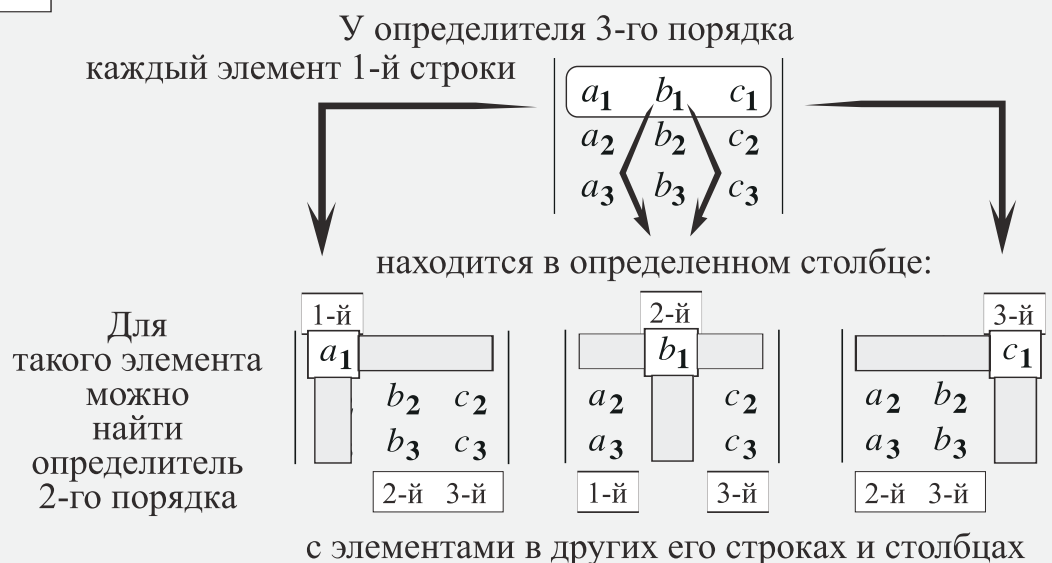


значения элементов
главной диагонали
ее квадратной
матрицы



3

Структура определителя 3-го порядка



1

1-й строки и 1-го столбца

 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

3

ПОСМОТРИТЕ И

запишите

определитель 2-го порядка, получающийся после вычеркивания в определителе 3-го порядка

запишите

2

1-й строки и 3-го столбца

 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

4

Получаемые определители 2-го порядка называют **минорами** и говорят:

a_1

 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

минор элемента a_1

b_1

 $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

минор элемента b_1

c_1

 $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

минор элемента c_1

5

минор элемента a_1

 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 4 & -5 & 6 \\ x & y & z \end{vmatrix}$

ПОСМОТРИТЕ И

запишите

6

минор элемента a_2

 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ m & 2 & -x \\ -n & 4 & y \end{vmatrix}$

Разложение определителя по его первой строке

4

Если в определителе каждому минору элемента его 1-й строки приписать свой знак:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \begin{matrix} + & - & + \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{matrix} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 \\ \boxed{+} & \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_1 \\ \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \boxed{-} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} c_1 \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \boxed{+} \end{vmatrix}$$

то его разложение по первой строке

получается в виде: $\Delta_3 = +a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

С учетом порядка букв в 1-й строке определителя

можно записать так: $\Delta_3 = + a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + b_1 a_3 c_2 - b_1 a_2 c_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 a_3 b_2$

Например: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$
 $+1 \cdot (-3) - (-2) \cdot (-8) + 3 \cdot (-1) = 8$

1

ПОСМОТРИТЕ И

вычислите

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \boxed{} \cdot \begin{vmatrix} \boxed{} & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{vmatrix} =$$

2	МАТРИЦА	Для каждого определителя				
	<i>Раскрытие определителя 3-го порядка по 1-й строке</i>	вычислите минор к элементу 1-й строки			раскройте определитель по элементам 1-й строки	найдите значение
		1-го столбца	2-го столбца	3-го столбца		
	$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$					
	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$					
	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$					
	$\begin{vmatrix} 0 & -5/2 & 5 \\ 2 & -3/2 & 0 \\ 2 & 0 & -1/2 \end{vmatrix}$					

5

Миноры определителя 3-го порядка

Минор можно построить для любого элемента определителя 3-го порядка.

Минор, соответствующий заданному элементу определителя третьего порядка, строится так:

$$\begin{vmatrix} \square & b_1 & c_1 \\ a_2 & \square & \square \\ \square & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & \square & c_1 \\ a_2 & \square & c_2 \\ \square & b_3 & \square \end{vmatrix}$$

мысленно выделяется этот элемент и вычеркиваются остальные элементы той же строки и того же столбца

Например:

Выбор элемента

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Нахождение минора элемента

Элемент	его минор
2	$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

1

ПОСМОТРИТЕ И

2

минор к элементу a_2

запишите

0	8	1
a_2	3	-7
0	-1	c_3

минор к элементу c_3

3

ПОСМОТРИТЕ И

4

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$

к какому элементу определителя

1	2	3
4	-3	-2
0	-1	-4

найден его минор

$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$

определите

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$

5

ПОСМОТРИТЕ И

6

Таблица знаков для миноров

6

В определителе
3-го порядка
каждому минору
присваивается свой знак:

+	-	+
-	+	-
+	-	+

**Таблица
знаков
для миноров**

Выбор элемента

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Нахождение
минора элемента

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Нахождение
минора элемента

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} b_1 & - & \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Элемент его минор
со знаком

$$\begin{matrix} 2 & \square & \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Составьте сами

$$\begin{matrix} 5 & \square & \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Элемент его минор
со знаком

$$\begin{matrix} 3 & + & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

1	Тест	Для определителя	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$											
найдите значение минора														
(с соответствующим знаком)														
к элементу		-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x_2														
y_1														
y_3														
z_2														
z_3														

7

Разложение определителя по любой строке

В разложении определителя по элементам его 1-й строки с учетом

порядка ее букв,
их индексов

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \end{pmatrix}$$

и соответствующих
знаков их миноров

первыми множителями слагаемых

являются элементы 1-й строки:

$$\Delta_3 = + \begin{vmatrix} a_1 \end{vmatrix} b_2 c_3 + \begin{vmatrix} b_1 \end{vmatrix} a_3 c_2 + \begin{vmatrix} c_1 \end{vmatrix} a_2 b_3 - \begin{vmatrix} a_1 \end{vmatrix} b_3 c_2 - \begin{vmatrix} b_1 \end{vmatrix} a_2 c_3 - \begin{vmatrix} c_1 \end{vmatrix} a_3 b_2$$

Если изменить порядок множителей в этих слагаемых, так, чтобы первыми в них оказались элементы 2-й строки, а затем изменить порядок самих слагаемых,

$$\Delta_3 = + \begin{vmatrix} a_2 \end{vmatrix} b_3 c_1 + \begin{vmatrix} b_2 \end{vmatrix} a_1 c_3 + \begin{vmatrix} c_2 \end{vmatrix} a_3 b_1 - \begin{vmatrix} a_2 \end{vmatrix} c_3 b_1 - \begin{vmatrix} b_2 \end{vmatrix} a_3 c_1 - \begin{vmatrix} c_2 \end{vmatrix} b_3 a_1$$

то получится разложение этого же определителя

по элементам

его 2-й строки

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} - & + & - \end{pmatrix}$$

с соответствующими
знаками их миноров

При аналогичных

рассуждениях:

$$\Delta_3 = + \begin{vmatrix} a_3 \end{vmatrix} b_1 c_2 + \begin{vmatrix} b_3 \end{vmatrix} a_2 c_1 + \begin{vmatrix} c_3 \end{vmatrix} a_1 b_2 - \begin{vmatrix} a_3 \end{vmatrix} b_2 c_1 - \begin{vmatrix} b_3 \end{vmatrix} c_2 a_1 - \begin{vmatrix} c_3 \end{vmatrix} a_2 b_1$$

получается разложение того же определителя

по элементам

его 3-й строки:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

с соответствующими
знаками их миноров

$$\begin{pmatrix} + & - & + \end{pmatrix}$$

Например:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{- + -}_{\text{мысленно}} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 4 = 3$$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{- + -}_{\text{мысленно}} =$	ПОСМОТРИТЕ И сравните результаты	1
$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{- + -}_{\text{мысленно}} =$		2

Разложение определителя по любому ряду

При разложении определителя 3-го порядка полную таблицу знаков миноров элементов можно читать

+	-	+
-	+	-
+	-	+

по столбцам

+	-	+
-	+	-
+	-	+

по строкам

Например, знаки в соответствующем столбце учитывают при построении миноров элементов этого столбца:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \boxed{+} & a_1 & b_1 & c_1 \\ \boxed{-} & a_2 & b_2 & c_2 \\ \boxed{+} & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \boxed{-} & b_1 & c_1 \\ a_2 & \boxed{+} & b_2 & c_2 \\ a_3 & \boxed{-} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boxed{+} & c_1 \\ a_2 & b_2 & \boxed{-} & c_2 \\ a_3 & b_3 & \boxed{+} & c_3 \end{vmatrix}$$

Таким образом:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} + \\ - \\ + \end{vmatrix}}_{\text{мысленно}} = +(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (2 - 3) + 1 \cdot (1 - 6) - 1 \cdot (1 - 4) = 0$$

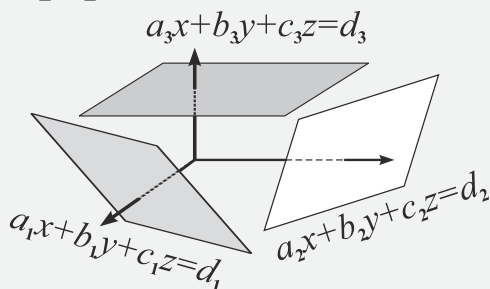
1	Серия	Укажите (затушуйте) ряд определителя, по которому осуществлено его разложение
1		$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$
2		$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$
3		$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$
4		$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

2	Докажите, что	$\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} \cdot x = 0$	разложив определитель по его 2-й строке

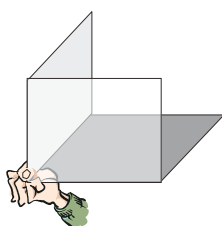
9

Геометрическая интерпретация системы

Каждое
линейное уравнение
с 3-мя неизвестными
можно изобразить
плоскостью
в декартовых координатах

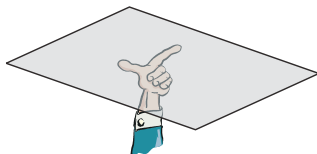


Систему уравнений



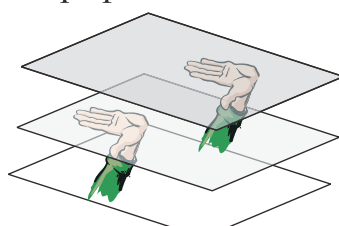
единственное решение

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$



множество решений

можно решить
графически

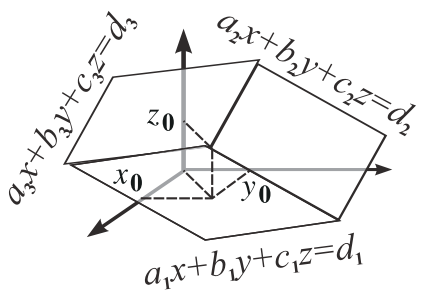


решений нет

Если
эти плоскости
пересекаются,
то есть
имеют
одну общую точку,



Единственная
общая
точка



Только
одна тройка
координат
(чисел)

то
координаты этой точки
($x_0; y_0; z_0$)
являются
решением
данной системы.



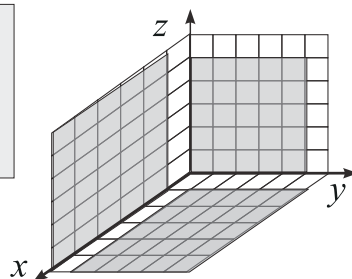
∃!
(существует
и единственно)
решение системы S_3

1

ПОСМОТРИТЕ И

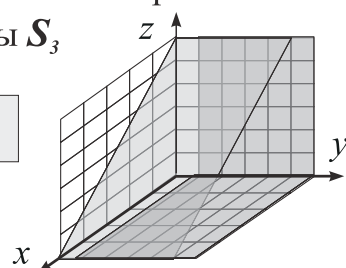
найдите
решение системы S_3

$$\begin{cases} x_0 = \\ y_0 = \\ z_0 = \end{cases}$$



ПОСМОТРИТЕ И

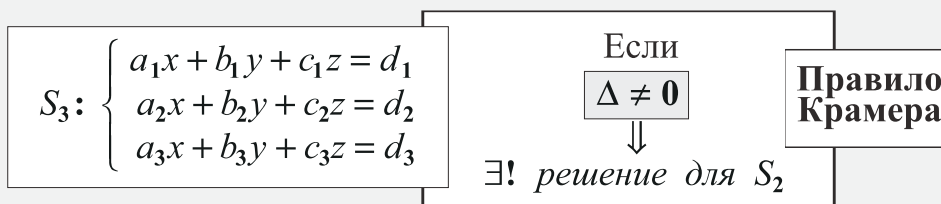
найдите
существует ли
единственное решение
системы S_3



2

Правило Крамера

10



Чтобы узнать,
имеет ли система единственное решение
нужно проверить,
равен ли нулю ее главный определитель.

Например:

По матрице системы $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 3 \end{pmatrix}$ и столбцу ее свободных членов $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
восстановите эту систему
и докажите, что она имеет единственное решение
при любых a, b и c

Решение

$\begin{cases} x = 3 \\ ax + 2y = 2 \\ bx + cy + 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow \det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

Следовательно,
данная система
имеет единственное решение
при любых a, b и c

3	МАТРИЦА	Для каждой системы				
Теорема Крамера		найдите значение ее определителей				найдите решение системы
		Δ	Δ_x	Δ_y	Δ_z	
	$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases}$					
	$\begin{cases} -x + y = 2 \\ x - y + 2 = 0 \\ 2x + y - z = -1 \end{cases}$					
	$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y + 3z = -4 \\ 2z + y = 0 \end{cases}$					
	$\begin{cases} x = -2 - 2y - 3z \\ -3z = 12 - x \\ 2y + z = 1 \end{cases}$					

Информационная схема «ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА»

*Матрица
системы
размерности
 3×3*

$$M^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

*Главный
определитель
системы
3-го порядка*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D_3$$

Элементы определителя и их миноры

a_1	$b_1 \ c_1$	$a_1 \ c_1$	$a_1 \ b_1$	c_1
$b_2 \ c_2$	a_2	b_2	$a_2 \ b_2$	$a_2 \ b_2$
$b_3 \ c_3$	$b_3 \ c_3$	$a_3 \ c_3$	c_3	$a_3 \ b_3$

Разложение определителя

*по 2-му
столбцу*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

*по 3-й
строке*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

*по 1-му
столбцу*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

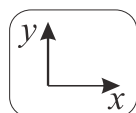
*по 2-й
строке*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Теорема Крамера

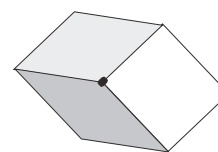
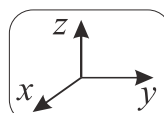
Прямые пересекаются
в одной точке



Если
 $\Delta \neq 0$

$\Downarrow$
 $\exists!$
решение
системы

Плоскости пересекаются
в одной точке



1 ПОСМОТРИТЕ И

укажите
номер свободного места
на стоянке автомобилей,
используя
принцип нумерации
элементов определителя

2 ПОСМОТРИТЕ И

найдите
значение
элемента матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$a_1 =$
 $b_2 =$
 $c_3 =$
 $b_3 =$

3 Тест	В каждом определителе найдите минор						
для заданного элемента	$\begin{vmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} * & * \\ 0 & * \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & * \end{vmatrix}$ для b_3							
$\begin{vmatrix} 0 & * & * \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{vmatrix}$ для c_1							
$\begin{vmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & * \end{vmatrix}$ для b_2							
$\begin{vmatrix} * & 0 & * \\ * & 0 & * \\ 0 & * & * \end{vmatrix}$ для c_2							

4 ПОСМОТРИТЕ И 5

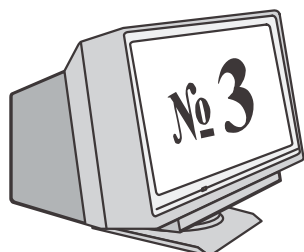
$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 99999 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$ *вычислите (устно!!!)* $\begin{vmatrix} 98765 & 0 & 0 \\ 12345 & 2 & 1 \\ 24680 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

6	Тест	По заданному минору $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$ найдите определитель для элемента			
		$\begin{vmatrix} 1 & -2 & a_3 \\ -4 & 3 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_2 & -2 \\ -4 & c_2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & -2 & b_3 \\ -4 & 3 & c_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & a_3 \\ b_3 & b_2 & b_3 \\ -4 & 3 & c_3 \end{vmatrix}$
	a_2				
	a_3				
	b_3				
	c_3				

ПОСМОТРИТЕ И			
7	$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ 0 & b_3 & 0 \end{vmatrix}$	$\square$	$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix}$
	найдите значение определителя		$\square$
			8

9	Докажите, что	
	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \delta & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & \delta & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	

10	Тест	Найдите определитель				
	равный	$\begin{vmatrix} * & 0 & 0 \\ \circ & 2 & 1 \\ \bullet & 5 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \circ & * & \bullet \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \circ & 5 & 2 \\ \bullet & 0 & 0 \\ * & 3 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & \circ & 3 \\ 3 & \bullet & 5 \\ 2 & * & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & \circ & 1 \\ 0 & \bullet & 0 \\ 5 & * & 2 \end{vmatrix}$
	*					
	○					
	●					



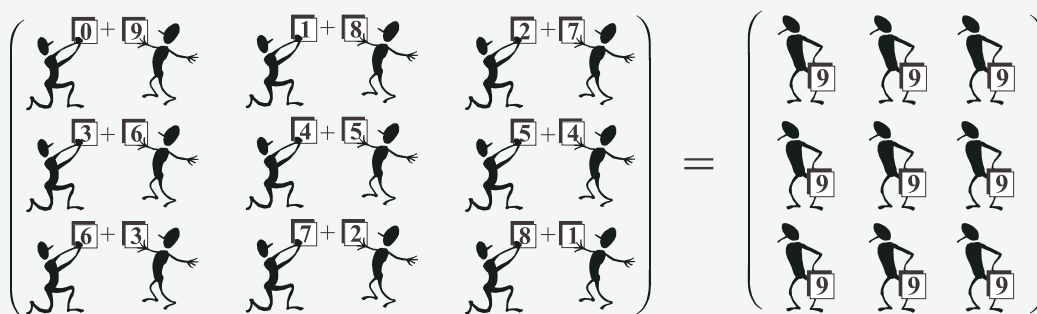
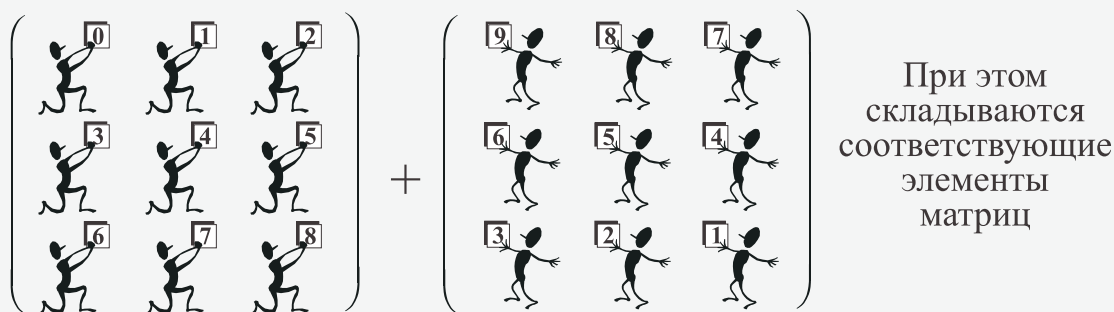
Свойства матриц и определителей

1. Сложение матриц одинаковой структуры	30
2. Умножение матрицы на число	31
3. Общий множитель в определителе 2-го порядка	32
4. Общий множитель в определителе 3-го порядка	33
5. Пропорциональность рядов определителя	34
6. Перестановка соседних рядов определителя	35
7. Сумма элементов ряда определителя	36
8. Специфика операций над определителями	37
9. Формулы Крамера	38
10. Следствия правила Крамера	39
Информационная схема «СВОЙСТВА МАТРИЦ И ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ»	40
Разные задачи	41

1

Сложение матриц одинаковой структуры

$A^{2 \times 2} + B^{2 \times 2}$ Операция сложения
осуществляется $A^{3 \times 3} + B^{3 \times 3}$
над матрицами одинаковой размерности



1

сложите
соответствующие
элементы матриц

ПОСМОТРИТЕ И

$$\begin{pmatrix} a & o \\ x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & x \\ a & o \end{pmatrix}$$

найдите
результат
сложения матриц

2

По такому же принципу для матриц одинаковой размерности осуществляется операция вычитания

3

заполните
пропуски
в решении

$$= \begin{pmatrix} \square - 1 & \square - 2 & \square - 3 \\ 6 - \square & 5 - \square & 4 - \square \\ \square - 7 & \square - \square & 1 - \square \end{pmatrix}$$

ПОСМОТРИТЕ И

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} =$$

заполните
пропуски
в результате

$$= \begin{pmatrix} \square & 6 & \square \\ 2 & \square & -2 \\ \square & -6 & \square \end{pmatrix}$$

4

Умножение матрицы на число

2

При умножении числа на матрицу
это число умножается
на каждый элемент матрицы

$$2 \cdot \begin{pmatrix} \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☺} & \text{☺} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{☹☹} & \text{☹☹} \\ \text{☺☺} & \text{☺☺} \end{pmatrix}$$

1	По матрице	найдите значения элементов новой матрицы
Т р е н а ж е р	1	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A =$
	2	$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{3}B =$
	3	$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3C =$
	4	$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ 0 & -4 & 2 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{1}{2}D =$

Операции сложения и умножения на число
называют
линейными операциями

2

$A - \frac{1}{2}B$

ПОСМОТРИТЕ И

осуществите
указанные
линейные операции
над матрицам

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}B - 2A$

3

3

Общий множитель в определителе 2-го порядка

Выражение вида

$$a_1 \cdot \lambda b_2 - \lambda b_1 \cdot a_2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda b_1 \\ a_2 & \lambda b_2 \end{vmatrix}$$

в котором
элементы одного его ряда
имеют общий множитель

можно записать
в виде определителя
2-го порядка:

Выражение вида

$$\lambda \cdot (a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

за который
выносится
общий множитель

Отсюда правило:

общий множитель ряда

$$\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{\lambda} b_1 \\ a_2 & \boxed{\lambda} b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \lambda b_2 - \lambda b_1 \cdot a_2 = \lambda \cdot (a_1 b_2 - b_1 a_2) = \boxed{\lambda} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

вносить
в определитель

выносить
за определитель

Например, вместо того, чтобы
считать:

$$\begin{vmatrix} -111 & 49 \\ -222 & 98 \end{vmatrix} = -111 \cdot 99 + 49 \cdot 222 = -10989 + 10878 = -111$$

гораздо
удобнее писать
и быстрее считать
так:

$$\begin{vmatrix} -111 & 49 \\ -222 & 98 \end{vmatrix} = -111 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 49 \\ 2 & 98 \end{vmatrix} = -111 \cdot (99 - 98) = -111$$

1 Тренажер

Найдите (устно!) значение определителя

1	$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$	2	$\begin{vmatrix} -22 & 3 \\ -44 & 5 \end{vmatrix}$	3	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -28 & -35 \end{vmatrix}$	4	$\begin{vmatrix} -24 & -3 \\ 48 & 5 \end{vmatrix}$

Иногда удобно выносить за определитель

сразу по множителю

из двух его столбцов:

$$\begin{vmatrix} 15 & 48 \\ 3 & 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{3} \cdot 5 & \boxed{24} \cdot 2 \\ \boxed{3} \cdot 1 & \boxed{24} \cdot 1 \end{vmatrix} =$$

мысленно

$$= \boxed{3} \cdot \boxed{24} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 72$$

из двух его строк:

$$\begin{vmatrix} -36 & -72 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{-36} \cdot 1 & \boxed{-36} \cdot 2 \\ \boxed{2} \cdot 2 & \boxed{2} \cdot 5 \end{vmatrix} =$$

мысленно

$$= \boxed{-36} \cdot \boxed{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -72$$

2

ПОСМОТРИТЕ И

определите,

имеет ли
система $\begin{cases} 1111x - 777y = 5 \\ 33333x + 444y = 2 \end{cases}$
единственное решение

Общий множитель в определителе 3-го порядка

4

Любой определитель 3-го порядка

можно записать в виде выражения:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{\lambda} b_1 & c_1 \\ a_2 & \boxed{\lambda} b_2 & c_2 \\ a_3 & \boxed{\lambda} b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\lambda b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \lambda b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - \lambda b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Любое выражение вида

можно записать
как определитель

$$\lambda \cdot \left(-b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \right) = \boxed{\lambda} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Отсюда правило:

общий множитель
любого ряда
можно выносить
за знак определителя
3-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \boxed{\lambda} a_2 & \boxed{\lambda} b_2 & \boxed{\lambda} c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \boxed{\lambda} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Например:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -9 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} (-3) \cdot 3 & 0 & 1 \\ (-3) \cdot 2 & 1 & 0 \\ (-3) \cdot 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{мысленно}} = (-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot \left[3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= (-3) \cdot [3 + 2 - 1] = -12$$

Иногда удобно применять свойство нуля:

любое число, умноженное на 0, дает 0.

Например:

$$\begin{vmatrix} 27 & 54 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -6 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 27 \cdot 1 & 27 \cdot 2 & 27 \cdot 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 \cdot 1 & -2 \cdot 2 & -2 \cdot 3 \end{vmatrix}}_{\text{мысленно}} = -27 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -54 \cdot 3 = -162$$

1

ПОСМОТРИТЕ И

найдите
значение
определителя

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 15 \\ 15 & 5 & 0 \\ 0 & 15 & 5 \end{vmatrix}$$

решите
уравнение

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x \\ 1 & x & 1 \\ x^2 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

2

ПОСМОТРИТЕ И

5

Пропорциональность рядов определителя

Определитель с одинаковыми рядами

$$\begin{array}{l} 1\text{-й ряд} \\ 2\text{-й ряд} \end{array} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{равен } 0 \\ \\ \end{array} = a_3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}_0 - b_3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}_0 + c_3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}_0 = 0$$

$$\begin{array}{l} 1\text{-й ряд} \\ 2\text{-й ряд} \end{array} \begin{vmatrix} a_1 & \lambda c_1 & c_1 \\ a_2 & \lambda c_2 & c_2 \\ a_3 & \lambda c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{array}{l} 1\text{-й ряд} \\ 2\text{-й ряд} \end{array} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Определитель} \\ \text{с пропорциональными рядами} \\ \text{также равен } 0 \end{array}$$

С помощью этих правил иногда

можно
устно
вычислить
значение
выражений с определителями

$$\begin{vmatrix} 13 & 0 & 26 \\ 26 & 13 & 52 \\ 39 & 26 & 78 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 11 & 17 & 19 \\ 76 & 77 & 78 \\ 76 & 77 & 78 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 13 & 0 & 13 \cdot 1 \\ 26 & 7 & 26 \cdot 2 \\ 39 & 5 & 39 \cdot 3 \end{vmatrix}}_{\substack{1 \text{ и } 3 \text{ столбцы} \\ \text{пропорциональны}}} + \underbrace{\begin{vmatrix} 11 & 17 & 19 \\ 76 & 77 & 78 \\ 76 & 77 & 78 \end{vmatrix}}_{\substack{2 \text{ и } 3 \text{ строки} \\ \text{равны}}} = 0$$

мысленно

1	Тест	Найдите пропорциональные ряды							
определителя		столбцы				строки			
		1 и 2	1 и 3	2 и 3	все	1 и 2	1 и 3	2 и 3	все
	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 3 \end{vmatrix}$								
	$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 8 & -8 & 3 \end{vmatrix}$								
	$\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ a & 3a & a \\ a & 9 & 3 \end{vmatrix}$								
	$\begin{vmatrix} c & 2c & 4c \\ 2c & 8c & 16 \\ 4c & 16 & 32 \end{vmatrix}$								
	$\begin{vmatrix} x^3 & 2x^2 & 4x \\ 4x^2 & 2x & 0 \\ 1 & x & 2x \end{vmatrix}$								

Перестановка соседних рядов определителя

Иногда для удобства вычислений
полезно
переставлять местами
соседние ряды определителя
2-го порядка:

2-й ряд 1-й ряд

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2 = -(a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2) = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

При этом
исходный определитель
меняет
знак

Это же правило
действует и для определителей
3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \cdot \begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= - \left(a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right) = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Это правило можно употреблять
для доказательства равенств определителей.

Например,
чтобы выяснить
справедливо ли равенство

$$\begin{vmatrix} a & 35 & 14 \\ 52 & 51 & a^3 \\ 21 & a^2 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 52 & 51 & a^3 \\ 21 & a^2 & 15 \\ a & 35 & 14 \end{vmatrix}$$

можно не раскрывать оба определителя,

а последовательно
поменять местами
соседние ряды
одного из них:

$$\begin{vmatrix} a & 35 & 14 \\ 52 & 51 & a^3 \\ 21 & a^2 & 15 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{перестановка}} - \begin{vmatrix} 52 & 51 & a^3 \\ a & 35 & 14 \\ 21 & a^2 & 15 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{перестановка}} \begin{vmatrix} 52 & 51 & a^3 \\ 21 & a^2 & 15 \\ a & 35 & 14 \end{vmatrix}$$

ПОСМОТРИТЕ И

1

найдите,
равны или нет

2

$$\begin{vmatrix} \text{☹} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☺} & \text{☹} \end{vmatrix}$$

эти
определители

$$\begin{vmatrix} \text{☹} & \text{☺} & \text{☹} \\ \text{☺} & \text{☹} & \text{☺} \\ \text{☹} & \text{☹} & \text{☺} \end{vmatrix}$$

эти
определители

$$\begin{vmatrix} \text{☹} & \text{☺} & \text{☹} \\ \text{☺} & \text{☹} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☹} & \text{☹} \end{vmatrix}$$

7

Сумма элементов ряда определителя

Для упрощения вычислений
используется
прием
разложения определителя

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 + \lambda & b_3 + \beta & c_3 + \gamma \end{vmatrix} =$$

по сумме элементов какого-либо его ряда.

Это возможно,
так как

$$= (a_3 + \lambda) \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - (b_3 + \beta) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + (c_3 + \gamma) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

при разложении определителя

и раскрытии
скобок
в соответствующем
порядке

$$= a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \beta \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \gamma \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

получается сумма
более простых
определителей

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda & \beta & \gamma \end{vmatrix} =$$

Например:

$$\begin{vmatrix} 123 & 1 & 0 \\ 234 & 2 & 5 \\ 345 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 1 & 0 \\ 200 & 2 & 5 \\ 300 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 20 & 1 & 0 \\ 30 & 2 & 5 \\ 40 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 100 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 10 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -50 \cdot 2 - 5 \cdot 4 = -120$$

ПОСМОТРИТЕ И

1 **вычислите,**
заполняя пропуски
в разложении определителя
на слагаемые
элементов ряда

$$\begin{vmatrix} 78 & 65 \\ 22 & 19 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 00 & 65 \\ 00 & 19 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 80 & \\ 20 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 65 \\ 2 & 19 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 00 & 60 \\ 00 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & 5 \\ & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & 60 \\ & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 80 & \\ 20 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & \\ 2 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 1000 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 100 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 100 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

Специфика операций над определителями

8

Числовой множитель можно вносить
в разные ряды определителя:

$$\boxed{\lambda} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & \lambda b_3 & \lambda c_3 \end{vmatrix}$$

Внимание!

На число λ умножаются
элементы только одного ряда

Например:

$$105 \cdot \begin{vmatrix} 17/105 & 7 & 0 \\ 13/5 & 15 & 13 \\ 17/15 & 49 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 105 \cdot 17/105 & 7 & 0 \\ 105 \cdot 13/5 & 15 & 13 \\ 105 \cdot 17/15 & 13 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 7 & 7 \cdot 0 \\ 13 \cdot 21 & 15 & 13 \\ 7 \cdot 17 & 7 \cdot 7 & 7 \cdot 1 \end{vmatrix} = 0$$

пропорциональность
1 и 3 строк

Определители, отличающиеся только одним рядом,
можно складывать:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & b_1 & c_1 \\ \beta & b_2 & c_2 \\ \gamma & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + \alpha & b_1 & c_1 \\ a_2 + \beta & b_2 & c_2 \\ a_3 + \gamma & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Внимание!

Складываются только
элементы разных рядов,
стоящие на соответствующих местах

$$\begin{vmatrix} 200 & 600 & 800 \\ 12 & 23 & 34 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 200 & 600 & 800 \\ 8 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 200 & 600 & 800 \\ 20 & 30 & 40 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

пропорциональны
1 и 2 строки

1	Докажите, что	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & k \\ x & y & z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & r & s \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m + \mathbf{k} \cdot p & n + \mathbf{k} \cdot r & k + \mathbf{k} \cdot s \\ x & y & z \end{vmatrix}$
---	------------------	---

9

Формулы Крамера

$$S_2: \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{Формулы} \\ \text{нахождения решения} \\ \text{системы линейных уравнений} \\ \text{с помощью определителей} \\ \text{называют} \end{array} \quad S_3: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$\Downarrow \quad \left(x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \quad \text{формулами Крамера} \quad \left(x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}; z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) \quad \Downarrow$$

Для того, чтобы правильно решить вопрос о существовании и количестве решений системы необходимо учитывать значения отношений дополнительных определителей системы к его главному определителю:

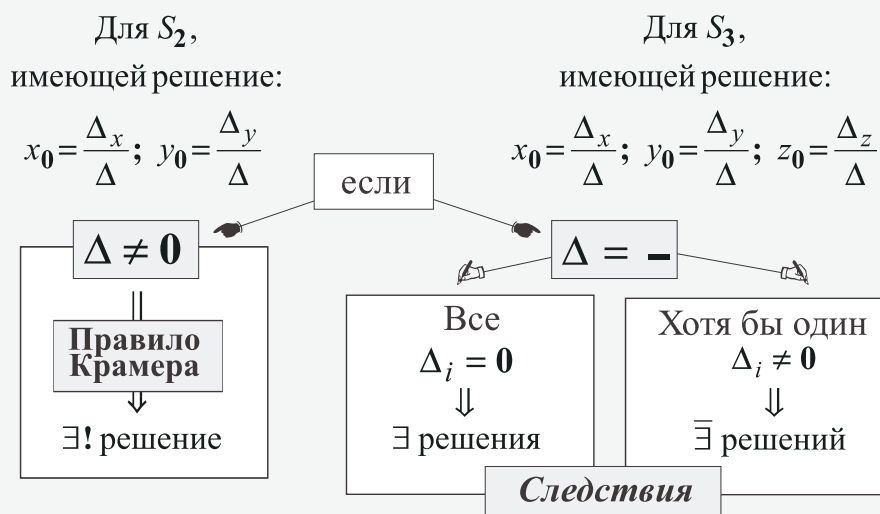
ОТНОШЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Δ	Δ_i	$\frac{\Delta_i}{\Delta}$	Логический смысл значения отношения	
$\neq 0$	$\neq 0$	$\frac{\Delta_i}{\Delta}$	<i>Решение есть и только одно</i>	$\exists!$
	0	$\frac{0}{\Delta}$		
0	0	$\frac{0}{0}$	<i>Решение есть, но не единственно</i>	$\exists$
0	$\neq 0$	$\frac{\Delta_i}{0}$	<i>Решения нет вообще</i>	$\nexists$

1	Тест	Δ	$=0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$	$=0$	$=0$	$\neq 0$
	Определите условия, при которых система S_3	Δ_x	$=0$	$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$=0$	$=0$	$\neq 0$	$\neq 0$
		Δ_y	$=0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$
		Δ_z	$=0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$	$=0$	$=0$	$=0$
	имеет единственное решение										
	имеет бесконечно много решений										
	не имеет решений										

Следствия правила Крамера

10



1 Тренажер Из фигурок ☹ ☹ ☹ ☹

составьте главный и дополнительные определители системы 2-х линейных уравнений с 2-я неизвестными так, чтобы эта система

1	не имела решения	2	имела единственное решение	3	имела бесконечно много решений
$\Delta =$	$\begin{vmatrix} \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} \end{vmatrix}$	$\Delta =$	$\begin{vmatrix} \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} \end{vmatrix}$	$\Delta =$	$\begin{vmatrix} \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} \end{vmatrix}$
$\Delta_x =$	$\begin{vmatrix} \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} \end{vmatrix}$	$\Delta_x =$	$\begin{vmatrix} \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} \end{vmatrix}$	$\Delta_x =$	$\begin{vmatrix} \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} \end{vmatrix}$
$\Delta_y =$	$\begin{vmatrix} \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} \end{vmatrix}$	$\Delta_y =$	$\begin{vmatrix} \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} \end{vmatrix}$	$\Delta_y =$	$\begin{vmatrix} \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} \end{vmatrix}$

ПОСМОТРИТЕ И

2 $\begin{cases} 9x + 2y - 5z = -3 \\ -2x + 3y + 4z = 2 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$ **определите, сколько определителей системы** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 5 \\ -x + y - z = -5 \end{cases}$ **3**

равно нулю не равно нулю

Информационная схема «СВОЙСТВА МАТРИЦ И ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ»

Линейные операции над матрицами

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+x_1 & b_1+y_1 & c_1+z_1 \\ a_2+x_2 & b_2+y_2 & c_2+z_2 \\ a_3+x_3 & b_3+y_3 & c_3+z_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 & \lambda \cdot b_1 & \lambda \cdot c_1 \\ \lambda \cdot a_2 & \lambda \cdot b_2 & \lambda \cdot c_2 \\ \lambda \cdot a_3 & \lambda \cdot b_3 & \lambda \cdot c_3 \end{pmatrix}$$

Свойства определителей

Перестановка соседних рядов

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Пропорциональность соседних рядов

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \lambda b_1 \\ a_2 & b_2 & \lambda b_2 \\ a_3 & b_3 & \lambda b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \lambda a_1 & \lambda b_1 \end{vmatrix} = 0$$

Линейные операции над определителями

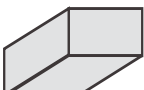
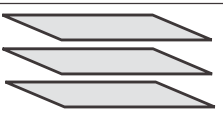
Вынесение общего множителя элементов ряда

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda b_1 & c_1 \\ a_2 & \lambda b_2 & c_2 \\ a_3 & \lambda b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Разложение на слагаемые по сумме элементов ряда

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 + \beta_1 & c_1 + \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Прямые	Формулы Крамера в решениях системы			Плоскости
	$\exists!$	$\frac{\Delta_i}{\Delta \neq 0}$	$\exists!$	
	$\exists$	для всех i : $\frac{\Delta_i = 0}{\Delta = 0}$	$\exists$	
	∞	хотя бы для одного i : $\frac{\Delta_i \neq 0}{\Delta = 0}$	∞	

1	Тест	Найдите определитель, у которого			
можно вынести множитель		$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & 1 \\ \alpha & \alpha & \gamma \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \beta \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & 1 \\ \gamma & \gamma & \gamma \\ \alpha & \alpha^2 & \beta \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \alpha^2 & 0 & \gamma \\ \alpha^3 & \beta^2 & 1 \\ \alpha^4 & \beta^3 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \alpha\beta & \alpha\gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \alpha\beta & \gamma \\ \beta\gamma & \alpha\beta & \alpha\gamma \end{vmatrix}$
α					
α^2					
β					
β^2					
γ					

2

ПОСМОТРИТЕ И

завершите
выполнение заказов
четырех пользователей так,
чтобы получилось
четыре укомплектованных ПК

$$\begin{pmatrix} \text{монитор} & \text{монитор} \\ \text{монитор} & \text{монитор} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{системный блок} & \text{системный блок} \\ \text{мышь} & \text{клавиатура} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{системный блок} & \text{монитор} \\ \text{системный блок} & \text{мышь} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{клавиатура} & \text{клавиатура} \\ \text{системный блок} & \text{монитор} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{мышь} & \text{клавиатура} \\ \text{монитор} & \text{монитор} \end{pmatrix}$$

3 Докажите, что

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

4 Докажите, что

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x \\ 1 & x & 1 \\ x^2 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

5 Докажите, что

$$\begin{vmatrix} 2x & 2x & 0 \\ 4x^2 & 0 & 4x^2 \\ 0 & 8x^3 & 8x^3 \end{vmatrix} \neq 0$$

10	Матрица	Для каждой системы уравнений составьте					
		расширенную матрицу системы	главный определитель системы	дополнительные определители системы			найдите решение системы
				D_x	D_y	D_z	
	$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - 7y = -9 \end{cases}$						
	$\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 8x - 10y = 22 \end{cases}$						
	$\begin{cases} 2x - y + 7z = -13 \\ 7x - 3y + 2z = -1 \\ x + y - 3z = 5 \end{cases}$						
	$\begin{cases} x - y + 4z = -27 \\ 5x + z = -20 \\ 9y + 6x = 6 \end{cases}$						
	$\begin{cases} 4x - y - 3z = 11 \\ 2x - 7y + 3z = -7 \\ -y - z = 1 \end{cases}$						

Использованная литература

1. Резник Н.А., Дымская А.П. Определители и матрицы: Визуальный конспект студента-технолога (учеб пособие) – Мурманск, МГТУ, 1997. – 56 с.
2. Резник Н.А. Начальные представления об определителях и матрицах: Визуальный конспект-практикум (учеб. пособие) – СПб.: "Информатизация образования", 2002. – 88 с.

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

Компьютерный набор Н.А. Резник, Н.С. Неделько
© Дизайн и графика Н.А. Резник

Утверждено к печати Редакционно-издательским Советом
Мурманского гуманитарного института Института
Лицензия ИД № 01684 от 05.05.2000г.
Подписано к печати с оригинал-макета 22.09.2003 г.
Тираж 60 экз.