ИНСТИТУТ ПРОДУКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н. Резник, Л. Негодяева

Начальные представления о дифференциальном исчислении

Визуальный конспект-практикум

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2005

Основные обозначения

N – множество натуральных чисел
Z – множество целых чисел
Q – множество рациональных чисел
R – множество действительных чисел

$\langle a;b\rangle$ – произвольный промежуток

$[a;b]$ – замкнутый промежуток (отрезок)

$(a;b)$ – открытый промежуток (интервал)

$(a;b]$ – полуоткрытый промежуток (полуинтервал)

$[a;b)$ – полуоткрытый промежуток (полуинтервал)

$\in$ – знак принадлежности множеству

$\notin$ – знак непринадлежности множеству

$\Rightarrow$ – знак логического следования

$\Leftrightarrow$ – знак равносильности

$\forall$ – квантор всеобщности
(соответствует словам "для любого", "для каждого","для всех")

$\overline{\forall}$ – отрицание квантора всеобщности
(соответствует слову "некоторый")

$\exists$ – квантор существования
(соответствует словам "существует", "найдется", "имеется")

$\overline{\exists}$ – отрицание квантора существования
(соответствует словам "нет", "не существует")

$\exists!$ – соответствует словам "существует и единственно"

$\sum$ – знак суммы

$\lim$ – знак предела

$]$ – знак, соответствующий словам "пусть", "дано"

Δ – символ приращения

$\frac{dy}{dx}$ или $f'(x)$ – символ производной

C – символ непрерывности

C' – символ непрерывности и дифференцируемости

$\to$ – соответствует слову "стремится"

$\mapsto$ – соответствует (выбран)

$\equiv$ – символ тождественного равенства

Н. Резник, Л. Негодяева

Начальные представления о дифференциальном исчислении

МУРМАНСК

2005

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

УДК 517.518.153
ББК 22.161.1

Рецензенты

С.В. Зотиков, заведующий кафедрой МА и МПМ МГПУ, кандидат физико-математических наук, доцент.
Н.В. Иванчук, кандидат педагогических наук, учитель математики лицея №1 г. Мурманска.

Научные редакторы

Н.М. Ежова, кандидат педагогических наук, доцент кафедры общественных и естественных наук МИЭП.
И.С. Темникова, аспирант МГПУ, преподаватель кафедры общенаучных дисциплин филиала БИЭПП в г. Мурманске.

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. - СПб, ЛОИРО, 2005. - 76 с.

Визуальный конспект-практикум "Начальные представления о дифференциальном исчислении" разработан для студентов 1-го курса высших учебных заведений с целью помочь им адаптироваться к учебному процессу.

В сборнике представлены некоторые теоретические положения и их практическая реализация по разделу курса математического анализа "Производная", причем основной упор сделан на формирование техники дифференцирования.

В сборнике имеется более 300 задач и упражнений различного уровня сложности. Избыточность банка задач сформирована с целью помочь обучающимся вспомнить основные положения соответствующего раздела "Алгебры и начала анализа" школьного курса математики и усвоить основные положения вузавского курса.

Конспект-практикум может оказать помощь в самостоятельных занятиях студентам дневных, вечерних и заочных отделений высших учебных заведений. Отдельные страницы и примеры пособия могут быть использованы в качестве дополнительных дидактических материалов в 10-11-х классах средних общеобразовательных школ с углубленным и расширенным изучением математики, а также в группах технических специализаций техникумов и колледжей.

Печатается в авторской редакции.

ISBN 5-88476-692-0

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

Символ и формула производной

1

Символ и формула производной

СИМВОЛ ПРИРАЩЕНИЯ И ЕГО РАСШИФРОВКА

x **аргумент**

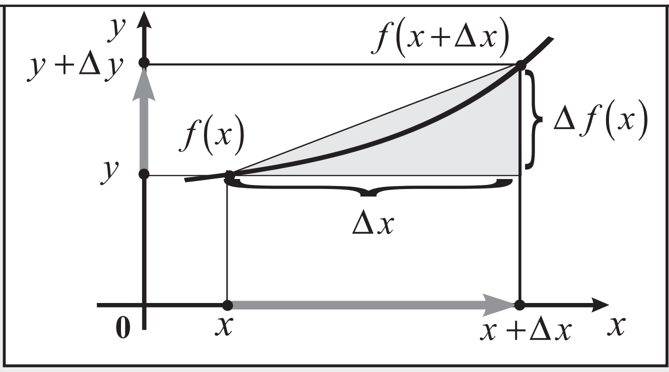
$f(x)$ **функция**

$\underbrace{\Delta}_{\text{символ приращения}}$

$$\Longrightarrow \underbrace{\Delta x}_{\text{дельта } \textit{икс}} = \underbrace{(x+\Delta x) - x}_{\text{приращение } \textit{аргумента}}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\Delta f(x)}_{\text{дельта } \textit{эф от икс}} = \underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{\text{приращение } \textit{функции}}$$

ФОРМУЛА ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИИ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ



$$y=f(x):\ x\in D(f)$$

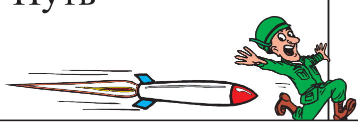
$$\Delta x:\ x+\Delta x\in D(f)$$

$$\Downarrow$$

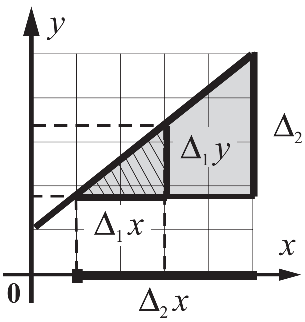
$$\overbrace{\Delta x = (x+\Delta x) - x}^{\text{приращение аргумента } x}$$

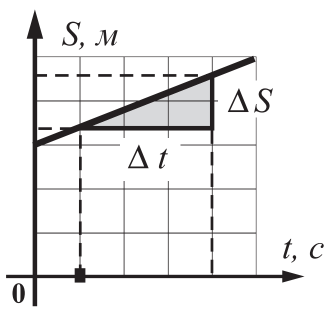
$$\Downarrow$$

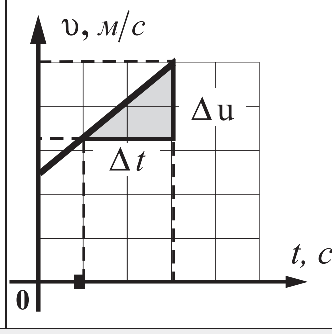
$$\underbrace{\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)}_{\text{приращение функции } f(x)}$$

Математика	Механика (кинематика прямолинейного движения)	
Линейная функция 	Путь 	Скорость равноускоренного движения

Приращения функции и приращения аргумента

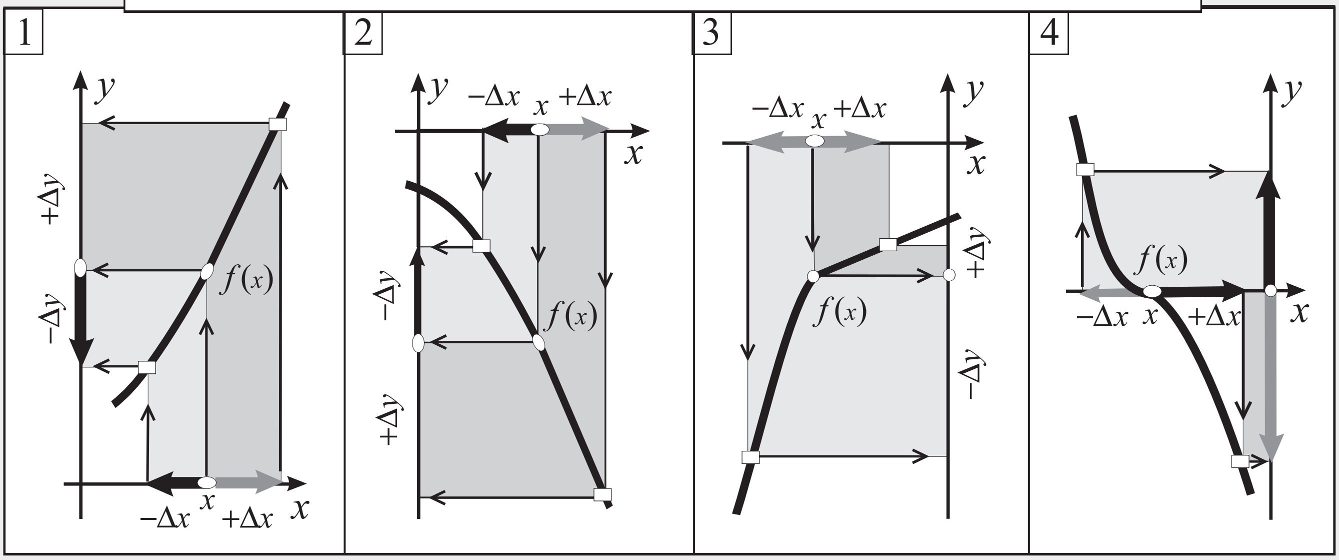






Символ и формула производной

1 Серия Для каждого приращения аргумента $\pm\Delta x$ в точке x отметьте отсутствующие изображения или обозначения в соответствующей точке y приращения $\pm\Delta y$ функции $y = f(x)$



2 Тренажер Для каждой заданной $y = f(x)$ составьте $f(x+\Delta x)$

1	2	3	4
$y = \mathbf{cos}\, x$	$y = \mathbf{3}x - \mathbf{1}$	$y = x^{\mathbf{2}}$	$y = \sqrt{x}$

3 Тренажер По заданному приращению аргумента найдите приращение заданной функции в указанной точке

1	2	3	4
$y = x$	$y = x^{\mathbf{2}}$	$y = \mathbf{1}/x$	$y = \sqrt{x}$
$x = -\mathbf{2}$	$x = -\mathbf{2}$	$x = \mathbf{2}$	$x = \mathbf{1}$
$\Delta x = -\mathbf{1}$	$\Delta x = \mathbf{2}$	$\Delta x = \mathbf{1}$	$\Delta x = \mathbf{2}$

4 Докажите, что

$$\Delta\left(x^3\right) = (x + \Delta x)\cdot \mathbf{3}x\cdot\Delta x + (\Delta x)^3$$

5 Докажите, что

$$\Delta\left(\frac{\mathbf{1}}{x}\right) = \frac{-\Delta x}{x\cdot(x+\Delta x)}$$

6 Докажите, что $\Delta \mathbf{sin}\, x = \mathbf{sin}\, x\cdot\mathbf{cos}\,\Delta x + \mathbf{cos}\, x\cdot\mathbf{sin}\,\Delta x - \mathbf{sin}\, x$

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

2

Символ и формула производной

Быстроту изменения положения тела в пространстве характеризует ***скорость движения***.

СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ

Формула $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ задает среднюю скорость (*быстроту изменения*) функции $f(x)$ на отрезке Δx

Читается: **отношение** *приращения функции к приращению аргумента*

1 Докажите, что

$$\frac{\Delta\left(x^2\right)}{\Delta x} = \mathbf{2}x + \Delta x$$

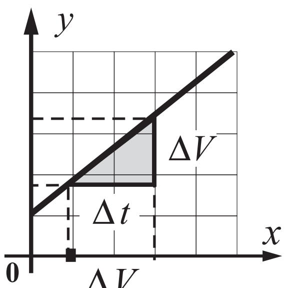
2 Докажите, что

$$\frac{\Delta\left(x^3\right)}{\Delta x} = x^2 + (x+\Delta x)\cdot(\mathbf{2}x+\Delta x)$$

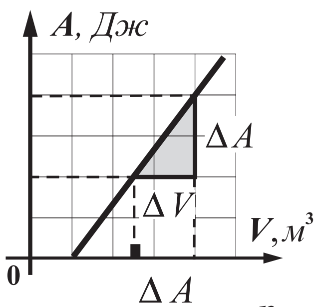
СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ (БЫСТРОТА ИЗМЕНЕНИЯ) ПАРАМЕТРА ФИЗИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Математика	Термодинамика	
Линейная функция	Работа газа	Количество теплоты

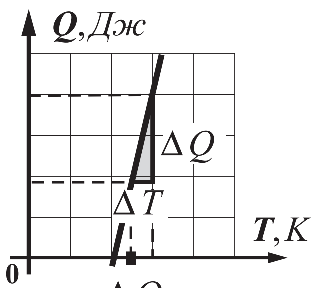
Отношение приращения функции к приращению аргумента



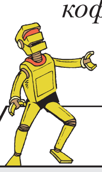
$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \underbrace{k}_{\text{угловой коффициент}}$$

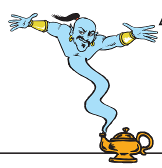


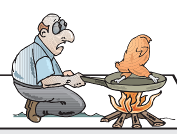
$$\frac{\Delta A}{\Delta V} = \underbrace{p}_{\text{давление газа}}$$



$$\frac{\Delta Q}{\Delta T} = \underbrace{C}_{\text{теплоемкость}}$$







Средняя скорость изменения

функции V	работы газа A	количества теплоты Q
Постоянная $k = const$	Постоянная $p = const$	Постоянная $C = const$

Символ и формула производной

3 Тест. Определите запись отношения	$\dfrac{\Delta\sin x}{\Delta x}$	$\dfrac{\Delta\sin x}{x}$	$\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}$	$\dfrac{\sin x}{\Delta x}$	$\dfrac{\sin\Delta x}{x}$	$\dfrac{\sin x}{x}$
синуса от x к аргументу x						
приращения синуса от x к аргументу x						
приращения синуса от x к приращению аргумента x						
синуса от приращения x к аргументу x						
синуса от x к приращению аргумента x						

4 Докажите, что

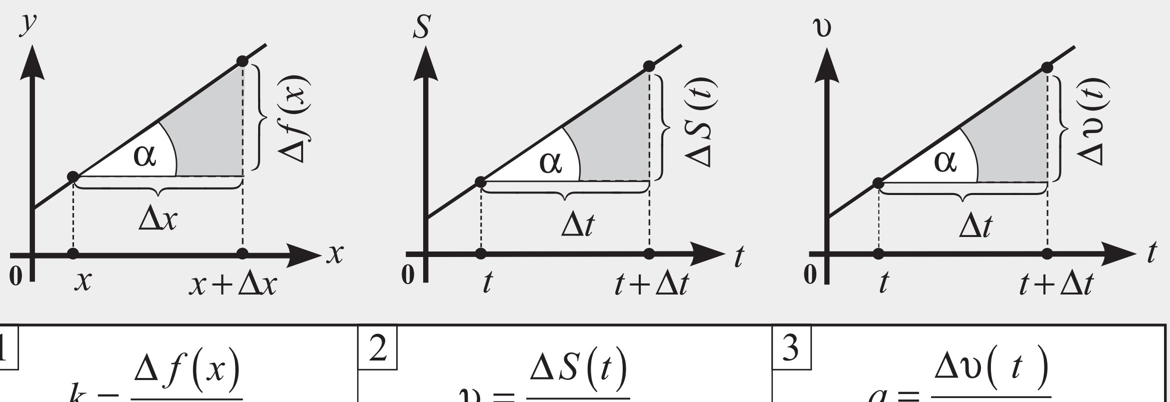
$$\frac{\Delta\cos x}{\Delta x}=\cos x\cdot\frac{(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}-\sin x\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$$

5 Докажите, что

$$\frac{\Delta\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

6 **ПОСМОТРИТЕ И** ***определите*** для заданного отношения соответствующий математический или физический термин

1	2	3
$\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=k$	$\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=\upsilon$	$\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t}=a$



1	2	3
$k=\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$	$\upsilon=\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}$	$a=\dfrac{\Delta\upsilon(t)}{\Delta t}$

7 **ПОСМОТРИТЕ И** ***составьте*** полную словесную интерпретацию (математическую или физическую) заданного соотношения

3

Символ и формула производной

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ

приращение аргумента

$$\Delta x = x - x_o$$

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_o)$$

приращение функции

Если

$$\text{из } \Delta x \to \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \to \underbrace{f'(x)}_{\text{производная функции } f(x) \text{ в } (\cdot)\, x}$$

то пишут: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$,

и говорят:

$$\overbrace{f'(x)}^{\text{Производной функции } f \text{ в } (\cdot)\, x} \overset{\text{называется}}{=} \overbrace{\lim_{\underbrace{\Delta x \to 0}_{\text{когда } \Delta x \text{ стремится к } 0}}}^{\text{предел}} \overbrace{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}}^{\text{отношения приращения функции } f \text{ в } (\cdot)\, x \text{ к приращению аргумента } \Delta x}$$

Физики трактуют
понятие производной
как мгновенную скорость тела,
характеризующую
быстроту его движения
в заданной точке в данный момент времени.

ОБОЗНАЧЕНИЕ И ЧТЕНИЕ СИМВОЛА ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ

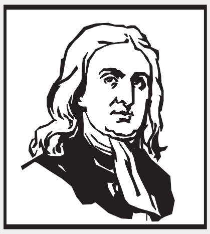
Лагранж

$$\underbrace{y'}_{y \text{ штрих}} = \underbrace{f'(x)}_{f \text{ штрих от } x}$$

Лейбниц

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{дэ } y \text{ по дэ } x} = \underbrace{\frac{d}{dx} f(x)}_{\text{дэ } f(x) \text{ по дэ } x}$$

употребляются повсеместно



Ньютон

$$\dot{y} = \dot{f}(x)$$

используется
в механике

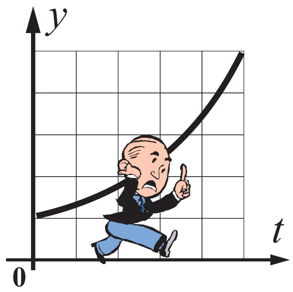
Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

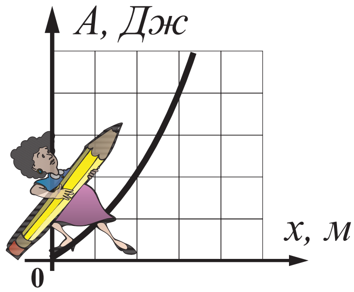
Символ и формула производной

1 **ПОСМОТРИТЕ И** ***определите***
от чего зависит

1 скорость изменения функции $y(t)$	2 сила $F(x)$	3 мощность $N(t)$

Математика	Механика
Нелинейная функция	Механическая работа





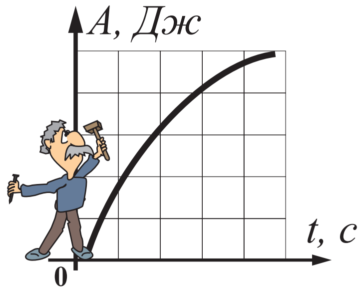


График нелинейного физического процесса

2 Тренажер Вставьте пропущенные слова для завершения определения

1	2	3
Производная функции y по аргументу t – это быстрота изменения ______ с изменением аргумента	*Сила – это производная работы по координате* (быстрота изменения ______ с изменением координаты)	*Мощность – это производная работы* ______ (быстрота изменения совершенной работы с изменением времени)

3 Тренажер Запишите в обозначениях Лагранжа и Лейбница формулу мгновенной скорости изменения в заданной точке

1 функции $y(x)$	2 силы $F(t)$	3 мощности $N(t)$

4

Символ и формула производной

ОПЕРАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

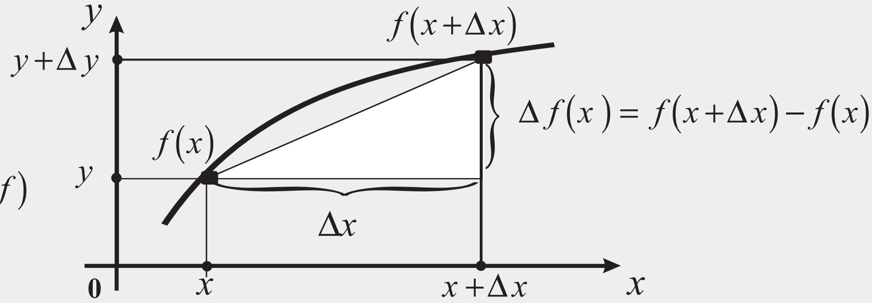
Операция нахождения производной называется дифференцированием

$$\underbrace{\left[f(x)\right]'}_{\text{дифференцирование}} = \underbrace{f'(x)}_{\text{нахождение производной}}$$

ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ, УДОБНАЯ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

$f(x):\ x \in D(f)$

$\Delta x:\ x+\Delta x \in D(f)$



$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ПОСТОЯННОЙ

$$\rbrack\ f(x) = \underbrace{\mathbf{c}}_{const}\ \forall x \in \langle a; b\rangle \ \Rightarrow\ f'(x) = \mathbf{c}' = \mathbf{0}\ \forall x \in \langle a; b\rangle$$

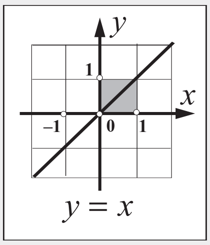
Производная числа равна нулю

Доказательство

$$\rbrack\ f(x) = \mathbf{c}\ \forall x \in \langle a; b\rangle \ \Rightarrow\ \boxed{\mathbf{c}'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{\Delta \mathbf{c}}^{\Delta f(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{\mathbf{c}}^{f(x+\Delta x)} - \overbrace{\mathbf{c}}^{f(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{0} = \boxed{\mathbf{0}}$$

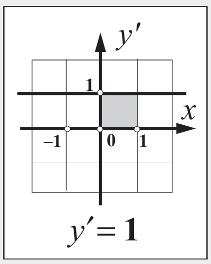
ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x) = x$



$$\boxed{(x)'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} =$$

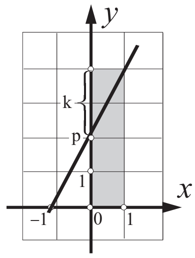
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = \boxed{1}$$



Символ и формула производной

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x)=\mathbf{k}\,x+\mathbf{p}$



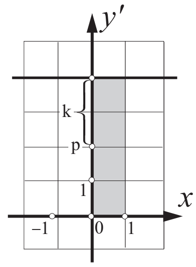
$y=\mathbf{k}\,x+\mathbf{p}$

$$\boxed{(\mathbf{k}\,x+\mathbf{p})'}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(\mathbf{k}\,x+\mathbf{p})}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[\mathbf{k}(x+\Delta x)+\mathbf{p}\right]-\left[\boxed{\quad\quad}\right]}{\Delta x}=$$

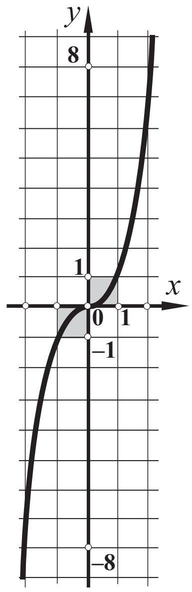
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\quad\quad}+\mathbf{p}-\boxed{\quad\quad}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{k}\cdot\Delta x}{\Delta x}=\boxed{\mathbf{k}}$$



$y'=\mathbf{k}$

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x)=x^3$



$y=x^3$

$$\boxed{\left(x^3\right)'}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\boxed{\quad\quad}\right)^3-x^3}{\Delta x}=\left(\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right)=$$ *необходимы преобразования*

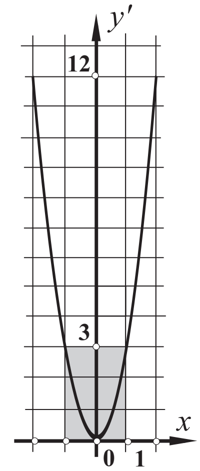
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}-x^3}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\boxed{\quad\quad}}{\Delta x}+\frac{\boxed{\quad\quad}}{\Delta x}+\frac{\boxed{\quad\quad}}{\Delta x}\right]=\boxed{\quad}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}3x^2+\lim_{\Delta x\to 0}(3x\cdot\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2=$$

$$=3\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}x^2}_{\substack{x^2=const\\(\cdot)\,x}}+3\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}x}_{\substack{x=const\\(\cdot)\,x}}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x}_{\boxed{\quad}}+\Big(\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x}_{\boxed{\quad}}\Big)^2=$$

$$=\boxed{3\cdot x^2}$$

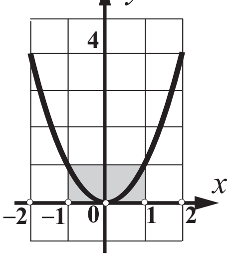


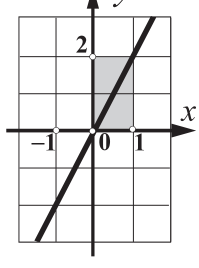
$y'=3x^2$

1 Тренажер		
Найдите производную	1	$(1)'$
	2	$(2x)'$
	3	$(x-3)'$
	4	$(4x-5)'$

2 Докажите, что

если $y=x^2$, то $y'=2x$

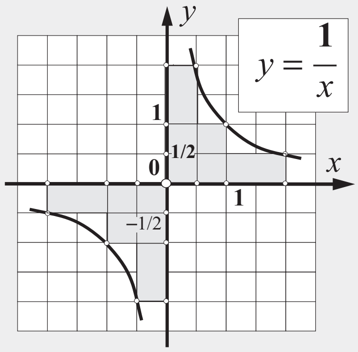




5

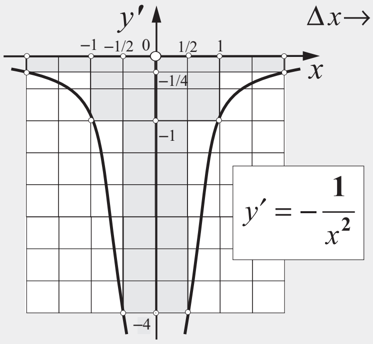
Символ и формула производной

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x)=\dfrac{1}{x}$



$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$ *необходимы преобразования*

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\boxed{\qquad\qquad}}{x\cdot(x+\Delta x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\qquad}}{\Delta x\cdot x\cdot(x+\Delta x)}=$$



$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\qquad}}{x\cdot(x+\Delta x)}=$$

$$=-\frac{1}{\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} x}_{x}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}(x+\Delta x)}_{\boxed{\qquad}}}=\boxed{-\frac{1}{x^2}}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+\Delta x)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\Delta x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$ *необходимы преобразования*

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{x^2-\left[\boxed{\qquad\qquad\qquad}\right]}{(x+\Delta x)^2\cdot x^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\qquad\qquad\qquad}}{\Delta x\cdot(x+\Delta x)^2\cdot x^2}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\left(\boxed{\qquad\quad}\right)}{\Delta x\cdot(x+\Delta x)^2\cdot x^2}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\qquad}}{(x+\Delta x)^2\cdot x^2}=$$

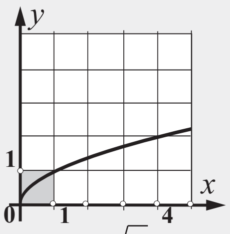
$$=-\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(x+\Delta x)^2\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}x^2}=$$

$$=\ -\frac{\boxed{\quad}}{x^2\cdot x^2}\ =\ \boxed{-\frac{2}{x^3}}$$

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

Символ и формула производной

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x)=\sqrt{x}$



$y=\sqrt{x}$

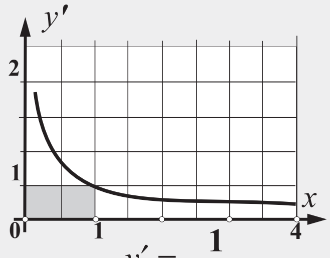
$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)'}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\left(\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right)=$$ *необходимы преобразования*

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\qquad\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\qquad\qquad}}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\underbrace{\frac{\boxed{\qquad}}{\Delta x}}_{\boxed{\quad}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$



$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\Delta x}=\left(\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right)=$$ *необходимы преобразования*

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\boxed{\qquad\qquad}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\Delta x}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\qquad\qquad}}{\Delta x\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\Delta x}}=\left(\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right)=$$ *необходимы преобразования*

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\boxed{\qquad\qquad}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}\right)}{\Delta x\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\qquad\qquad}}{\Delta x\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}\right)}=$$

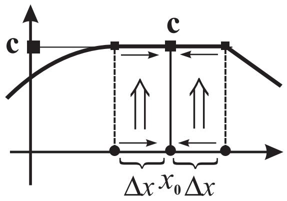
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\qquad}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}\right)}=$$

$$=\frac{\boxed{\quad}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)}=\boxed{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}}$$

6

Символ и формула производной

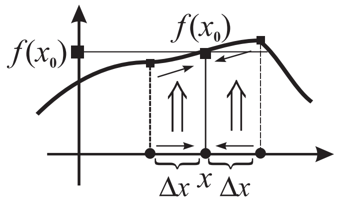
ПОЛЕЗНЫЕ ПРЕДЕЛЫ



$$\lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{c} = \underbrace{\mathbf{c}}_{\text{число}}$$

Предел числа равен числу

если существует предел!



$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{число}}$$

Значение функции в заданной точке есть число

ПРОИЗВОДНАЯ СИНУСА

$$\rbrack\, f(x) = \sin x \ \forall\, x \in R$$

$$\boxed{(\sin x)'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \text{необходимы преобразования}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos \Delta x + \cos x \cdot \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin x \cdot \boxed{}}{\Delta x} + \cos x \cdot \frac{\boxed{}}{\Delta x} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\sin x \cdot \frac{2\sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} + \cos x \cdot \frac{\boxed{}}{\Delta x} \right] =$$

$$= -\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \sin x}_{\sin x} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}_{\boxed{}} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \boxed{}}_{0} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \cos x}_{\cos x} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boxed{}}{\Delta x}}_{\boxed{}} =$$

$$= \boxed{\cos x}$$

Символ и формула производной

1 Докажите, что

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

2 Докажите, что

$$2\cdot\frac{d(\sin x)}{dx}\cdot\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin 2x$$

Вместо слов
«значение производной функции $f(x)$ в заданной точке $x = a$»
можно писать

$$\left[f(x)\right]'_{|x=\mathbf{a}} = f'(\mathbf{a})$$

Пример

Найдем
значение производной функции $2\sqrt{3}(\sin x)'$ в $(\cdot)\ x = \frac{\pi}{3}$

Решение

$$2\sqrt{3}(\sin x)'_{|x=\pi/3} = \underbrace{2\sqrt{3}(\sin x)'_{|x=\pi/3}}_{\text{мысленно}} = 2\sqrt{3}\left(\cos x_{|x=\pi/3}\right) =$$

$$= \underbrace{2\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}}_{\text{мысленно}} = 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

3 Тест. Вычислите значение производной функции

в заданной точке	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	2
$2\cdot(\sin x)'_{\mid x=\pi/4}$										
$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x)'_{\mid x=3\pi/4}$										
$-\frac{(\cos x)'_{\mid x=5\pi/4}}{2\sqrt{2}}$										
$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x)'_{\mid x=-\pi/4}$										

4 Докажите, что

$$\left[(\sin x)'\right]' = -\sin x$$

5 Докажите, что

$$\left[(\cos x)'\right]' = -\cos x$$

7

Символ и формула производной

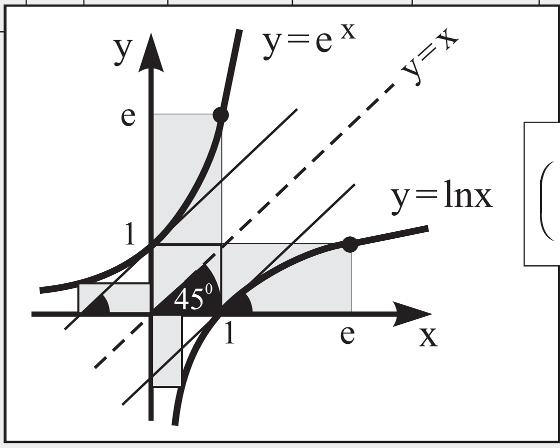
НАТУРАЛЬНЫЕ ЭКСПОНЕНТА И ЛОГАРИФМ

Число	x	1	2	10	100	1000	10000	100000	…
Вычисления с помощью калькулятора	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2	2,25	2,5937	2,7048	2,7169	2,7181	2,71825	…

⇓

Число e

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \underset{x\to\infty}{\to} \mathbf{e}: \ 2<\mathbf{e}<3$$



ПРОИЗВОДНАЯ ЭКСПОНЕНТЫ

С НАТУРАЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ		С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ
$\Delta\left(\mathbf{e}^x\right)= \mathbf{e}^{x+\Delta x}-\mathbf{e}^x = \mathbf{e}^x\cdot\mathbf{e}^{\Delta x}-\boxed{} = \mathbf{e}^x\cdot\left(\mathbf{e}^{\Delta x}-1\right)$	1	$\Delta\left(\mathbf{a}^x\right)= \mathbf{a}^{x+\Delta x}-\mathbf{a}^x = \boxed{}-\mathbf{a}^x = \mathbf{a}^x\cdot\left(\mathbf{a}^{\Delta x}-1\right)$
$\frac{\Delta\left(\mathbf{e}^x\right)}{\Delta x}=\frac{\mathbf{e}^x\cdot\left(\mathbf{e}^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=\boxed{}\cdot\frac{\left(\mathbf{e}^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}$	2	$\frac{\Delta\left(\mathbf{a}^x\right)}{\Delta x}=\frac{\mathbf{a}^x\cdot\left(\mathbf{a}^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=\boxed{}\cdot\frac{\left(\mathbf{a}^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}$
$\boxed{\left(\mathbf{e}^x\right)'} = \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\mathbf{e}^x}_{\mathbf{e}^x}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{\ln \mathbf{e}=1} = \boxed{\mathbf{e}^x}$	3	$\boxed{\left(\mathbf{a}^x\right)'} = \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\mathbf{a}^x}_{\mathbf{a}^x}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{a}^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{\ln \mathbf{a}} = \boxed{\mathbf{a}^x\cdot\ln\mathbf{a}}$

Символ и формула производной

1 Тренажер — Найдите производную

1	2	3	4
$\dfrac{d\left(\mathbf{2}^x\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\mathbf{4}^x\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\mathbf{27}^x\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\mathbf{625}^x\right)}{dx}$

2 Серия — Упростите выражение

1	2	3	4
$\left(\mathbf{e}^x\right)' + (\mathbf{e})'$	$\left(\mathbf{2}^x\right)' \cdot \left(x^2\right)'$	$\dfrac{\left(\mathbf{e}^4\right)'}{\left(\mathbf{4}^x\right)'}$	$\left(\sqrt{\mathbf{2}}^x\right)' - \left(\sqrt{x}\right)'$

3 Докажите, что

$$\frac{\mathbf{e}^x}{\left(\mathbf{e}^x\right)'} = \frac{\left(\mathbf{e}^x\right)'}{\mathbf{e}^x}$$

4 Докажите, что

$$\frac{\left(\mathbf{a}^x\right)'}{\mathbf{a}^x} \neq \frac{\mathbf{a}^x}{\left(\mathbf{a}^x\right)'}$$

5 Тест — Определите значение выражения

выражения	0	1	$\mathbf{a}$	$\dfrac{1}{\mathbf{a}}$	$\mathbf{a}^x$	$\dfrac{1}{\mathbf{a}^x}$	$\ln \mathbf{a}$	$\dfrac{1}{\ln \mathbf{a}}$	$\dfrac{\mathbf{a}^x}{\ln \mathbf{a}}$	$\dfrac{\ln \mathbf{a}}{\mathbf{a}^x}$
$\dfrac{\left(\mathbf{a}^x\right)'}{\ln \mathbf{a}}$										
$\dfrac{\mathbf{a}^x \ln \mathbf{a}}{\left(\mathbf{a}^x\right)'}$										
$\dfrac{\ln \mathbf{a}}{\left(\mathbf{a}^x\right)'}$										
$\dfrac{\left(\mathbf{a}^x\right)'}{\mathbf{a}^x}$										
$\dfrac{(\mathbf{a})'}{\left(\mathbf{a}^x\right)'}$										

8

Символ и формула производной

СПИСОК ПРОСТЕЙШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

$$(\mathbf{c})' = 0 \qquad (\mathbf{k}x + \mathbf{p})' = \mathbf{k}$$

$$(x)' = 1 \qquad (x^2)' = 2x \qquad (x^3)' = 3x^2$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$(\mathbf{e}^x)' = \mathbf{e}^x \qquad (\mathbf{a}^x)' = \mathbf{a}^x \cdot \ln \mathbf{a}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

Пример Найдем действительные решения уравнения

$$(x^3)' - (x^2)' + (5x)' = \frac{2}{3}(x^3)' + \frac{3}{2}(x^2)' - (5x+1)'$$

Р е ш е н и е

$$\frac{1}{3}(x^3)' - \frac{5}{2}(x^2)' + (5x)' + (5x+1)' = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{3}\cdot 3x^2 - \frac{5}{2}\cdot 2x + 5 + 5}_{\text{мысленно}} = 0$$

$$x^2 - 5x + 10 = 0$$

Так как $D = 25 - 40 < 0$, то действительных решений нет

1 Тест Решите уравнение	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$2\cdot(x^2)' - (x)' = (1)'$							
$(x^2)' = (2x-1)'$							
$2\cdot(x^2)' = (x+1)'$							
$(2x+2)' = -2\cdot(x^2)'$							
$(-x^2)' = (2-x)'$							

2 Докажите, что

$$x\cdot\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

3 Докажите, что

$$x\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Символ и формула производной

4 Тренажер **5**

Составьте таблицу, позволяющую

по заданной функции найти ее производную

$f(x)$ ☞	$f'(x)$
$\mathbf{c}$	$\mathbf{0}$
x	
x^3	
$\mathbf{a}^x$	
$\sqrt{x}$	
$\dfrac{1}{x}$	
$\cos x$	

по предложенной производной восстановить исходную функцию

$f(x)$ ☜	$f'(x)$
$\mathbf{k}x+\mathbf{p}$	$\mathbf{k}$
	$2x$
	$\mathbf{e}^x$
	$-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
	$-\dfrac{2}{x^3}$
	$-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$
	$\cos x$

6 Докажите, что

$$\frac{(3^x)'}{(\mathbf{e}^x)'}=\left(\frac{3}{\mathbf{e}}\right)^x\cdot\ln 3$$

7 Докажите, что

$$\left\langle\left\{\left[\left(x^3\right)'\right]'\right\}'\right\rangle'=0$$

9 Докажите, что

$$4x\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'}{\sqrt{x}}$$

10 Докажите, что

$$\frac{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)'-\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'}=2x$$

8 Докажите, что

если $f(x)=\dfrac{1}{x}$, то $f'(-2)=f'(2)$

9

Символ и формула производной

ВЫНЕСЕНИЕ ЧИСЛА ЗА ЗНАК ПРОИЗВОДНОЙ

$$\left.\begin{matrix} \exists f'(x)\ \forall x \in \langle a; b\rangle \\ \mathbf{c} - \forall\, const \end{matrix}\right] \Rightarrow \left[c \cdot f(x)\right]' = c \cdot f'(x)\ \forall x \in \langle a; b\rangle$$

Число выносится за знак производной

Доказательство

$$\left.\begin{matrix} \exists f'(x)\ \forall x \in \langle a; b\rangle \\ \mathbf{c} - \forall\, const \end{matrix}\right] \Rightarrow \boxed{\left[\mathbf{c} \cdot f(x)\right]'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\left[\mathbf{c} \cdot f(x)\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{c} \cdot f(x+\Delta x) - \mathbf{c} \cdot f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\mathbf{c} \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{c}}_{\mathbf{c}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \mathbf{c} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \boxed{\mathbf{c} \cdot f'(x)}$$

Пример

$$\left[\mathbf{1}\right]' + \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right]' + \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right]' + \left[x\right]' + \left[\frac{x^2}{\mathbf{2}}\right]' + \left[\frac{x^3}{\mathbf{3}}\right]' =$$

$$= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \underbrace{(x)' + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(x^2\right)' + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\left(x^3\right)'}_{\text{мысленно}} =$$

$$= \mathbf{1} + x + x^{\mathbf{2}}$$

1 Докажите, что

если

$$\left.\begin{matrix} \exists f'(x)\ \forall x \in \langle a; b\rangle \\ \mathbf{c} - \forall\, const \end{matrix}\right] \Rightarrow \mathbf{c} \cdot f'(x) = \left[\mathbf{c} \cdot f(x)\right]'\ \forall x \in \langle a; b\rangle$$

Число можно вносить под знак производной

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

Символ и формула производной

2 Тест Найдите производную	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{\sqrt{x}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x\sqrt{x}}$	$-\frac{\sqrt{x}}{x}$	$-\frac{1}{x^3}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\left(-\frac{1}{x}\right)'$								
$\left(\frac{1}{2x^2}\right)'$								
$\left(2\sqrt{x}\right)'$								
$\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)'$								

3 Тренажер	Найдите производную		
1 $(50\cos x)'$	2 $\left(\frac{x^3}{3}\right)'$	3 $\left(\frac{3^x}{\ln 3}\right)'$	4 $\left(\frac{\sin x}{4\sqrt{3}}\right)'$

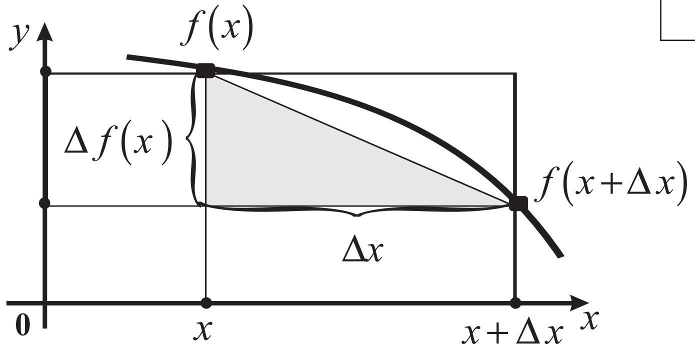
4 Тест Определите, при каких значениях x

производная функции $f(x)=\frac{x^3}{3}$ равна	*нет решения*	-4	-2	$-\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4
$f'(x)=-1$												
$f'(x)=0$												
$f'(x)=2$												
$f'(x)=\frac{1}{4}$												
$f'(x)=16$												

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

Информационная схема
«СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ»

$$\overbrace{\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)}^{\text{приращение функции } f(x)}$$



$$\underbrace{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}}_{\substack{\text{средняя скорость}\\ \text{изменения}\\ \text{функции } f(x)\\ \text{на промежутке } \Delta x}}$$

$$\underbrace{\Delta x = (x+\Delta x) - x}_{\text{приращение аргумента } x}$$

$$f'(x) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{\substack{\text{производная функции } f(x)\\ \text{в точке } x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$\underbrace{\left[f(x)\right]'_{|x=\mathbf{a}} = f'(\mathbf{a})}_{\substack{\text{значение производной } f(x)\\ \text{в точке } \mathbf{a}}}$$

$$(\mathbf{k})' = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{k}x)' = \mathbf{k}$$
$$(\mathbf{k}x+\mathbf{p})' = \mathbf{k}$$

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{x}\right)' = -\frac{\mathbf{1}}{x^2}$$
$$\left(\frac{\mathbf{1}}{x^2}\right)' = -\frac{\mathbf{2}}{x^3}$$

$$(\mathbf{e}^x)' = \mathbf{e}^x$$
$$(\mathbf{a}^x)' = \mathbf{a}^x \cdot \ln \mathbf{a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\left[\mathbf{c} \cdot f(x)\right]' = \mathbf{c} \cdot f'(x)$$

$$(x)' = x$$
$$(x^2)' = 2x$$
$$(x^3)' = 3x^2$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

Символ и формула производной

Разные задачи

1 Тренажер Составьте для заданной функции формулу $f(x+\Delta x)-f(x)$

1	2	3	4
$y=\frac{x}{2}$	$y=\sqrt{2}\cos x$	$y=\frac{e}{x}$	$y=\frac{2^x}{\ln 2}$

2 Тест Вычислите приращение функции в точке $x=2$, соответствующее приращению аргумента

$\Delta x=-\frac{1}{2}$, если	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{7}{36}$	$-\frac{7}{36}$	$\frac{37}{8}$	$-\frac{37}{8}$	$\frac{32}{9}$	$-\frac{32}{9}$
$f(x)=x$												
$f(x)=x^2$												
$f(x)=x^3$												
$f(x)=\frac{1}{x}$												
$f(x)=\frac{1}{x^2}$												

3 Тренажер Упростите задание функции и составьте формулу $f(x+\Delta x)-f(x)$

1	2	3	4
$y=\frac{x}{\sqrt{x^3}}$	$y=\frac{\sin x}{\cos 2\pi}$	$y=\frac{e^x\log_2 4}{2}$	$y=\frac{2^x\log_2 8}{2}$

4 Тренажер Упростите и найдите сумму производных

1	2	3	4
$\left(e^x\right)'+\left(2^e\right)'$	$\left(e^3\right)'+\left(3^x\right)'$	$\left(\frac{4^{-1}}{4^{-x-1}}\right)'-\left(\frac{e^{x+1}}{e}\right)'$	$\left(\frac{5^x}{\ln 5}\right)'-\left(\frac{e^x}{5}\right)'$

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

Символ и формула производной

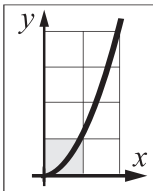
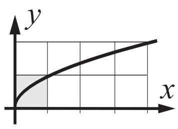
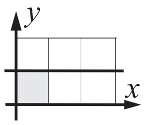
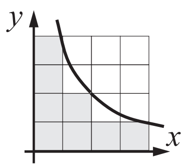
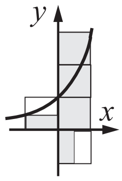
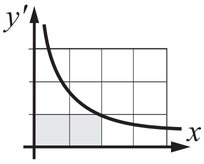
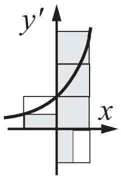
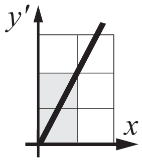
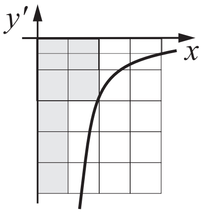
5 Докажите, что

$$\left[\left(\sin x\right)'\right]^2+\left[\left(\cos x\right)'\right]^2=1$$

6 Докажите, что

$$1-\cos 2x=2\cdot\left[\left(\cos x\right)'\right]^2$$

7 Тест Определите эскиз графика функции

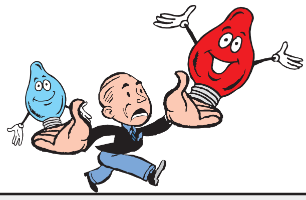
по эскизу графика ее производной					
					
					
					
					

8 Решите задачу

9 Решите задачу

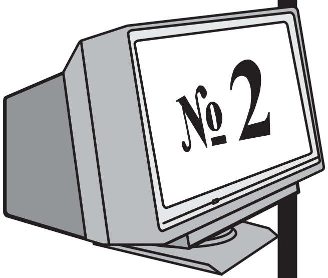
Допустим, что величина заряда I, протекающего через сечение проводника, меняется со временем по закону $q=3t^2$.

Найдите $I(t)$.



Определите, моменты времени в которых $I(t)=0$.

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

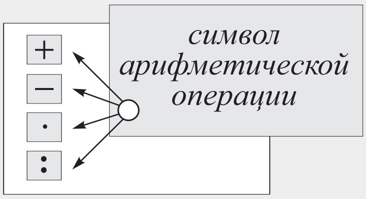


Правила дифференцирования

1

Правила дифференцирования

ПРИРАЩЕНИЯ СУММЫ И РАЗНОСТИ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО

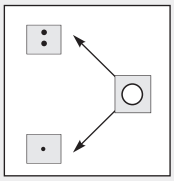


$$\Delta\left[f(x)\circ g(x)\right]=\left[f(x+\Delta x)\circ g(x+\Delta x)\right]-\left[f(x)\circ g(x)\right]$$

Пример

$$\Delta\left[\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right]=\left[\frac{\sqrt{x+\Delta x}}{(x+\Delta x)^2}\right]-\left[\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right]$$

$$\Delta\left[\sin x\cdot\frac{1}{x}\right]=\left[\sin(x+\Delta x)\cdot\frac{1}{x+\Delta x}\right]-\left[\sin x\cdot\frac{1}{x}\right]$$



УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ ПРИРАЩЕНИЙ ФУНКЦИЙ

Приращения
суммы и разности, произведения и частного двух функций
$\Delta\left[u(x)\circ v(x)\right]$
можно рассматривать
только при условиях:

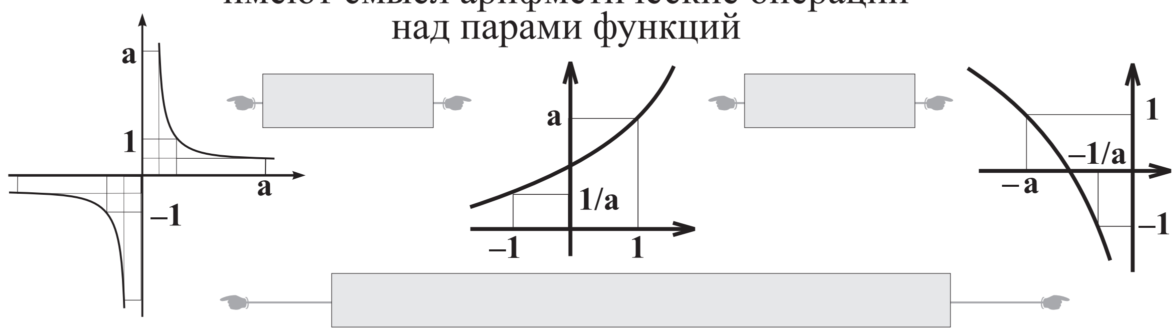
$u(x), v(x): x\in[a;b]$ — обе функции заданы на одном и том же промежутке

и

$\Delta x: (x+\Delta x)\in[a;b]$ — приращение аргумента достаточно мало (не выводит точку $x+\Delta x$ за переделы этого промежутка)

1 ПОСМОТРИТЕ И

определите:
на каком промежутке
имеют смысл арифметические операции
над парами функций



Правила дифференцирования

2 Тренажер

Составьте формулу

$$\Delta\left[f(x)\circ g(x)\right]=\left[\ f(x+\Delta x)\circ g(x+\Delta x)\right]-\left[f(x)\circ g(x)\right]$$

для функций

1	2	3	4
$x+\cos x$	$2x-\dfrac{1}{x}$	$2^x\cdot\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{\sin x}{2x-1}$

3 Докажите, что

$\forall\ u(x), v(x): x\in[a;b]$

$\Delta x:(x+\Delta x)\in[a;b]$

всегда $\Delta\left[u(x)\pm v(x)\right]=\Delta u(x)\pm\Delta v(x)$

4 Докажите, что

$\forall\ u(x), v(x): x\in[a;b]$

$\Delta x:(x+\Delta x)\in[a;b]$

всегда $\Delta\left[u(x)\cdot v(x)\right]\neq\Delta u(x)\cdot\Delta v(x)$

5 Докажите, что

$\forall\ u(x), v(x): x\in[a;b]$

$\Delta x:(x+\Delta x)\in[a;b]$

$v(x)\not\equiv 0$

всегда $\Delta\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]\neq\dfrac{\Delta u(x)}{\Delta v(x)}$

$\boxed{}$ ***определите***

обязательное, но отсутствующее условие

6 **ПОСМОТРИТЕ И**

7 Докажите, что

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\neq\Delta\frac{f(x)}{x}$$

8 Докажите, что

$$\frac{\Delta\left(\dfrac{1}{x}+x\right)}{\Delta x}=1-\frac{1}{x(x+\Delta x)}$$

9 Докажите, что

$$\frac{\Delta\left(2^x\right)}{\Delta\left(e^x\right)}=\left(\frac{2}{e}\right)^x\cdot\frac{2^{\Delta x}-1}{e^{\Delta x}-1}$$

2

Правила дифференцирования

ПРОИЗВОДНАЯ СУММЫ

Если $\exists$ u' и v' на $\langle a;\, b\rangle$, то $\exists$ $(u+v)'$ на $\langle a;\, b\rangle$:

$$\underbrace{\left[u(x)+v(x)\right]'}_{\textit{Производная суммы}} \underbrace{=}_{\textit{равна}} \underbrace{u'(x)+v'(x)}_{\textit{сумме производных}}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

1 Проанализируем, существует ли $(u+v)'$ на $\langle a;\, b\rangle$:

$] \; u, v \in \underbrace{C'\langle a;b\rangle}_{\substack{\textit{дифференцируемы}\\ \textit{на } \langle a;b\rangle}}$

$\Downarrow$

Если для $x \underbrace{\mapsto}_{\textit{выбрано}} \Delta x$, то $\begin{matrix} \text{для } u & \mapsto & \Delta u \\ & \textit{найдется соответствующее} & \\ \text{для } v & \mapsto & \Delta v \end{matrix}$

$$] \; f = u+v \Longrightarrow \Delta f(x) = \Delta\left[\,u(x) + v(x)\,\right] =$$

$$=\left[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)\right]-\left[\boxed{}\right]=$$

$$=\underbrace{\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]}_{=\;\boxed{}} + \underbrace{\left[\boxed{}\right]}_{\Delta v(x)} =$$

$\Downarrow$

$f = u+v \in \underbrace{C'\langle a;b\rangle}_{\substack{\textit{дифференцируема}\\ \textit{на } \langle a;b\rangle}}$

2 При $\Delta x \to 0$: $\boxed{(u+v)'} = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\right]=$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}} + \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}} =$$

$$= \boxed{u'(x) + v'(x)}$$

Правила дифференцирования

Пример

Найдем производную функции

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Решение

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[f(x)\right]'=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=$$

$$=\underbrace{\left(\sqrt{x}\right)'+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'}_{\text{мысленно}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\cdot x}=$$

$$=\frac{1}{2x}\cdot\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Пример

Решим уравнение

$$\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2+6x\right)'=0$$

Решение

$$\underbrace{\left(\frac{1}{3}\cdot x^3\right)'+\left(\frac{7}{2}\cdot x^2\right)'+(6x)'}_{\text{мысленно}}=(0)'$$

$$\underbrace{\frac{1}{3}\cdot 3x^2+\frac{7}{2}\cdot 2x+6}_{\text{мысленно}}=0$$

$$x^2+7x+6=0$$

$$\left(x^2+6x\right)+(x+6)=0$$

$$(x+6)\cdot(x+1)=0$$

$$\Downarrow$$

$$x=-6 \text{ или } x=-1$$

1 Докажите, что

$$\rceil\ u, v, \omega\in C'\langle a;b\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$(u+v+\omega)'=u'+v'+\omega'$$

2 **ПОСМОТРИТЕ И *запишите*** ответ

$$\left(\cos x+e^x+\sqrt{x}\right)'=$$

3 Серия — Решите уравнение

1	$x^2-1=(2x)'$
2	$\left(x^3+x^2\right)'=(-x)'$
3	$\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right)'+(-8x)'=3x$
4	$\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+12x\right)'=\left(1+x^2+\frac{1}{6}x^3\right)'$

3

Правила дифференцирования

ПРОИЗВОДНАЯ РАЗНОСТИ

Если $\exists$ u' и v' на $\langle a;\, b\rangle$, то $\exists$ $(u-v)'$ на $\langle a;\, b\rangle$:

$$\underbrace{\left[u(x)-v(x)\right]'}_{\text{Производная разности}} \underbrace{=}_{\text{равна}} \underbrace{u'(x) - v'(x)}_{\text{разности производных}}$$

Доказательство

1 $\;\left.\right]\; u,\, v \in C'\langle a;b\rangle \;\Rightarrow\;$ при $x \mapsto \Delta x$: $\begin{matrix} u \mapsto \Delta u \\ v \mapsto \Delta v \end{matrix}$

$$\left.\right]\; f = u - v \Longrightarrow \Delta f(x) = \Delta\left[\,u(x) - v(x)\,\right] =$$

$$= \left[\boxed{}\right] - \left[u(x)-v(x)\right] =$$

$$= \underbrace{\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]}_{} - \underbrace{\left[\boxed{}\right]}_{} =$$

$$f = u - v \in \underbrace{C'\langle a;b\rangle}_{\substack{\text{дифференцируема} \\ \text{на } \langle a;b\rangle}} \qquad = \Delta u(x) - \Delta v(x)$$

2 При $\Delta x \to \mathbf{0}$: $\boxed{(u-v)'} = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{} - \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{} =$$

$$= \boxed{u'(x) - v'(x)}$$

Данную теорему при тех же условиях
можно доказать, опираясь на теоремы
о **производной суммы** и **вынесении числа за знак производной**

$$\left[u(x)-v(x)\right]' = \left\{u(x)+\left[-v(x)\right]\right\}' = \left[u(x)\right]' + \left[-v(x)\right]' =$$

$$= \left[u(x)\right]' - \left[v(x)\right]' = u'(x) - v'(x)$$

Правила дифференцирования

Пример

Найдем производную функции $f(x) = \mathbf{3}x^{\mathbf{2}} - \mathbf{1}$

Решение

$$f(x) = \mathbf{3}x^{\mathbf{2}} - \mathbf{1}$$

$$\Downarrow$$

$$[f(x)]' = (\mathbf{3}x^{\mathbf{2}} - \mathbf{1})' = \underbrace{(\mathbf{3}x^{\mathbf{2}})' - (\mathbf{1})'}_{\text{мысленно}} = \underbrace{\mathbf{3}\cdot(x^{\mathbf{2}})' - \mathbf{0}}_{\text{мысленно}} = \mathbf{6}x$$

1 Докажите, что

$$[\mathbf{k}\cdot x - \mathbf{p}\cdot x]' = \mathbf{k} - \mathbf{p}$$

2 Докажите, что

$$\left[\mathbf{k} - \frac{\mathbf{k} - f(x)}{\mathbf{k}}\right]' = \frac{f'(x)}{\mathbf{k}}$$

3 Докажите, что

$$\left(\mathbf{5} + \mathbf{5}x + x^{\mathbf{2}} - x^{\mathbf{3}}\right)'\Big|_{x=-\mathbf{1}} = \mathbf{0}$$

4 Докажите, что

$$\left[x^{\mathbf{2}}\cdot\left(\frac{\mathbf{1}}{x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}x^{\mathbf{2}}}\right)\right]' = \mathbf{1}$$

5 Докажите, что

$$\left[x^{\mathbf{2}}\cdot\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}x^{\mathbf{2}}} - \frac{\mathbf{1}}{x}\right)\right]' = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{x}$$

6 Тест. Вычислите значение производной функции

$f(x) = \mathbf{2} + x - x^{\mathbf{2}}$ в заданной точке	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$f'\left(-\frac{1}{2}\right)$													
$f'(-1)$													
$f'(0)$													
$f'(1)$													
$f'\left(\frac{1}{2}\right)$													

4

Правила дифференцирования

ПРОИЗВОДНАЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

$$\left.\begin{array}{l}]\, u(x),\ v(x):\ x\in\langle a\,;b\rangle \\ \exists\, u'(x),\ v'(x)\ \forall x\in(a\,;b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}[u(x)\cdot v(x)]' = \\ = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x) \\ \forall x\in(a\,;b)\end{array}$$

Доказательство

$$]\ f(x) = u(x)\cdot v(x):\ u(x),\ v(x):\ x\in\langle a\,;b\rangle$$

$\boxed{1}$ $\Delta f(x) = \Delta\left[u(x)\cdot v(x)\right]$

Так как $\Delta u(x)=u(x+\Delta x)-u(x)$, то $\Delta u(x)+u(x)=\boxed{u(x+\Delta x)}$

Так как $\Delta v(x)=v(x+\Delta x)-v(x)$, то $\boxed{v(x+\Delta x)}=\Delta v(x)+v(x)$

Отсюда

$$f(x+\Delta x)-f(x)= u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x) =$$
$$=[u(x)+\Delta u(x)]\cdot[v(x)+\Delta v(x)] - u(x)\cdot v(x) =$$
$$= \Delta u(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot\Delta v(x) + \Delta u(x)\cdot\Delta v(x)$$

$\boxed{2}$
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\boxed{}\cdot v(x)+u(x)\cdot\boxed{}+\boxed{}\cdot\Delta v(x)$$

$\boxed{3}$ Т. к. $\exists\, u'(x),\ v'(x)\ \forall x\in(a\,;b)$:

$$\boxed{[u(x)\cdot v(x)]'} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta[u(x)\cdot v(x)]}{\Delta x} =$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\cdot v(x)+\boxed{}+\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\cdot\Delta v(x)\right]=$$
$$=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}}_{u'(x)}\cdot v(x)+u(x)\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}}_{v'(x)}+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}}_{u'(x)}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v(x)}_{0}=$$
$$=\boxed{u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)}$$

Правила дифференцирования

1 Тренажер — Оформите правую часть равенства

1 $\left[f(x)\cdot g(x)\right]' =$	2 $\left[f(x)\cdot \mathbf{3}^x\right]' =$	3 $\left[x^3\cdot g(x)\right]' =$	4 $\left(\sqrt{x}\cdot \mathbf{cos}\,x\right)' =$

2 Серия — Найдите производную произведения функций

1 $\left(\mathbf{sin}\,x\cdot \mathbf{e}^x\right)'$	2 $\left(\dfrac{\mathbf{1}}{x^4}\cdot \mathbf{2}^x\right)'$	3 $\left(\dfrac{x^3}{\sqrt{x}}\right)'$	4 $\left(\dfrac{x^4\cdot \mathbf{3}^x}{\sqrt{x}}\right)'$

3 Докажите, что

$$\left.\right]\ u, v, \omega \in C'\langle a;b\rangle$$
$$\Downarrow$$
$$(u\cdot v\cdot\omega)' =$$
$$= u'\cdot v\cdot\omega + u\cdot v'\cdot\omega + u\cdot v\cdot\omega'$$

4 ПОСМОТРИТЕ И

запишите
ответ

$$\left(\mathbf{sin}\,x\cdot x^2\cdot \mathbf{2}^x\right) =$$

Пример Выведем производную функции $y=\dfrac{\mathbf{1}}{x^3}$

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{x^3}\right)' = \left(\frac{\mathbf{1}}{x}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x^2}\right)' = \underbrace{\left(\frac{\mathbf{1}}{x}\right)'\cdot\frac{\mathbf{1}}{x^2}+\frac{\mathbf{1}}{x}\cdot\left(\frac{\mathbf{1}}{x^2}\right)'}_{\text{мысленно}} = -\frac{\mathbf{1}}{x^2}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x^2}-\frac{\mathbf{1}}{x}\cdot\frac{\mathbf{2}}{x^3} = -\frac{\mathbf{3}}{x^4}$$

5 Докажите, что

$$\left(x^4\right)' = \mathbf{4}x^3$$

6 Докажите, что

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{x^4}\right)' = -\frac{\mathbf{4}}{x^5}$$

7 ПОСМОТРИТЕ И **8**

$\left(x^2\right)' = \mathbf{2}\cdot x = \mathbf{2}\cdot x^{2-1}$ ***проанализируйте*** результат дифференцирования $\left(\dfrac{\mathbf{1}}{x^2}\right)' = -\dfrac{\mathbf{2}}{x^3} = -\mathbf{2}\cdot\dfrac{\mathbf{1}}{x^{2+1}}$

и оформите аналогичным образом

$\left(x^3\right)'$ и $\left(x^4\right)'$ результаты дифференцирования $\left(\dfrac{\mathbf{1}}{x^3}\right)'$ и $\left(\dfrac{\mathbf{1}}{x^4}\right)'$

5

Правила дифференцирования

ПОСТРОЕНИЕ И ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ПРОИЗВОДНОЙ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Построение гипотезы об общей формуле производной степени с натуральным показателем

$$(x)' = (x^1)' = x^0 = \mathbf{1}\cdot x^{\mathbf{1-1}}$$

$$(x^2)' = \mathbf{2}\cdot x^1 = \mathbf{2}\cdot x^{\mathbf{2-1}}$$

$$(x^3)' = \mathbf{3}\cdot x^2 = \mathbf{3}\cdot x^{\mathbf{3-1}}$$

$$(x^4)' = \mathbf{4}\cdot x^3 = \mathbf{4}\cdot x^{\mathbf{4-1}}$$

....

$$\Downarrow$$

Гипотеза:

$$\overbrace{(x^{\mathbf{n}})' = \mathbf{n}\cdot x^{\mathbf{n-1}}}^{\text{Общая формула}}$$

$$\underbrace{(x^{\mathbf{n}})' = \mathbf{n}\cdot x^{\mathbf{n}}\cdot \boxed{\frac{1}{x}}}_{\text{формула, удобная для нахождения результата}}$$

Проверка гипотезы методом математической индукции

$$(x^{\mathbf{n}})' = \mathbf{n}\cdot x^{\mathbf{n-1}}$$

Проверяем при $n = \mathbf{1}$

$$(x^1)' = \mathbf{1}\cdot x^{\mathbf{1-1}}$$

$$\Downarrow$$

при $n = \mathbf{1}$
утверждение верно

Предполагаем при $n = \mathbf{k}$

утверждение $(x^{\mathbf{k}})' = \mathbf{k}\cdot x^{\mathbf{k-1}}$ верно

Проверяем при $\mathbf{n = k+1}$

$$(x^{\mathbf{k+1}})' = (x^{\mathbf{k}}\cdot x^1)' =$$

$$= \mathbf{k}x^{\mathbf{k-1}}\cdot x + x^{\mathbf{k}}\cdot \mathbf{1} = \mathbf{k}x^{\mathbf{k}} + x^{\mathbf{k}} =$$

$$= (\mathbf{k+1})\cdot x^{\mathbf{k}}$$

$$\Downarrow$$

при $\mathbf{n = k+1}$
утверждение верно

$$\Downarrow$$

гипотеза $(x^{\mathbf{n}})' = \mathbf{n}\cdot x^{\mathbf{n-1}}$ ***истинна*** $\forall\ \mathbf{n} \in \mathbf{N}$

Пример

$$\left[\frac{x^4}{2}\right]' + \left[\frac{x^6}{3}\right]' + \left[\frac{x^8}{4}\right]' + \left[\frac{x^{10}}{5}\right]' + \left[\frac{x^{12}}{6}\right]' + \left[\frac{x^{14}}{7}\right]' =$$

$$= \underbrace{\frac{4x^3}{2} + \frac{6x^5}{3} + \frac{8x^7}{4} + \frac{10x^9}{5} + \frac{12x^{11}}{6} + \frac{14x^{13}}{7}}_{\textit{мысленно}} =$$

$$= 2x^3\cdot\left(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}\right)$$

Правила дифференцирования

Пример Найдем производную функции $f(x)=\left(x^3+3\right)\left(x^4+2x-5\right)$

Решение (1 способ)

$$f'(x)=\left[\left(x^3+3\right)\cdot\left(x^4+2x-5\right)\right]'=$$

$$=\left(x^7+2x^4-5x^3+3x^4+6x-15\right)'=$$

$\left(u+v\right)'=u'+v'$

$$=\underbrace{\left(x^7\right)'+\left(5x^4\right)'-\left(5x^3\right)'+\left(6x\right)'-\left(15\right)'}_{\text{мысленно}}=$$

$$=7x^6+20x^3-15x^2+6$$

Посмотрите и сравните!

Решение (2 способ)

$$f'(x)=\left[\left(x^3+3\right)\cdot\left(x^4+2x-5\right)\right]'=$$

$\left(u\cdot v\right)'=u'\cdot v+u\cdot v'$

$$=\underbrace{\left(x^3+3\right)'\cdot\left(x^4+2x-5\right)+\left(x^3+3\right)\cdot\left(x^4+2x-5\right)'}_{\text{мысленно}}=$$

$$=3x^2\cdot\left(x^4+2x-5\right)+\left(x^3+3\right)\cdot\left(4x^3+2\right)$$

1 ПОСМОТРИТЕ И 2

постройте гипотезу об общей формуле производной степени с целым отрицательным показателем

$\left(x^{-1}\right)'=-1\cdot x^{-2}=-1\cdot x^{-1-1}$

$\left(x^{-2}\right)'=$

$\left(x^{-3}\right)'=$

$\left(x^{-4}\right)'=$

докажите методом математической индукции истинность этой гипотезы в виде

$$\underbrace{\left(x^{-n}\right)'=-n\cdot x^{-n}\cdot\boxed{\frac{1}{x}}}_{\text{формула, удобная для нахождения результата}}$$

3 Серия Упростите выражение

1	2	3	4
$\left[\dfrac{x^5}{5}-\left(\dfrac{x^2}{2}\right)'+1\right]'$	$\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}x^2}\right)'$	$\dfrac{\left(x^{13}\right)'\cdot\left(x^{-14}\right)'}{\left(x^{14}\right)'}$	$\left(x^4\right)'\cdot\left(x^{-2}\right)'-\left(x^5\right)'\cdot\left(x^{-3}\right)'$

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

6

Правила дифференцирования

ОБОБЩЕНИЕ ГИПОТЕЗЫ ДЛЯ $y = x^{\mu}$ $(\mu \in \mathbf{R})$

Предположение

$$\left(x^{\mu}\right)' = \mu \cdot x^{\mu-1} \quad \forall \mu \in \mathbf{R}$$

Доказательство

$$\boxed{\left(x^{\mu}\right)'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^{\mu}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\mu} \cdot \dfrac{(x+\Delta x)^{\mu}}{x^{\mu}} - x^{\mu}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\mu} \cdot \left(\boxed{}\right)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} x^{\mu} \frac{\left(\boxed{}\right)^{\mu} - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\mu}}{x} \cdot \frac{\left(1 + \boxed{}\right)^{\mu} - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}} =$$

из $\Delta x \to 0 \Rightarrow \dfrac{\Delta x}{x} \to 0$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} x^{\mu-1}}_{x^{\mu-1}} \cdot \underbrace{\lim_{\frac{\Delta x}{x} \to 0} \frac{\left(1 + \boxed{}\right)^{\mu} - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}}}_{\mu} =$$

так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{(1+\alpha)^{\mu} - 1}{\alpha} = \mu$

$$= \boxed{\mu \cdot x^{\mu-1}}$$

1 Тренажер	Не осуществляя алгебраических преобразований, запишите результат дифференцирования по схеме $\left(x^{\mu}\right)' = \mu \cdot x^{\mu-1}$		
1 $\dfrac{d}{dx}\left(x^{-7}\right)$	2 $\dfrac{d}{dx}\left(x^{1/7}\right)$	3 $\dfrac{d}{dx}\left(x^{5/6}\right)$	4 $\dfrac{d}{dx}\left(x^{-5/6}\right)$

Правила дифференцирования

2 Тренажер

Заполните пропуски в таблице производных степеней и радикалов, составленной по формуле, удобной для вычислений

$f(x)$	$f'(x)$
x^{n}	$n \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot x^{n}$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\frac{1}{x^{n}}$	$\square \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot \square$
$\sqrt[n]{x}$	$\square \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot \square$
$\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	$\square \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot \square$
$\sqrt[n]{x^{k}}$	$\square \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot \square$
$\frac{1}{\sqrt[n]{x^{k}}}$	$\square \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot \square$

Запишите по формуле удобной для вычислений результат дифференцирования и упростите его

3 Тренажер

1	$\left(\sqrt{x}\right)'$
2	$\left(\sqrt[3]{x}\right)'$
3	$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'$
4	$\left(\sqrt[4]{x^3}\right)'$
5	$\left(\sqrt[4]{x^5}\right)'$

4 Тренажер

1	$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$
2	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'$
3	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'$
4	$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)'$
5	$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\right)'$

Пример

$$\left(\frac{6}{x\sqrt[3]{x^2}}\right)' = 6\cdot\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}\right)' = 6\cdot\left(-\frac{5}{3}\cdot\boxed{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}\right) = -\frac{10\sqrt[3]{x}}{x^3}$$

5 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$\left(-\frac{2}{x\sqrt{x}}\right)'$	$\left(\frac{4}{x^2\sqrt{x}}\right)'$	$\left(\frac{x}{x^5\sqrt{x}}\right)'$	$\left(\frac{6x^2}{x^7\sqrt{x^3}}\right)'$

7

Правила дифференцирования

ПРОИЗВОДНАЯ ЧАСТНОГО

$$\left.\begin{array}{r}]\, u(x),\ v(x): x\in\langle a;b\rangle \\ v(x)\neq \mathbf{0}\ \forall\ x\in\langle a;b\rangle \\ \exists\, u'(x), v'(x)\ \ \forall x\in(a;b) \end{array}\right\}\Longrightarrow \forall x\in(a;b)\quad \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^{2}(x)}$$

Доказательство

$$]\ h=\frac{u}{v}\ \Rightarrow\quad u=v\cdot h:\ u(x),\ v(x): x\in\langle a;b\rangle \text{ и } v(x)\neq \mathbf{0}\ \forall\ x\in(a;b)$$

Т.к. $\exists\, u'(x), v'(x)\ \ \forall x\in(a;b)$

$$\Downarrow$$

$$u'=(v\cdot h)'=v\cdot h'+v'\cdot h$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{h'}=\frac{u'-v'\cdot h}{v}=\frac{u'-v'\cdot\dfrac{u}{v}}{v}=\boxed{\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^{2}}}$$

Пример $$\left(\sin x\cdot x^{2}\right)'=\underbrace{(\sin x)'\cdot x^{2}+\sin x\cdot\left(x^{2}\right)'}_{\text{мысленно}}=x^{2}\cos x+2x\sin x$$

$$\boxed{(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'}$$

Обратите внимание на сходство и различия в формулах

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^{2}}}$$

Пример $$\left(\frac{\sin x}{x^{2}}\right)'=\overbrace{\frac{(\sin x)'\cdot x^{2}-\sin x\cdot\left(x^{2}\right)'}{\left(x^{2}\right)^{2}}}^{\text{мысленно}}=\frac{x\cos x-2\sin x}{x^{3}}$$

Правила дифференцирования

Пример

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \underbrace{\frac{\left(x^2\right)'\cdot(x-1) - x^2\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}}_{\textit{мысленно}} =$$

$$= \frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \underbrace{\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}}_{\textit{мысленно}} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

1 Тест. Определите результат преобразования выражения

выражения	$\frac{1}{2^x}$	2^x	$\frac{1}{2^e}$	2^e	$\frac{x}{2^x}$	$\frac{2^x}{x}$	$\ln 2$	$\frac{1}{\ln 2}$	$\frac{e}{2^x}$	$\frac{2^x}{e}$
$\left(\frac{2^x}{x^2}\right)'\cdot\frac{x^3}{\ln 2\cdot x-2}$										
$\left(\frac{e^x}{2^e}\right)'\cdot\frac{1}{e^x}$										
$\left(\frac{x^2}{2^x}\right)'\cdot\frac{1}{2-x\cdot\ln 2}$										
$\left(\frac{2^x}{e^2}\right)'\cdot\frac{e^2}{2^x}$										

2 Тренажер

Найдите производную по теореме о производной произведения

1	2	3	4
$\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\cdot\sin x\right)'$	$\left(\frac{4^x}{\sqrt[4]{x}}\right)'$	$\left(\frac{\cos x}{2x^3}\right)'$	$\left(\frac{5x-1}{\sqrt[3]{x}}\right)'$

3 Тренажер

Найдите производную по теореме о производной частного

8

Правила дифференцирования

ПОЛЕЗНОЕ СЛЕДСТВИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЧАСТНОГО

$$\left.\begin{array}{l}]\ f(x): x \in \langle a\,; b\rangle \\ \ \ f(x) \neq \mathbf{0}\ \forall\, x \in (a\,; b) \\ \exists\, f'(x)\ \forall\, x \in (a\,; b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\frac{\mathbf{1}}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{f^{\mathbf{2}}(x)} \quad \forall\, x \in (a\,; b)$$

Доказательство

$]\ f(x) \neq \mathbf{0}\ \forall\, x \in (a\,; b)$ и $f(x): C' \in \langle a\,; b\rangle$

$$\boxed{\left[\frac{\mathbf{1}}{f(x)}\right]'} = \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \underbrace{\frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^{\mathbf{2}}(x)}}_{\text{мысленно}} =$$

$$= \frac{(\mathbf{1})' \cdot f(x) - \mathbf{1} \cdot [f(x)]'}{[f(x)]^{\mathbf{2}}} = \boxed{-\frac{f'(x)}{f^{\mathbf{2}}(x)}}$$

Пример

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{x} - x^{\mathbf{2}}}\right)' = -\underbrace{\frac{\left(\sqrt{x} - x^{\mathbf{2}}\right)'}{\left(\sqrt{x} - x^{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}}}_{\text{мысленно}} = -\frac{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{x}} - \mathbf{2}x}{\left(\sqrt{x} - x^{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{4}x\sqrt{x} - \mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - x^{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}}$$

1 Докажите, что

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\sin x}\right)' = -\frac{\mathbf{ctg}\,x}{\sin x}$$

2 Докажите, что

$\forall\ \mathbf{n} \in \mathbf{N}$:

$$\left(\frac{x}{x \pm \mathbf{n}}\right)' = \frac{\pm\,\mathbf{n}}{(x \pm \mathbf{n})^{\mathbf{2}}}$$

3 Докажите, что

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\cos x}\right)' = \frac{\mathbf{tg}\,x}{\cos x}$$

4 Докажите, что

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\cos x}\right)' = \frac{\sin x}{\mathbf{1} - \sin^{\mathbf{2}} x}$$

5 Докажите, что

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\sin x}\right)' = \frac{\cos x}{\cos^{\mathbf{2}} x - \mathbf{1}}$$

Правила дифференцирования

6 Серия	Найдите производную		
1 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$	2 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)$	3 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x\ln 3}{x-3}\right)$	4 $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{5x}{9(x-3)}\right]$

ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ ЧАСТНОГО, УДОБНАЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left[\frac{1}{g(x)}\right]'$$

Пример

$$\left(\frac{x^2}{\cos x}\right)' = \underbrace{\left(x^2\cdot\frac{1}{\cos x}\right)'}_{\text{мысленно}} = \underbrace{\left(x^2\right)'\cdot\frac{1}{\cos x} + x^2\cdot\left(\frac{1}{\cos x}\right)'}_{\text{мысленно}} =$$

$$= 2x\cdot\frac{1}{\cos x} + x^2\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{x}{\cos x}\left(2 + x\,\mathrm{tg}\,x\right)$$

Посмотрите и сравните!

$$\left(\frac{x^2}{\cos x}\right)' = \underbrace{\frac{\left(x^2\right)'\cdot\cos x - x^2\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}}_{\text{мысленно}} =$$

$$= \frac{2x\cdot\cos x + x^2\cdot\sin x}{\cos^2 x} = 2x\cdot\frac{1}{\cos x} + x^2\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{x}{\cos x}\left(2 + x\,\mathrm{tg}\,x\right)$$

7 Серия	Найдите производную		
1 $\left(\cos x\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)'$	2 $\left(\dfrac{3^x}{\ln 3\cdot\sin x}\right)'$	3 $\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{2\cos x}\right)'$	4 $\left(\dfrac{e^3\cdot 2^x}{x^2-3x+1}\right)'$

9

Правила дифференцирования

ПРОИЗВОДНАЯ ТАНГЕНСА

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \forall x \neq \mathbf{k}\frac{\pi}{2} \ (\mathbf{k} \in \mathbf{Z})$$

Доказательство

$$\boxed{(\mathrm{tg}\,x)'} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' =$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$= \underbrace{\frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2}}_{\text{мысленно}} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

или

$$\boxed{(\mathrm{tg}\,x)'} = \left(\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}\right)' =$$

$$\left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$= \underbrace{(\sin x)' \cdot \frac{1}{\cos x} + \sin x \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right)'}_{\text{мысленно}} =$$

$$= \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} + \sin x \cdot \left(-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}\right) =$$

$$= 1 + \mathrm{tg}^2 x =$$

$$= \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

1 Докажите, что

$$\forall x \neq \pm\frac{\pi}{2} + \mathbf{k}\pi \ (\mathbf{k} \in \mathbf{Z})$$

$$\left(\cos x \cdot \frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

2 Докажите, что

$$\forall x \neq \pm\frac{\pi}{2} + \mathbf{k}\pi \ (\mathbf{k} \in \mathbf{Z})$$

$$\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

ПРОИЗВОДНАЯ КОТАНГЕНСА

$$(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \forall x \neq \pm\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{k} \ (\mathbf{k} \in \mathbf{Z})$$

Правила дифференцирования

3 Тренажер — Найдите y', если

1	2	3	4
$y=\dfrac{\mathbf{tg}\,x}{\mathbf{cos}\,2}$	$y=\mathbf{tg}5\cdot\mathbf{ctg}\,x$	$y=\dfrac{\mathbf{sin}\,3}{\mathbf{tg}\,x}+x$	$y=\mathbf{tg}\,2\,\mathbf{ctg}\,x+\mathbf{ctg}\,2\,\mathbf{tg}\,x$

4 Тест Найдите

результат	$\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$	$\mathrm{tg}^2 x$	$\dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x}$	$\mathrm{tg}^2 x+1$	$\dfrac{4}{\sin^2 2x}$	$\dfrac{\cos 2x}{\cos^4 x}$	$\mathrm{ctg}^2 x$	$\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$
$\left(\dfrac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{ctg}x}\right)'$								
$(\mathrm{tg}x-x)'$								
$\left(-\dfrac{\mathrm{ctg}x}{\mathrm{tg}x}\right)'$								
$(\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x)'$								

5 Докажите, что

$$\begin{vmatrix} (\mathrm{tg}x)' & (-\mathrm{ctg}x)' \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)'$$

7 Докажите, что

$$\left(\frac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{ctg}x}\right)' = 2\mathrm{tg}x\cdot(\mathrm{tg}x)'$$

6 Докажите, что

$$\begin{vmatrix} (\mathrm{tg}x)' & 1 \\ 1 & (\mathrm{ctg}x)' \end{vmatrix} \neq (\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}x)'$$

8 Докажите, что

$$\left(\frac{x}{\mathrm{ctg}x}\right)' = \mathrm{tg}x + x\cdot(\mathrm{tg}x)'$$

9 Докажите, что

$$\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x}\right)' = \cos 2x$$

10 Докажите, что

$$\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x}\right)' = -\frac{1}{\cos^2 2x}$$

Правила дифференцирования

Информационная схема «ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ »

$$\Delta\left[f(x)\circ g(x)\right]=$$
$$=\left[f(x+\Delta x)\circ g(x+\Delta x)\right]-\left[f(x)\circ g(x)\right]$$

где $\circ$: $+$, $-$, $\cdot$, $:$

Производная суммы

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

Производная разности

Производная произведения

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

Производная частного

$$(\mathbf{tg}x)'=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^2 x}$$

$$(\mathbf{ctg}x)'=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin}^2 x}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$$

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin}\,x}\right)'=-\frac{\mathbf{ctg}x}{\mathbf{sin}x}$$

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}\,x}\right)'=\frac{\mathbf{tg}x}{\mathbf{cos}x}$$

Производная степени с целым показателем

$$\left(x^{\mathbf{n}}\right)'=\mathbf{n}\cdot x^{\mathbf{n}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}$$

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{x^{\mathbf{n}}}\right)'=-\mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x^{\mathbf{n}}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}$$

$$\left(x^{\mathbf{n}}\right)'=\mathbf{n}\cdot x^{\mathbf{n}-1}$$

Формулы, удобные для практики

Производная степени с дробным показателем

$$\left(\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}\right)'=\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\cdot\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}$$

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}\right)'=-\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}$$

Правила дифференцирования

Разные задачи

1 Тренажер	Найдите производную		
1 $\left(\dfrac{x^4}{x^7}\right)'$	2 $\left(\sqrt[4]{x^7}\right)'$	3 $\left(\dfrac{1}{x^7}\right)'$	4 $\left(\dfrac{1}{\sqrt[7]{x^4}}\right)'$

2 Тренажер	Найдите производную		
1 $y=g(x)+x$	2 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{g(x)}$	3 $y=\dfrac{g(x)}{2^x}$	4 $y=\dfrac{1-3x}{g(x)}$

3 Тест Найдите

результат	$\dfrac{5x^4}{6\sqrt[5]{x}}$	$-\dfrac{1}{25x^2}$	$\dfrac{x^4}{\sqrt[5]{x}}$	0	$\dfrac{24\sqrt[5]{x^{19}}}{5}$	$\dfrac{\sqrt[5]{x}}{x^4}$	$-\dfrac{x^2}{25}$	$\dfrac{6x^4}{5\sqrt[5]{x}}$
$\dfrac{1}{\left(x^{-5}\right)'\cdot\left(x^5\right)'}$								
$\left(\sqrt[5]{x}\right)'\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)'$								
$\left(\dfrac{x^5}{\sqrt[5]{x}}\right)'$								
$\left(\dfrac{1}{x^5\cdot x^{-5}}\right)'$								

4 Тренажер	Найдите производную		
1 $\left(\dfrac{1}{\sin x-\sqrt{2}}\right)'$	2 $\left(\dfrac{1}{\cos x+3x}\right)'$	3 $\left(\dfrac{1}{\sin x-\cos x}\right)'$	4 $\left(\dfrac{1}{2^x-\sin x}\right)'$

Правила дифференцирования

5 Докажите, что

$$\left(x\sqrt{x}\right)' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

6 Докажите, что

если $y = \dfrac{\mathbf{k}}{\cos x}$, то $y' - \mathbf{tg}\, x \cdot y = 0$

7 Докажите, что

$$\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)' = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$$

8 Докажите, что

если $y = \dfrac{\sin x}{x}$, то $x y' + y = \cos x$

9 Тест Найдите

результат	$\ln 2$	$\ln^2 2$	$2+x$	$2x$	x^2	2^x	$x^2 \cdot e^x$	$2^x \cdot e^x$
$\dfrac{\left(x^2 \cdot e^x\right)'}{x \cdot e^x}$								
$\dfrac{\left(2^x \cdot x\right)'}{x \ln 2 + 1}$								
$\dfrac{\left(\ln 2 \cdot 2^x\right)'}{2^x}$								
$\dfrac{\left(2^x \cdot e^x\right)'}{\ln 2 + 1}$								

10 Решите задачу

11 Решите задачу

Высота брошенного вверх тела меняется по закону

$$h = h_0 + \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Найдите

формулу зависимости изменения скорости движения тела от времени

формулу зависимости изменения ускорения движения тела от времени

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

Производная сложной функции

1

Производная сложной функции

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ В НАТУРАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

$$\boxed{\left[f^2(x)\right]'} = \left[f(x)\cdot f(x)\right]' =$$

$$= f'(x)\cdot f(x) + f(x)\cdot f'(x) = \boxed{2\frac{f^2(x)}{f(x)}\cdot f'(x)}$$

$$\boxed{\left[f^3(x)\right]'} = \left[f^2(x)\cdot f(x)\right]' =$$

$$= \underbrace{2f(x)f'(x)}_{\left[f^2(x)\right]'}\cdot f(x) + f^2(x)\cdot f'(x) = \boxed{3\frac{f^3(x)}{f(x)}\cdot f'(x)}$$

$$\boxed{\left[f^4(x)\right]'} = \left[f^3(x)\cdot f(x)\right]' =$$

$$= \underbrace{3f^2(x)f'(x)}_{\left[f^3(x)\right]'}\cdot f(x) + f^3(x)\cdot f'(x) = \boxed{4\frac{f^4(x)}{f(x)}\cdot f'(x)}$$

. . . .

$$\boxed{\left[f^{\mathbf{n}}(x)\right]'} = \left[f^{\mathbf{n}-1}(x)\cdot f(x)\right]' =$$

$$= \cdots + \cdots = \boxed{\mathbf{n}\frac{f^{\mathbf{n}}(x)}{f(x)}\cdot f'(x)}$$

1 Докажите, что $\left[f^{\mathbf{n}}(x)\right]' = \mathbf{n}\dfrac{f^{\mathbf{n}}(x)}{f(x)}\cdot f'(x)$

(методом математической индукции при $\mathbf{n}\in \mathbf{N}$)

Аналогично можно рассматривать производные функций в рациональной степени

Составим функцию с аргументом $x/\mathbf{4}$, и найдем ее производную

Пример $y=\sqrt{x}-\mathbf{1}$	Пример $y=\sqrt{x-\mathbf{1}}$
Решение	*Решение*
$y\left(\dfrac{x}{\mathbf{4}}\right) = \sqrt{\dfrac{x}{\mathbf{4}}}-\mathbf{1} = \dfrac{\sqrt{x}}{\mathbf{2}}-\mathbf{1}$	$y\left(\dfrac{x}{\mathbf{4}}\right) = \sqrt{\dfrac{x}{\mathbf{4}}-\mathbf{1}} = \sqrt{\dfrac{x-\mathbf{4}}{\mathbf{4}}} = \dfrac{\sqrt{x-\mathbf{4}}}{\mathbf{2}}$
$y'\left(\dfrac{x}{\mathbf{4}}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\mathbf{2}}-\mathbf{1}\right)' = \dfrac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\mathbf{2}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\mathbf{4}x}$	$y'\left(\dfrac{x}{\mathbf{4}}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{x-\mathbf{4}}}{\mathbf{2}}\right)' = \dfrac{\left(\sqrt{x-\mathbf{4}}\right)'}{\mathbf{2}} = \dfrac{\sqrt{x-\mathbf{4}}}{\mathbf{4}(x-\mathbf{4})}$

Производная сложной функции

1 Тренажер

Заполните пропуски
в таблице производных функций в степени

$f(x) \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow f'(x)$

	$f^{\mathbf{n}}(x)$	$\mathbf{n}\cdot f^{\mathbf{n}}(x)\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \mathbf{n}\cdot f^{\mathbf{n-1}}(x)\cdot f'(x)$
1	$\dfrac{\mathbf{1}}{f^{\mathbf{n}}(x)}$	$-\mathbf{n}\cdot\dfrac{\mathbf{1}}{f^{\mathbf{n}}(x)}\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\dfrac{\mathbf{n}\cdot\square}{f^{\mathbf{n+1}}(x)}$
2	$\sqrt[\mathbf{n}]{f(x)}$	$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\cdot\square\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{\sqrt[\mathbf{n}]{f(x)}\cdot\square}{\mathbf{n}\cdot\square}$
3	$\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{f(x)}}$	$\square\cdot\square\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\dfrac{\square}{\mathbf{n}\cdot\sqrt[\mathbf{n}]{f(x)}\cdot\square}$
4	$\sqrt[\mathbf{n}]{f^{\mathbf{k}}(x)}$	$\square\cdot\square\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{\sqrt[\mathbf{n}]{f^{\mathbf{k}}(x)}\cdot\square}{\mathbf{n}\cdot\square}$
5	$\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{f^{\mathbf{k}}(x)}}$	$\square\cdot\square\cdot\square = \square$

2 Тренажер

Найдите $\left[f^{2}(x)\right]'$ для

1	2	3	4
$f(x)=\mathbf{cos}\,x$	$f(x)=\mathbf{sin}^{2}x$	$f(x)=\sqrt{\mathbf{ctg}\,x}$	$f(x)=\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{sin}\,x}}$

3 Серия

Найдите производную

1	2	3	4
$\left(\dfrac{\mathbf{sin}^{2}x}{\mathbf{2}}\right)'$	$\left[\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{cos}^{2}x}\right]'$	$\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6tg}^{2}x}\right)'$	$\left(\sqrt{\mathbf{8\,sin}\,x}\right)'$

2

Производная сложной функции

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ АРГУМЕНТОМ

Доказательство

$$\underbrace{f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})}_{\text{аргумент функции}} \underbrace{=}_{\text{заменим}} \underbrace{f(z)}_{\text{единый символ}}, \text{ где } z=\mathbf{k}x+\mathbf{p}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta z=\left[\mathbf{k}(x+\Delta x)+\mathbf{p}\right]-(\mathbf{k}x+\mathbf{p})=\mathbf{k}\cdot\Delta x$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta x=\frac{\Delta z}{\mathbf{k}}$$

1

$$\Delta f(z)=$$
$$=f\left[\mathbf{k}(x+\Delta x)+\mathbf{p}\right]-f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})=$$
$$=f\left[(\mathbf{k}x+\mathbf{p})+\mathbf{k}\Delta x\right]-f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})=$$
$$=f(z+\Delta z)-f(z)=$$

2

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta x}=\frac{\Delta f(z)}{\frac{\Delta z}{\mathbf{k}}}=\mathbf{k}\cdot\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

3

$$\boxed{\left[f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\right]'}=\left[f(z)\right]'=$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\mathbf{k}\cdot\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\mathbf{k}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f\left[z+\Delta z\right]-f(z)}{\Delta z}}_{f'(z)}=$$
$$=\boxed{\mathbf{k}\cdot f'(\mathbf{k}x+\mathbf{p})}$$

Пример

$$\left[\mathbf{sin}\ (3x-5)\right]'=$$
$$\underbrace{=3\cdot\mathbf{cos}\ \underbrace{(3x-5)}_{\textbf{при сохранении аргумента}}}_{\textbf{сразу результат}}$$

$$\left[f\ (\mathbf{k}x+\mathbf{p})\right]'=$$
$$=\mathbf{k}\cdot\ \underbrace{f'\ \underbrace{(\mathbf{k}x+\mathbf{p})}_{\text{при заданном}}}_{\text{аргументе}}$$

производная функции

Пример

$$\left[\mathbf{tg}\ (5x+3)\right]'=$$
$$\underbrace{=5\cdot\frac{1}{\mathbf{cos}^2\ \underbrace{(5x+3)}_{\textbf{при сохранении аргумента}}}}_{\textbf{сразу результат}}$$

Производная сложной функции

1 Серия	Составьте для заданной функции формулу $f(x+\Delta x)-f(x)$		
1 $y=\cos 2x$	2 $y=\dfrac{1}{\cos x}$	3 $y=\sqrt{\cos x}$	4 $y=x\cdot\cos x$

2 Тест Найдите производную	$2e\cdot x^{2e-1}$	x^{2e}	e^{x-2}	e^x	$2e^x$	e^{2x}	$2e^{2x}$
$\left(e^{2x}\right)'$							
$\left(e^{x-2}\right)'$							
$\left(2e^{x}\right)'$							
$\left(x^{2e}\right)'$							

3	Выберите ответ
	$\left[f(\mathbf{k}x)\right]' =$
А	$\mathbf{k}\cdot f'(\mathbf{k}x)'$
Б	$\mathbf{k}\cdot f'(\mathbf{k}x)$
В	$\mathbf{k}\cdot f\left[(\mathbf{k}x)'\right]$
Г	$\mathbf{k}\cdot\left[f(\mathbf{k}x)\right]'$

4 Тренажер	Найдите производную		
1 $\left[(3x+2)^5\right]'$	2 $\left(\sqrt{3x+2}\right)'$	3 $\left[3^{5x-2}\right]'$	4 $\left[\cos(3-2x)\right]'$

5 Тест Определите производную	$3\cos 3x$	$\cos 3x$	$3\cos x$	$\frac{1}{3}\cos x$	$\cos\frac{x}{3}$	$3\cos\frac{x}{3}$	$\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}$
$(\sin 3x)'$							
$\left(\dfrac{\sin 3x}{3}\right)'$							
$\left(3\sin\dfrac{x}{3}\right)'$							
$\left(\sin\dfrac{x}{3}\right)'$							

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

3

Производная сложной функции

НЕЗАВИСИМАЯ ПЕРЕМЕННАЯ И АРГУМЕНТ ФУНКЦИИ

Договоримся отличать в структуре сложной функции независимую переменную от ее аргумента:

Пример

$$f(\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}}) = \underbrace{[\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}}]^{2n}}_{\text{функция от } x} \qquad f(\overbrace{x^2}^{\text{аргумент}}) = \underbrace{[\overbrace{x^2}^{\text{аргумент}}]^{n}}_{\text{функция от } x^2}$$

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ ПРОИЗВОДНОЙ

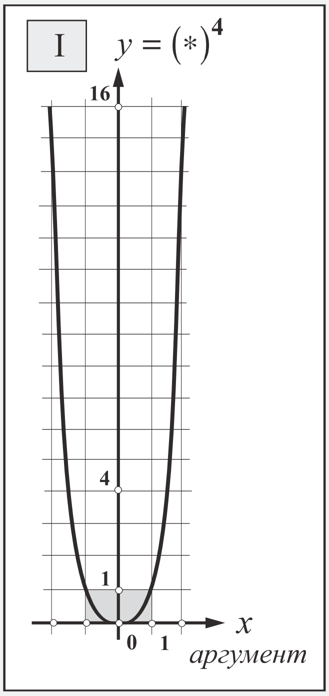
Если дифференцирование функции $f(x)$ ведется по независимой переменной x, то пишут

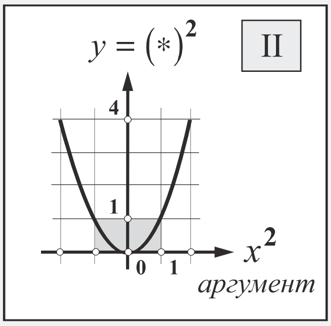
$$\underbrace{[f(x)]' \text{ или } f'(x)}_{\textit{без указания переменной дифференцирования}}$$

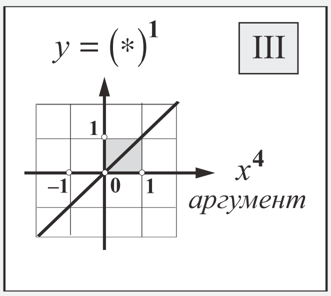
Если дифференцирование функции $f(*)$ ведется по аргументу $*$, то пишут

$$\underbrace{f'_*(*) \text{ или } [f(*)]'_*}_{\textit{с указанием аргумента дифференцирования}}$$

Пример Определим аргумент каждой из заданных функций







Решение

I $y = (\underbrace{x}_{\text{аргумент}})^4$

II $y = (\underbrace{x^2}_{\text{аргумент}})^2$

III $y = (\underbrace{x^4}_{\text{аргумент}})^1$

Производная сложной функции

Пример

$$\left(x^4\right)'_{\boxed{x}} = \boxed{\begin{matrix} x^4 = \left(x\right)^4 \Leftarrow \boxed{x = *} \\ \Downarrow \\ \underbrace{\left(*^4\right)' = 4\left(*\right)^3}_{\text{мысленно}} \end{matrix}} = 4x^3$$

$$\left(x^4\right)'_{\boxed{x^2}} = \boxed{\begin{matrix} x^4 = \left(x^2\right)^2 \Leftarrow \boxed{x^4 = *} \\ \Downarrow \\ \underbrace{\left[\left(*\right)^2\right]' = 2*}_{\text{мысленно}} \end{matrix}} = 2x^2$$

$$\left(x^4\right)'_{\boxed{x^4}} = \boxed{\begin{matrix} x^4 = \left(x^4\right)^1 \Leftarrow \boxed{x^4 = *} \\ \Downarrow \\ \underbrace{\left[*\right]' = 1}_{\text{мысленно}} \end{matrix}} = 1$$

1 Серия Заполните пропуски в примерах и оформите конечный результат

1. $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)'_{\frac{1}{x}} = \left[\left(\boxed{}\right)^{\frac{1}{4}}\right]'_{\frac{1}{x}} = \boxed{\left(*^4\right)'_* = 4\cdot *^3} = 4\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^3$

2. $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'_{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left[\left(\boxed{}\right)^4\right]'_{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \boxed{\left(*^4\right)'_* = 4\cdot *^3} = 4\cdot\left(\quad\right)^3$

3. $\left(\dfrac{1}{\sqrt[8]{x}}\right)'_{\sqrt[4]{x}} = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{}}}\right]'_{\sqrt[4]{x}} = \boxed{\left(\dfrac{1}{\sqrt{*}}\right)'_* = \qquad}$

4. $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)'_{\sqrt[8]{x}} = \left[\dfrac{1}{\left(\sqrt[8]{x}\right)^{\boxed{}}}\right]'_{\sqrt[8]{x}} = \boxed{\qquad}$

2 Тренажер Найдите производную

1 $\left[\cos\sin(x)\right]'_{\cos\sin(x)}$	2 $\left[\cos(\sin x)\right]'_{\sin x}$	3 $\left[\cos(\sin x)\right]'_{x}$

4

Производная сложной функции

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

$$\left\{f\left[g(x)\right]\right\}'_x = f'_{g(x)}\left[g(x)\right]\cdot g'_x(x)$$ *План дифференцирования*

$$\boxed{\left\{f\left[g(x)\right]\right\}' = f'\left[g(x)\right]\cdot g'(x)}$$ *Традиционное оформление*

Пример Найдите производную $\left(\mathbf{tg}\,\mathbf{e}^x\right)'$

Анализ

$$\mathbf{tg}\,\mathbf{e}^x = \underbrace{\mathbf{tg}\left(\underbrace{\mathbf{e}^x}_{\mathrm{II}}\right)}_{\mathrm{I}} \Rightarrow \left(\mathbf{tg}\,\mathbf{e}^x\right)'_x = \underbrace{\left[\mathbf{tg}\left(\mathbf{e}^x\right)\right]'_{\mathbf{e}^x}}_{(\mathrm{I})'}\cdot\underbrace{\left(\mathbf{e}^x\right)'_x}_{(\mathrm{II})'}$$

Решение

$$\left(\mathbf{tg}\,\mathbf{e}^x\right)'_x = \frac{1}{\cos^2\mathbf{e}^x}\cdot\mathbf{e}^x = \frac{\mathbf{e}^x}{\cos^2\mathbf{e}^x}$$

Посмотрите и сравните!

Пример Найдите производную $\left(\mathbf{e}^{\mathbf{tg}\,x}\right)'$

Анализ

$$\mathbf{e}^{\mathbf{tg}\,x} = \underbrace{\mathbf{e}^{\overbrace{(\mathbf{tg}\,x)}^{\mathrm{II}}}}_{\mathrm{I}} \Rightarrow \left(\mathbf{e}^{\mathbf{tg}\,x}\right)'_x = \underbrace{\left[\mathbf{e}^{(\mathbf{tg}\,x)}\right]'_{\mathbf{tg}\,x}}_{(\mathrm{I})'}\cdot\underbrace{(\mathbf{tg}\,x)'_x}_{(\mathrm{II})'}$$

Решение

$$\left(\mathbf{e}^{\mathbf{tg}\,x}\right)'_x = \mathbf{e}^{\mathbf{tg}\,x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{tg}\,x}}{\cos^2 x}$$

1 Тренажер — Определите количество множителей, составляющих результат дифференцирования заданной функции

1 $\left(\sin^2 x\right)'$	2 $\left(2\cos x^2\right)'$	3 $\left(\sin^2\cos^2 2x\right)'$	4 $\left(\sin^2\sqrt{\cos x^2}\right)'$

2 Тренажер — Составьте $g'\left[f(x)\right]\cdot f'(x)$ для заданной $g\left[f(x)\right]$

1 $\sin f(x)$	2 $\cos f(x)$	3 $\mathbf{tg}\, f(x)$	4 $\mathbf{ctg}\, f(x)$

Производная сложной функции

Пример Продифферуцируем функцию $y = \mathbf{sin\,tg}\sqrt{x}$ по всем возможным аргументам

Анализ

Общий порядок дифференцирования

$$\underbrace{\mathbf{sin}\left\{\underbrace{\mathbf{tg}\left[\underbrace{\sqrt{x}}_{\mathrm{III}}\right]}_{\mathrm{II}}\right\}}_{\mathrm{I}}$$

$\mathbf{tg}\sqrt{x}$

$\sqrt{x}$

x

Возможные аргументы

Решение

$$\left(\mathbf{sin}\left\{\mathbf{tg}\,\sqrt{x}\right\}\right)'_{\mathbf{tg}\sqrt{x}} = \underbrace{\mathbf{sin}'_{\mathbf{tg}\sqrt{x}}\left\{\mathbf{tg}\sqrt{x}\right\}}_{\textit{план дифференцирования}} =$$

$$= \mathbf{cos}\left\{\mathbf{tg}\sqrt{x}\right\} = \mathbf{cos\,tg}\,\sqrt{x}$$

$$\left(\mathbf{sin}\left\{\mathbf{tg}\left[\sqrt{x}\right]\right\}\right)'_{\sqrt{x}} = \underbrace{\mathbf{sin}'_{\mathbf{tg}\sqrt{x}}\left\{\mathbf{tg}\left[\sqrt{x}\right]\right\}\cdot \mathbf{tg}'_{\sqrt{x}}\left[\sqrt{x}\right]}_{\textit{план дифференцирования}} =$$

$$= \mathbf{cos\,tg}\sqrt{x} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^2\sqrt{x}} = \frac{\mathbf{cos\,tg}\sqrt{x}}{\mathbf{cos}^2\sqrt{x}}$$

$$\left(\mathbf{sin}\left\{\mathbf{tg}\left[\sqrt{x}\right]\right\}\right)'_{x} = \underbrace{\mathbf{sin}'_{\mathbf{tg}\sqrt{x}}\left\{\mathbf{tg}\left[\sqrt{x}\right]\right\}\cdot \mathbf{tg}'_{\sqrt{x}}\left[\sqrt{x}\right]\cdot\left[\sqrt{x}\right]'}_{\textit{план дифференцирования}} =$$

$$= \mathbf{cos\,tg}\,x \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^2\sqrt{x}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{x}} = \frac{\mathbf{cos\,tg}\,x}{\mathbf{2}\sqrt{x}\,\mathbf{cos}^2\sqrt{x}}$$

3 Тест Определите производную	$\frac{-\mathbf{sin}\,x}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{cos}\,x}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{cos}\,x}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^2\sqrt{x}}$	$\frac{\sqrt{x}}{\mathbf{sin}\sqrt{x}}$	$\mathbf{2\,sin}\,x$	$\mathbf{sin\,2}x$	$\mathbf{cos}\,\frac{\mathbf{1}}{x}$
$\left(\mathbf{sin}^2 x\right)'_{\mathbf{sin}\,x}$							
$\left(\sqrt{\mathbf{cos}\,x}\right)'_{\mathbf{cos}\,x}$							
$\left(\mathbf{sin}\,\frac{\mathbf{1}}{x}\right)'_{\frac{1}{x}}$							
$\left(\mathbf{tg}\,\sqrt{x}\right)'_{\sqrt{x}}$							

5

Производная сложной функции

ПРОИЗВОДНАЯ АРКСИНУСА | АРККОСИНУСА

Производную арксинуса | арккосинуса можно найти, используя известные тождества:

$$\sin(\arcsin x) = x \qquad\qquad \cos(\arccos x) = x$$

Продифференцируем обе части равенства, рассматривая их левые части как сложные функции:

$$\left[\sin(\arcsin x)\right]'_x = (x)'_x \qquad\qquad \left[\cos(\arccos x)\right]'_x = (x)'_x$$

Так как

$$\underbrace{\left[\sin(\arcsin x)\right]'_{\arcsin x} \cdot (\arcsin x)'_x = 1}_{\text{мысленно}} \qquad\qquad \underbrace{\left[\cos(\arccos x)\right]'_{\arccos x} \cdot (\arccos x)'_x = 1}_{\text{мысленно}}$$

то

$$\left[\cos(\arcsin x)\right] \cdot (\arcsin x)' = 1 \qquad\qquad -\sin(\arccos x) \cdot (\arccos x)' = 1$$

Следовательно

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \qquad\qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}$$

Поскольку

$$\boxed{\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}} \qquad\qquad \boxed{\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}}$$

имеем:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\underbrace{\sin^2(\arcsin x)}_{x^2}} \qquad\qquad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-\underbrace{\cos^2(\arccos x)}_{x^2}}$$

Отсюда:

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad\qquad \boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Пример

$$\left[\arcsin(3x-2)\right]' =$$

$$= \underbrace{\left[\arcsin(3x-2)\right]'_{3x-2} \cdot (3x-2)'_x}_{\text{мысленно}} = \frac{3}{\sqrt{1-(3x-2)^2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{12x-9x^2-3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4x-3x^2-1}}$$

Производная сложной функции

1 Докажите, что

$$(\arcsin x \cdot \arccos x)' = \frac{\arccos x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

2 Докажите, что

$$[\arcsin(kx)]' = \frac{k}{\sqrt{1-(kx)^2}}$$

3 Докажите, что

$$\left[\arccos\frac{x}{\sqrt{k}}\right]' = -\frac{1}{\sqrt{k-x^2}}$$

4 Серия. Найдите производную

1	2	3	4
$\left(\dfrac{\arccos 3x}{3}\right)'$	$\left(\arccos\dfrac{x}{3}\right)'$	$(\arccos^3 x)'$	$\left(\sqrt{\arccos x}\right)'$

5 Тест. Определите функцию, производная которой равна

равна	$\left(\sqrt{\arcsin x}\right)'$	$\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)'$	$(2\arcsin x)'$	$(\arcsin 2x)'$	$(\arcsin^2 x)'$
$\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$					
$\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$					
$\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$					
$\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$					

6

Производная сложной функции

АРКТАНГЕНСА	ПРОИЗВОДНАЯ	АРККОТАНГЕНСА

арктангенса	Производную можно найти, используя известные тождества:	арккотангенса
$\mathbf{tg}(\mathbf{arctg}\,x)=x$	Продифференцируем обе части равенства, рассматривая их левые части как сложные функции:	$\mathbf{ctg}(\mathbf{arcctg}\,x)=x$
$[\mathbf{tg}(\mathbf{arctg}\,x)]'_x=(x)'_x$	Так как	$[\mathbf{ctg}(\mathbf{arcctg}\,x)]'_x=(x)'_x$
$\underbrace{[\mathbf{tg}(\mathbf{arctg}\,x)]'_{\mathbf{arctg}x}\cdot(\mathbf{arctg}\,x)'_x=\mathbf{1}}_{\text{мысленно}}$	то	$\underbrace{[\mathbf{ctg}(\mathbf{arcctgx})]'_{\mathbf{arcctg}x}\cdot(\mathbf{arcctg}\,x)'_x=\mathbf{1}}_{\text{мысленно}}$
$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos^2}(\mathbf{arctg}\,x)}\cdot(\mathbf{arctg}\,x)'=\mathbf{1}$	Следовательно	$-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin^2}(\mathbf{arcctg}\,x)}\cdot(\mathbf{arcctg}\,x)'=\mathbf{1}$
$(\mathbf{arctg}x)'=\mathbf{cos^2}(\mathbf{arctg}\,x)$	Поскольку	$(\mathbf{arcctg}\,x)'=-\mathbf{sin^2}(\mathbf{arcctg}\,x)$
$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{1}+\mathbf{tg^2}x=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos^2}x}\\ \mathbf{cos^2}x=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\mathbf{tg^2}x}\end{array}}$	имеем	$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{1}+\mathbf{ctg^2}x=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin^2}x}\\ \mathbf{sin^2}x=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\mathbf{ctg^2}x}\end{array}}$
$\mathbf{cos^2}(\mathbf{arctg}\,x)=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\underbrace{\mathbf{tg^2}(\mathbf{arctg}\,x)}_{x^2}}$	Отсюда	$\mathbf{sin^2}(\mathbf{arcctg}\,x)=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\underbrace{\mathbf{ctg^2}(\mathbf{arcctg}\,x)}_{x^2}}$
$\boxed{(\mathbf{arctg}x)'=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+x^{\mathbf{2}}}}$		$\boxed{(\mathbf{arcctg}x)'=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+x^{\mathbf{2}}}}$

Пример $[\mathbf{arctg}(\mathbf{4}x-\mathbf{1})]'=$

$$=\underbrace{[\mathbf{arcrtg}(\mathbf{4}x-\mathbf{1})]'_{\mathbf{4}x-\mathbf{1}}\cdot(\mathbf{4}x-\mathbf{1})'_x}_{\text{мысленно}}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{1}+(\mathbf{4}x-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}}=$$

$$=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{16}x^{\mathbf{2}}-\mathbf{8}x+\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{8}x^{\mathbf{2}}-\mathbf{4}x+\mathbf{1}}$$

Производная сложной функции

1 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$\left(\dfrac{\mathbf{arctg}\sqrt{5}\,\mathbf{x}}{\mathbf{5}}\right)'$	$\left(\sqrt{\mathbf{x}}\ \mathbf{arctg}\dfrac{x}{\mathbf{3}}\right)'$	$\left(\mathbf{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{\mathbf{1}-x^{2}}}\right)'$	$\left(\dfrac{x^{2}}{\mathbf{1}+x^{2}}-\mathbf{arctg}\,x\right)'$

ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

$$\left.\begin{array}{l}]\, y=f(x)\in C'\left[D(f)\right] \\ x=\varphi(y)\in C'\left[E(f)\right] \end{array}\right\} \Rightarrow y'_x=\frac{\mathbf{1}}{x'_y}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

$$]\,\exists\, f'(x)=y'_x\neq \mathbf{0}$$

$$]\,\Delta y\neq \mathbf{0}\to \Delta x=\Delta\varphi(y)\neq \mathbf{0}$$

Так как $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\dfrac{\mathbf{1}}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\Delta y\to \mathbf{0}}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to \mathbf{0}}\frac{\mathbf{1}}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$\Downarrow$$

$$x'_y \underset{\Downarrow}{=} \frac{\mathbf{1}}{y'_x}$$

$$\varphi'(y)=\frac{\mathbf{1}}{f'(x)} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy}=\frac{\mathbf{1}}{\dfrac{dy}{dx}}$$

Пример Найдем производную функции $y=\mathbf{arctg}\,x$ по теореме о производной обратной функции

Р е ш е н и е

$$y=\mathbf{arctg}\,x \Leftrightarrow x=\mathbf{tg}\,y$$

где

$$x\in(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y\in\left(-\frac{\pi}{\mathbf{2}};\frac{\pi}{\mathbf{2}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$(\mathbf{tg}\,y)' \underset{\Downarrow}{=} x'_y=\frac{\mathbf{1}}{\cos^{\mathbf{2}} y}=\mathbf{1}+\underbrace{\mathbf{tg}^{\mathbf{2}}\,y}_{x^{2}}$$

$$(\mathbf{arctg}\,x)'=y'_x=\frac{\mathbf{1}}{x'_y}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+x^{\mathbf{2}}}$$

2 Докажите, что по теореме о производной обратной функции

$$(\mathbf{arcctg}\,x)'=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+x^{\mathbf{2}}}$$

3 Докажите, что

$$\frac{(\mathbf{arcsin}\,x)'}{(\mathbf{arctg}\,x)'}-\frac{(\mathbf{arccos}\,x)'}{(\mathbf{arcctg}\,x)'}=\mathbf{0}$$

4 Докажите, что

$$\left[\mathbf{arctg}\,f(x)\right]'=\left[-\mathbf{arcctg}\,f(x)\right]'$$

5 Докажите, что

$$\left[\frac{\mathbf{arctg}(\mathbf{k}x)}{\mathbf{k}}\right]'-\left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{arctg}\left(\frac{x}{\mathbf{k}}\right)\right]'=\frac{x^{2}\left(\mathbf{1}-\mathbf{k}^{4}\right)}{\left(\mathbf{1}+\mathbf{k}^{2}x^{2}\right)\left(\mathbf{k}^{2}+x^{2}\right)}$$

7

Производная сложной функции

ПРОИЗВОДНАЯ ЛОГАРИФМА

Производную логарифма
можно найти с помощью
основного логарифмического тождества

$$\mathbf{a}^{\log_{\mathbf{a}} x} = x,$$

рассматривая его левую часть, как сложную функцию:

$$\left(\mathbf{a}^{\log_{\mathbf{a}} x}\right)'_x = \left(\mathbf{a}^{\log_{\mathbf{a}} x}\right)'_{\log_{\mathbf{a}} x} \cdot \left(\log_{\mathbf{a}} x\right)'_x$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\left(\ x\ \right)'_x}_{1} = \underbrace{\mathbf{a}^{\log_{\mathbf{a}} x}}_{x} \ln \mathbf{a} \cdot \left(\log_{\mathbf{a}} x\right)' \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\log_{\mathbf{a}} x\right)' = \frac{1}{x \ln \mathbf{a}}}$$

$$\forall\, \mathbf{a} > 0,\quad \mathbf{a} \neq 1,\quad \forall\, x \in \mathbf{R}$$

Отсюда: $\left(\ln_{\mathbf{e}} x\right)' = \dfrac{1}{x \ln_{\mathbf{e}} \mathbf{e}}$

То есть: $\boxed{\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}}$

Пример $\quad]\ y = \ln \sin x$

$$y' = \underbrace{\left(\ln \sin x\right)_{\sin x} \cdot \left(\sin x\right)_x}_{\text{мысленно}} = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x$$

Пример $\quad]\ y = \log_5 (3x + 2)$

$$y' = \underbrace{\left[\log_5 (3x+2)\right]'_{3x+2} \cdot \left(3x+2\right)'_x}_{\text{мысленно}} = \frac{1}{(3x+2) \cdot \ln 5} \cdot 3 = \frac{3}{\ln 5 \cdot (3x+2)}$$

1 Серия — Найдите производную

1	2	3	4
$(2 \ln x)'$	$[\ln (\mathbf{e} x)]'$	$[\ln (x - \sqrt{2})]'$	$[\ln (\sqrt{2} x - \mathbf{e})]'$

2 Серия — Найдите производную

1	2	3	4
$(\log_3 x)'$	$(7 \log_7 x)'$	$(9\mathbf{e} \cdot \log_9 x)'$	$(\ln 3^3 \cdot \log_{27} x)'$

Производная сложной функции

3 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$\dfrac{d\left(\log_2 x\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\log_{1/3} x\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\log_{\sqrt{e}} x\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\log_3 x^3\right)}{dx}$

4 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$(\ln\sin 2x)'$	$\left(\ln^2\sin x\right)'$	$\left(\ln\sin^2 x\right)'$	$\left(\ln^2\sin 2x\right)'$

5 Тест

Найдите производную	$7e^{7x}$	e^{7x}	$7e$	7	$7x^6$	$\dfrac{7e}{x}$	$\dfrac{7e^{7\ln x}}{x}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{x}{7e}$
$\left(e^{7x}\right)'$									
$(\ln 7ex)'$									
$(7e\ln 7x)'$									
$\left(e^{7\ln x}\right)'$									
$\left(7\ln e^x\right)'$									

6 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$\left(\sqrt{\ln\sqrt{x}}\right)'$	$\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\ln\sqrt{x}\right)'}$	$\left(\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}\right)'$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{\ln x}}\right)'$

7 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$\dfrac{d\left(\ln^2\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\sqrt{\ln\dfrac{1}{x^2}}\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\dfrac{1}{\ln^2\sqrt{x}}\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\dfrac{1}{\sqrt{\ln\sqrt{x}}}\right)}{dx}$

8

Производная сложной функции

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

$$\left]\, y=\ln\varphi(x):\ \exists\varphi'(x)\right.$$

$$y'_x=\left[\ln\varphi(x)\right]'_x=\frac{1}{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ \Rightarrow\ \overbrace{\left[\ln\varphi(x)\right]'}^{\text{Логарифмическая производная функции }\varphi(x)}=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

$$y=\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ \ldots\ \cdot f_n(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot\ \ldots\ \cdot g_k(x)}\ \Rightarrow\ \ln y=\ln f_1(x)+\ln f_2(x)+\ \ldots\ +\ln f_n(x)-\ln g_1(x)-\ln g_2(x)-\ \ldots\ -\ln g_k(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(\ln y)'=\frac{y'}{y}}=\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+\ldots+\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}-\frac{g_1'(x)}{g_1(x)}-\frac{g_2'(x)}{g_2(x)}-\ldots-\frac{g_k'(x)}{g_k(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y'=y\cdot(\ln y)'}$$

$$\Downarrow$$

$$y'=\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ \ldots\ \cdot f_n(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot\ \ldots\ \cdot g_k(x)}\cdot\left(+\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+\ldots+\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}-\frac{g_1'(x)}{g_1(x)}-\frac{g_2'(x)}{g_2(x)}-\ldots-\frac{g_k'(x)}{g_k(x)}\right)$$

Логарифмическая производная значительно упрощает нахождение производных дробно-рациональных и дробно-иррациональных функций

Пример Найдем производную функции $y=\dfrac{(x^7+6)(x^6+5)}{(x^5+4)(x^4+3)}$

Решение

$$y=\frac{(x^7+6)(x^6+5)}{(x^5+4)(x^4+3)}\Rightarrow\ \ln y=\ln\frac{(x^7+6)(x^6+5)}{(x^5+4)(x^4+3)}=$$

$$\Downarrow$$

$$=\ln(x^7+6)+\ln(x^6+5)-\ln(x^5+4)-\ln(x^4+3)$$

$$\boxed{(\ln y)'=\frac{y'}{y}}=\underbrace{\frac{7x^6}{(x^7+6)}+\frac{6x^5}{(x^6+5)}-\frac{5x^4}{(x^6+5)}-\frac{4x^3}{(x^6+5)}}_{\text{мысленно}}$$

$$\Downarrow$$

$$y'=\frac{(x^7+6)(x^6+5)}{(x^5+4)(x^4+3)}\cdot\left[\frac{7x^6}{(x^7+6)}+\frac{6x^5}{(x^6+5)}-\frac{5x^4}{(x^6+5)}-\frac{4x^3}{(x^6+5)}\right]$$

Производная сложной функции

1 Серия — Найдите производную функции

1 $y=(x^3-1)(x^2+1)(x+1)$	2 $y=\sqrt{3x-1}\cdot\sqrt{2x+1}\cdot\sqrt{x-1}$
3 $y=\dfrac{(3x+2)}{\sqrt{2x+3}\sqrt{3x-3}}$	4 $y=\dfrac{(1-3x)^2}{\sqrt[3]{3-x}\cdot(x^2-3)}$

Логарифмическая производная облегчает нахождение производных функций, представляющих собой комбинации различных элементарных функций

Пример Найдем производную функции $y=\dfrac{5^x\cdot(x^7+5)\cdot\arcsin 7x}{x^5\cdot(5x-7)}$

Решение

$$y=5^x\cdot(x^7+5)\cdot\arcsin 7x\cdot\frac{1}{x^5}\cdot\frac{1}{5x-7}$$
$$\Downarrow$$
$$\ln y=\ln\left[5^x\cdot(x^7+5)\cdot\arcsin 7x\cdot\frac{1}{x^5}\cdot\frac{1}{5x-7}\right]$$
$$\Downarrow$$
$$\ln y=\ln 5^x+\ln(x^7+5)+\ln\arcsin 7x-5\ln x-\ln(5x-7)$$
$$\Downarrow$$
$$(\ln y)'=\ln 5+\frac{7x^6}{x^7+5}+\frac{7}{\arcsin 7x\sqrt{1-49x^2}}-\frac{5}{x}-\frac{5}{5x-7}$$

Так как

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}$$
$$\Downarrow$$
$$y'=\frac{5^x(x^7+5)\arcsin 7x}{x^5(5x-7)}\cdot\left[\ln 5+\frac{7x^6}{x^7+5}+\frac{7}{\arcsin 7x\sqrt{1-49x^2}}-\frac{5}{x}-\frac{5}{5x-7}\right]$$

2 Серия — Найдите производную функции

1 $y=\dfrac{e^x\cdot\sqrt{x}\cdot\ln x}{(1-x)\cdot\sin x}$	2 $y=\dfrac{\mathrm{tg}\,x\cdot\arccos x}{2^x\cdot x^2}$
3 $y=\dfrac{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}\cdot\cos^2 x}{(ex-1)^2\cdot\pi^5}$	4 $y=\dfrac{\ln x^5\cdot\mathrm{arctg}(3x-1)}{\sqrt{2x-7}\cdot 4^{2x+1}}$

9

Производная сложной функции

ПРОИЗВОДНАЯ ЛОГАРИФМА ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

Показательно-степенная функция
$$y = f(x)^{\varphi(x)}$$
$$\Downarrow$$
$$\ln y = \varphi(x)\cdot\ln f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{(\ln y)'}_{\frac{y'}{y}} = \underbrace{[\varphi(x)\cdot\ln f(x)]'}_{\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\varphi(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}} \Rightarrow \underbrace{\frac{y'}{y} = \varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\varphi(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}}_{\text{производная логарифма показательно-степенной функции}}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

$$y = f(x)^{\varphi(x)} \Rightarrow y' = y\cdot\left[\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\varphi(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right]=$$
$$\left[f(x)^{\varphi(x)}\right]' = f(x)^{\varphi(x)}\cdot\left[\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\varphi(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Пример

$$y = (\sin x)^x$$
$$\Downarrow$$
$$\ln y = x\cdot\ln\sin x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln\sin x + x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\Downarrow$$
$$y' = y\cdot[\ln\sin x + x\cdot\operatorname{tg}x]$$
$$\Downarrow$$
$$\left[(\sin x)^x\right]' = (\sin x)^x\cdot[\ln\sin x + x\cdot\operatorname{tg}x]$$

Формула производной логарифма показательно-степенной функции позволяет ускорить нахождение производной показательно-степенной функции

Пример

$$y = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x}\cdot\ln x$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\frac{y'}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)'\cdot\ln x + \frac{1}{x}\cdot(\ln x)'}$$

Производная логарифма заданной функции

$$y' = x^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\cdot\ln x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right) = x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{(1-\ln x)}{x^2}$$

Производная сложной функции

1 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$\dfrac{d\left(x^{\operatorname{tg} x}\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left[(\cos x)^{x}\right]}{dx}$	$\dfrac{d\left[(\sin x)^{\arccos x}\right]}{dx}$	$\dfrac{d\left[(\operatorname{arctg} x)^{\ln x}\right]}{dx}$

Правильное опознание вида функции
позволяет избежать ошибок
в определении правил нахождения сложных функций,
в структуре которых имеется основание и степень

Посмотрите и сравните!

Пример

$$\underbrace{y = x^{\sin x}}_{\text{показательно-степенная функция}} \Rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln x$$

$$\underbrace{\frac{y'}{y} = (\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)'}_{\text{мысленно}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[x^{\sin x}\right]' = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

Пример

$$\underbrace{y = \mathbf{a}^{\sin x}}_{\text{показательная функция}} \Rightarrow y' = \left(\mathbf{a}^{\sin x}\right)'$$

$$\underbrace{y'_x = \left(\mathbf{a}^{\sin x}\right)'_{\sin x} \cdot (\sin x)'_x}_{\text{мысленно}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\mathbf{a}^{\sin x}\right)' = \mathbf{a}^{\sin x} \cdot \ln \mathbf{a} \cdot \cos x$$

Пример

$$\underbrace{y = (\sin x)^{\mathbf{n}}}_{\text{степенная функция}} \Rightarrow y' = \left[(\sin x)^{\mathbf{n}}\right]'$$

$$\underbrace{y'_x = \left[(\sin x)^{\mathbf{n}}\right]'_{\sin x} \cdot (\sin x)'_x}_{\text{мысленно}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[(\sin x)^{\mathbf{n}}\right]' = \mathbf{n} \cdot (\sin x)^{\mathbf{n}-1} \cdot \cos x$$

2 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$\dfrac{\left[(\ln x)^{x}\right]'}{\left(x^{\ln 2}\right)'}$	$\dfrac{\left(x^{\ln x}\right)'}{\left[(\operatorname{tg} 3)^{x}\right]'}$	$\dfrac{\left(e^{\cos x}\right)'}{\left(\ln x^{\ln 2}\right)'}$	$\dfrac{\left[\left(\sqrt{x}\right)^{2x}\right]'}{\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)'}$

Информационная схема
«ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ»

$$\left[f^{\mathbf{n}}(x)\right]' = \mathbf{n}\,\frac{f^{\mathbf{n}}(x)}{f\ (x)}\cdot f'(x)$$

$$\underbrace{f\Big(\underbrace{\underbrace{\mathbf{k}}_{\text{множитель}}\cdot\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}}+\mathbf{p}}_{\text{линейный аргумент}}\Big)}_{\textit{функция}}$$

$$\left[f\,(\boxed{\mathbf{k}}\,x+\mathbf{p})\right]' = \boxed{\mathbf{k}}\cdot f'\,(\boxed{\mathbf{k}}\,x+\mathbf{p})$$

$$\underbrace{f(\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}})}_{\text{функция от } x}$$

$$\left[f\,(x)\right]' = f'(x)$$

$$\left[f\,(*)\right]'_{*} = f'_{*}(*)$$

$$\underbrace{f(\overbrace{*}^{\text{аргумент}})}_{\text{функция от } *}$$

Производная сложной функции

$$\left\{f\left[g(x)\right]\right\}'_{x} = f'_{g(x)}\,\left[g(x)\right]\cdot g'_{x}(x)$$

$$\boxed{\left\{f\left[g(x)\right]\right\}' = f'\,\left[g(x)\right]\cdot g'(x)}$$

Традиционное оформление

$$(\mathbf{arcsin}\,x)' = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-x^{\mathbf{2}}}}$$

$$(\mathbf{arccos}\,x)' = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-x^{\mathbf{2}}}}$$

$$(\mathbf{log_a}\,x)' = \frac{\mathbf{1}}{x\,\mathbf{ln\,a}}$$

$$\forall\ \mathbf{a}>\mathbf{0},\ \mathbf{a}\neq\mathbf{1}$$
$$\forall\ x\in\mathbf{R}$$

$$(\mathbf{ln}\,x)' = \frac{\mathbf{1}}{x}$$

$$(\mathbf{arctg}\,x)' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+x^{\mathbf{2}}}$$

$$(\mathbf{arcctg}\,x)' = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+x^{\mathbf{2}}}$$

$$\left[\mathbf{ln}\,\varphi\,(x)\right]' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

$$\left(f(x)^{\varphi(x)}\right)' = f(x)^{\varphi(x)}\cdot\left[\varphi'(x)\cdot\mathbf{ln}\,f(x)+\varphi(x)\,\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

Разные задачи

1 Тренажер

Для функции $f(x)=\sqrt[5]{x^4}$ найдите $f'_*(*)$ при различных значениях аргумента $*$, если

1 $*=x$	2 $*=\sqrt[5]{x}$	3 $*=x^2$	4 $*=x^4$
5 $*=\sqrt[5]{x^4}$	6 $*=\dfrac{1}{x}$	7 $*=\dfrac{1}{x^2}$	8 $*=\dfrac{1}{x^4}$

2 Тренажер

Найдите производную

1 $\left(\dfrac{e^{7x}}{7}\right)'$	2 $\left(\dfrac{e^{6-x}}{\sqrt{2^x}}\right)'$	3 $\left(3^x\cdot e^{\frac{x}{\ln 3}}\right)'$	4 $\left(e^{\ln 8^{2x-5}}\right)'$

3 Тест

Найдите

результат	1	$\ln 2$	e^x	$\dfrac{8}{e^{4x}}$	$\dfrac{e^2}{e^x}$	$\dfrac{2}{e^x}$	2^x	$-\ln 2$	$-\dfrac{8}{e^{4x}}$
$\dfrac{2^e}{e^x}\cdot\left(\dfrac{e^x}{2^e}\right)'$									
$\dfrac{2^x}{e^2}\cdot\left(\dfrac{e^2}{2^x}\right)'$									
$\dfrac{2e}{\ln 2}\cdot\left(\dfrac{2^x}{2e}\right)'$									
$\dfrac{2}{e^{2x}}\cdot\left(\dfrac{2}{e^{2x}}\right)'$									

4 Тренажер

По заданной $f\left[g(x)\right]$ составьте $f'_{g(x)}\left[g(x)\right]$

1 $\sin(\cos x)$	2 $(\sin x)^2$	3 $\dfrac{1}{2\sqrt{\cos x}}$	4 $-\dfrac{1}{\cos^2 x}$	5 $\cos\dfrac{1}{x}$

6 Тест

Найдите производную	$\frac{-2}{x^2+4x+5}$	$\frac{2}{1+4x^2}$	$\frac{1}{2(1+x^2)}$	$\frac{1}{1+2x^2}$	$\frac{-4}{4+x^2}$	$\frac{-4}{4x^2+4x+5}$
$[2\,\mathrm{arcctg}(x+2)]'$						
$[\mathrm{arctg}\,2x]'$						
$\left[2\,\mathrm{arcctg}\frac{x}{2}\right]'$						
$\left[\frac{\mathrm{arctg}\,x+2}{2}\right]'$						
$\left[\mathrm{arcctg}\frac{1+2x}{2}\right]'$						

7 Докажите, что

$$\forall\, x\in \mathbf{R},\ \forall\, \mathbf{a}>0,\ \mathbf{a}\neq 1$$

$$\left(\mathbf{a}^x\cdot \log_{\mathbf{a}} x\right)' = \mathbf{a}^x\left(\ln x+\frac{1}{x\cdot \ln \mathbf{a}}\right)$$

8 Докажите, что

$$\forall\, x\in \mathbf{R},\ \forall\, \mathbf{a}>0,\ \mathbf{a}\neq 1$$

$$\left(\frac{\mathbf{a}^x}{\ln x}\right)' = \frac{\mathbf{a}^x}{\ln x}\cdot\left(\ln \mathbf{a}-\frac{1}{x\ln x}\right)$$

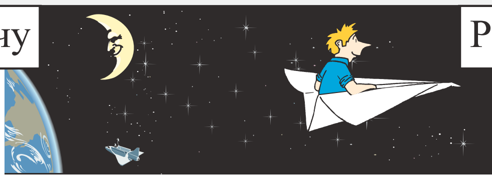
9 Тест

Определите аргумент, по которому взята производная	$\cos x$	$\sin x$	$\mathrm{tg}x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}x$
$\sin'\cos x=\cos\cos x$							
$\cos'\sin x=\sin\sin x$							
$\arcsin'\sin x=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$							
$\arccos'\mathrm{tg}x=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2 x}}$							
$\mathrm{arctg}x'\cos x=\frac{1}{1+\cos^2 x}$							

10 Тест Определите возможные способы дифференцирования

функции	*по формуле*			*по теореме*		*предварительное логарифмирование*
	$(\mathbf{a}^x)'$	$(x^{\mathbf{a}})'$	$(\log_{\mathbf{a}} x)'$	$[\mathbf{a}\,f(x)]'$	$[f(\mathbf{a}x)]'$	
$(\sin 3)^x$						
$\sin 3x$						
$\dfrac{\ln x}{\ln 3}$						
$x^{\sin x}$						
$3^{\sin x}$						

11 Решите задачу



Решите задачу **12**

Тело удаляется от Земли по закону $S(t) = A(t+\mathbf{c})^{\frac{2}{3}}$

Составьте формулу

его скорости | его ускорения

13 Тест Определите функцию по результату ее дифференцирования

	$y = x^2 \cdot g(x)$	$y = [g(x)]^2$	$y = \dfrac{g(x)}{x^2}$	$y = \dfrac{x^2}{g(x)}$	$y = \dfrac{1}{g(x)}$
$y' = 2x \cdot g(x) + x^2 g'(x)$					
$y' = 2g(x) \cdot g'(x)$					
$y' = \dfrac{x \cdot g'(x) - 2g(x)}{x^3}$					
$y' = \dfrac{2x}{g(x)} - \dfrac{x^2 g'(x)}{g^2(x)}$					
$y' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$					

Таблица производных

$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{k}\cdot x+\mathbf{p}$	$\mathbf{k}$
$x^{\mathbf{n}}$	$\mathbf{n}\cdot x^{\mathbf{n-1}}$
$\dfrac{1}{x^{\mathbf{n}}}$	$-\dfrac{\mathbf{n}}{x^{\mathbf{n+1}}}$
$\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}$	$\dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\,x\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}$
$\dfrac{1}{\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}$	$-\dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\cdot\dfrac{1}{x\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}$
$\mathbf{a}^x$	$\mathbf{a}^x\cdot\ln\mathbf{a}$
$\mathbf{e}^x$	$\mathbf{e}^x$
$\log_{\mathbf{a}}x$	$\dfrac{1}{x\cdot\ln\mathbf{a}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\,x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\,x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$-\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\cos x}$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\dfrac{\mathrm{ctg}\,x}{\sin x}$
$\mathrm{arctg}\,x$ $-\mathrm{arcctg}\,x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\arcsin x$ $-\arccos x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Правила дифференцирования

$$\left[f(x)\right]'_{|x=\mathbf{a}}=f'(\mathbf{a})$$

$$\left[\mathbf{k}\cdot f(x)\right]'=\mathbf{k}\cdot f'(x)$$

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=u'\frac{1}{v}+u\cdot\left(\frac{1}{v}\right)'$$

$$\left[f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\right]'=\mathbf{k}\cdot f'(\mathbf{k}x+\mathbf{p})$$

$$\left[f^{\mathbf{n}}(x)\right]'=\mathbf{n}\,\frac{f^{\mathbf{n}}(x)}{f\ (x)}\cdot f'(x)$$

$$\left\{f\left[g(x)\right]\right\}'=f'\left[g(x)\right]\cdot g'(x)$$

$$\left[\ln\varphi(x)\right]'=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

$$\left[f(x)^{\varphi(x)}\right]'=f(x)^{\varphi(x)}\cdot\left[\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Зачет

Вариант 1

1 Докажите, что если

a $f(x) = x + \cos x$, $g(x) = (x + \cos x)^2$, то $\dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 2(x + \cos x)$

b $f(x) = 5^x - 3x^2$, $g(x) = \ln(5^x - 3x^2)$, то $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = f(x)$

2 Докажите, что если

a $y = \dfrac{k}{\cos x}$, то $y' = \operatorname{tg} x \cdot y$

b $y = \dfrac{\sin x}{x}$, то $x y' + y = \cos x$

3 Найдите

a $$\frac{\left(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x\right)'}{\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)'}$$

b $$\left(\frac{\dfrac{1}{\sin x} - 3^x}{\ln 3 + \dfrac{1}{\cos x}}\right)'$$

4 Докажите, что $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{Z}$ $\left(\dfrac{\ln^{n+1} x}{n+1}\right)' = \dfrac{\ln^n x}{x}$

5 Докажите, что $$\frac{\left[\dfrac{u}{p} - \dfrac{p}{u}\right]'}{(u'p - up')} = \frac{u^2 - p^2}{u^2 p^2}$$

6 Решите неравенство $f'(x) > g'(x)$, если

a $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}$, $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$

b $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $g(x) = x - x^3$

Зачет

Вариант 2

1 Решите неравенство $f'(x) > g'(x)$, если

a $f(x) = \dfrac{5^{2x+1}}{2}$, $g(x) = 5^x + 4x\ln 5$

b $f(x) = x + \ln(x-5)$, $g(x) = \ln(x-1)$

2 Найдите

a $\left[\dfrac{1}{\cos f(x)}\right]' \cdot \dfrac{\cos f(x)}{\operatorname{tg} f(x)}$

b $\left(\dfrac{\dfrac{1}{f(x)} + g(x)}{f(x) + \dfrac{1}{g(x)}}\right)'$

3 Докажите, что функция $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

удовлетворяет уравнению $(1-x^2)y' - xy = 1$

4 Докажите, что $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$

5 Найдите $F'(x)$, если $F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$

6 Определите функцию y, производная которой равна

a $y' = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} - \dfrac{2}{x^2}$

b $y' = \dfrac{\ln 3}{\cos^2 x} + \dfrac{e^3}{\sin^2 x}$

7 Проверить, что для функции $f(x) = x^2$ справедливо соотношение

$$f'(a+b) = f'(a) + f'(b)$$

Будет ли это тождество справедливым для $f(x) = x^3$?

Зачет

Вариант 3

1 Доказать, что производная четной степенной функции есть нечетная функция, а производная от нечетной степенной функции – четная функция.

2 Найти производную

a $\left[\mathbf{e}^{x^2}+\mathbf{e}\cdot x^4\right]'_{x^2}$

b $\left[\sin^4 x^2\right]'_{x^{1/2}}$

3 **a** Проверить справедливость соотношения

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=\mathbf{1}$$

если x и y связаны зависимостью

$$y=\mathbf{a}x+\mathbf{b}$$

b Для функции

$$x=\mathbf{e}^{\mathbf{arctg}\,y}$$

найдите $\dfrac{dy}{dx}$

4 Для функции

$$z=\frac{\ln y}{\cos x}-\frac{1}{\sqrt{y}\,\sin x}$$

a найдите z'_x при условии, что $y=const$

b найдите z'_y при условии, что $x=const$

5 Найдите $F'(x)$, если

$$F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ (x)' & (x^2)' & (x^3)' \\ \left[(x)'\right]' & \left[(x^2)'\right]' & \left[(x^3)'\right]' \end{vmatrix}$$

6 Докажите, что

$$\left(\mathbf{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{\mathbf{k}}}+\ln\sqrt{x^2+\mathbf{k}}\right)'=\frac{x+\sqrt{\mathbf{k}}}{x^2+\mathbf{k}}$$

7 Из формулы $\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$ дифференцированием вывести формулу

$$\sin 3x=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$$

Список использованной литературы

1. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа: Учеб.для 10-11 кл. сред.шк. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1993.
2. Бохан К.А. Курс математического анализа. Т.1. Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед.ин-тов. Изд. 2-е. – М.: Просвещение, 1972.
3. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч. и др. Математический анализ в вопросах и задачах. Учебное пособие. Изд.2-е, перераб. – М.: Высшая школа, 1993.
4. Виленкин Н.Я., Бохан К.А. и др. Задачник по курсу математического анализа. Ч.1. – М.: Просвещение, 1971.
5. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Просвещение, 1964
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч.I. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1986.
7. Демидович Б.П. Сборник задая и упражнений по математическому анализу. – Изд. 8-е. М.: Наука, 1972.
8. Задачи по математике. Начала анализа: Справ. пособие / Вавилов В.В., Мельников И.И, Олехник С.Н., Пасиченко П.И. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
9. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – 3-е изд. – М.: Высшая школа, 1964.
10. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие для вузов. – 7-е изд., испр. – М.: Наука, 1989.
11. Мордкович А.Г., Солодовников А.С. Математичесикий анализ: Учеб. для техникумов. – М.: Высшая школа, 1990.
12. Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002.
13. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике: [Пер. с англ.] /Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – 3-е изд. – М.: "Мир", 1976.
14. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.1.– Изд. 4-е. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960.

СОДЕРЖАНИЕ

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

Резник Наталия Александровна
Негодяева Лариса Егоровна

Начальные представления о дифференциальном исчислении:
Визуальный конспект-практикум.

Научные редакторы:
Н.М. Ежова, кандидат педагогических наук, Мурманский институт экономики и права, доцент кафедры общественных и естественных наук.
И.С. Темникова, аспирант Мурманского государственного педагогического университета, преподаватель кафедры общенаучных дисциплин филиала БИЭПП в г. Мурманске.

Физические интерпретации: Светлана Владимировна Плотникова
Редактирование и апробация: Негодяева Лариса Егоровна
Компьютерный набор: Наталия Александровна Резник

Печатается по решению РИСа ЛОИРО
Подписано в печать 09.09.2005

Отпечатано на ризографе. Бумага № 1. Усл. печ. л. 4,75. Тираж 300 экз.
Заказ № 191

Ленинградский областной институт развития образования
197136, СПб, Чкаловский пр., 25 а

Полезные пределы

$$\Delta x = x - x_0 \to 0 \;\Downarrow\; f(x) \to f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{c} = \mathbf{c}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{число}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$$

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Если существуют пределы,

$$\lim_{x \to x_0} [\mathbf{c} \cdot f(x)] = \mathbf{c} \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

число выносится за знак предела

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

предел суммы/разности равен сумме/разности пределов

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

предел произведения равен произведению пределов

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \qquad \boxed{\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0}$$

предел частного равен частному пределов
при условии, что предел знаменателя не равен нулю

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^n$$

предел степени равен степени предела

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)}$$

предел корня равен корню из предела

то существуют пределы!

Если существуют пределы,

то существуют пределы,

Если существуют пределы,

то существуют пределы!

Замечательные пределы

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\mu} - 1}{x} = \mu$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathbf{a}^x - 1}{x} = \ln \mathbf{a}$$