Н.А. РЕЗНИК

Начальные представления о технике интегрирования

Визуальный конспект-практикум

ИНСТИТУТ ПРОДУКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ
ЦПО «ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

Н.А. РЕЗНИК

Начальные представления о технике интегрирования

Визуальный конспект-практикум

Санкт-Петербург
2001

УДК 512.83(07)
ББК 22.143. я7

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. - СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. - 72 с.

Визуальный конспект-практикум ориентирован на формирование начальных представлений по разделу "Неопределенный интеграл" курса высшей математики. Конспект разработан для студентов 1-го курса Мурманского государственного технического университета. В сборнике имеется более 300 задач и упражнений различного уровня сложности. Избыточность банка задач сформирована с целью помочь обучающимся вспомнить основные положения соответствующей темы "Алгебра и начала анализа", а также восстановить утраченные знания и навыки по другим разделам школьного курса математики. Большинство примеров пособия могут быть использованы в качестве дидактических материалов в 11-х классах с углубленным изучением математики.

Составление самостоятельных работ и ответов ко всем задачам практикума осуществлено Казаковой Г.Б.

Наталия Александровна Резник,
Неопределенный интеграл: Визуальный коспект-практикум

Редакторы Авдеева Е.Н., Казакова Г.Б., Плотникова С.В.

ISBN 5-89733-040-9

Утверждено к печати Редакционно-издательским Советом
ЦПО "Информатизация образования" Института продуктивного обучения Российской академии образования
ЛР № 071477 от 25.07.97
Подписано к печати с оригинал-макета 5.06.01.
Тираж 200 экз.

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

1 ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

$$\underbrace{\left[F(x)\right]'}_{\text{задана}} = \underbrace{f(x)}_{\text{ищем}}$$

Основная задача дифференцирования

Основная задача: ***дифференцирование***

По заданной $F(x)$ находится $f(x)$: $F'(x) = f(x)$

$$\boxed{F(x),\ f(x):\ x \in \langle a;b \rangle}$$

$\Downarrow$ $\Uparrow$

Обратная задача: ***интегрирование***

По заданной $f(x)$ находится $F(x)$: $f(x) = F'(x)$

Основная задача интегрирования

$$\overbrace{\left[F(x)\right]'}^{\text{ищем}} = \overbrace{f(x)}^{\text{задана}}$$

ВВЕДЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ

$$\boxed{F(x),\ f(x):\ x \in \langle a;b \rangle}$$

$$\underbrace{\left[F(x)\right]'}_{\text{Первообразная}} = \underbrace{f(x)}_{\text{Производная}}$$

Первообразная для $f(x)$

Производная от $F(x)$

$$\left[\overbrace{F(x)+C}\right]' = \overbrace{f(x)}$$

C – произвольная постоянная

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ПРИМЕР

$$\left[\underbrace{\sin x}\right]' = \underbrace{\cos x}$$

Основная задача дифференцирования

Для $\sin x$ имеем: $\sin' x = \cos x$

$$\Downarrow \quad \boxed{\sin x, \cos x: \ x \in (-\infty; +\infty)} \quad \Uparrow$$

Для $\cos x$ имеем: $\cos x = \sin' x$

Основная задача интегрирования

$$\left[\overbrace{\sin x}\right]' = \overbrace{\cos x}$$

ПРИМЕР

$$\boxed{\sin x, \cos x: \ x \in (-\infty; +\infty)}$$

$$\left[\underbrace{\sin x}_{\text{Первообразная для } \cos x}\right]' = \underbrace{\cos x}_{\text{Производная от } \sin x}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{lcl} [\sin x + 1]' & = & \cos x \\ [\sin x + 10]' & = & \cos x \\ [\sin x - 100]' & = & \cos x \end{array}$$

$$\Uparrow$$

$$\left[\overbrace{\sin x + C}^{\text{Первообразная для } \cos x}\right]' = \overbrace{\cos x}^{\text{Производная от } \sin x}$$

C – *произвольная постоянная*

2 ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

СВЯЗЬ МЕЖДУ ФУНКЦИЕЙ И ЕЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛОМ

$$F(x),\ f(x):\ x \in \langle a;b\rangle$$

$$\boxed{[F(x)]' = f(x)} \qquad F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x) = f(x)\,dx \qquad \boxed{dF(x) = f(x)\,dx}$$

Операция нахождения

производной — *дифференциала*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ

$F(x)$ называется первообразной для $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{d}F(x) = F'(x)\,\mathbf{d}x}$$

$$\Downarrow$$

$$F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{d}F(x) = f(x)\,\mathbf{d}x$$
$$\forall x \in \langle a;b\rangle$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

$$\left.\begin{matrix} f(x),\ F(x):\ \forall x \in \langle a;b\rangle \\ F(x): \\ f(x) = F'(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d\,\underbrace{F(x)}_{\text{первообразной для функции } f(x)} = F'(x)\,dx = \underbrace{f(x)\,dx}_{\text{дифференциала от функции } F(x)}$$

Нахождение *первообразной* для функции $\boldsymbol{f(x)}$ … ***дифференциала*** от функции $\boldsymbol{F(x)}$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Восстановите отсутствующие данные

в таблице производных	в таблице дифференциалов

$$F'(x)=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x)=f(x)\,dx$$

1 Тренажер

1	$\left(\quad\right)' = \cos x$
2	$\left(\sqrt{x}\right)' =$
3	$\left(\quad\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
4	$\left[\ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]' =$
5	$\left(-\ln\cos x\right)' =$

2 Тренажер

$d\left(\quad\right) = \sin x\,dx$	1
$d\sqrt{x} = \quad dx$	2
$d \quad = -\dfrac{1}{\sin^2 x}dx$	3
$d\ln x =$	4
$d\ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} =$	5

Оформите равенство

$$d\,f(x) = f'(x)\,dx$$

3 Тренажер

1	$d\sin x =$
2	$d\sin 2x =$
3	$d\sin\dfrac{x}{2} =$
4	$d\sin\sqrt{x} =$
5	$d\sin\dfrac{1}{x} =$

4 Тренажер

$d\sin x^2 =$	1
$d\cos(x+1) =$	2
$d\operatorname{tg}\dfrac{1}{x^2} =$	3
$d\operatorname{arctg}\sqrt{x} =$	4
$d\arccos\dfrac{1}{x} =$	5

5 Докажите, что $d\dfrac{a^x}{\ln a} = a^x\,dx$

6 Докажите, что $d\ln\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{1}{x^2-1}dx$

3 ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

МНОЖЕСТВО ПЕРВООБРАЗНЫХ

$\forall\, x \in \langle a\,;b\rangle$

$F(x),\ f(x):$

$F'(x) = f(x)$

$\Downarrow$

$F(x)$ – первообразная для $f(x)$

$\Downarrow$

$[F(x)+C]' = \boxed{F'(x) + C' = F'(x)} = f(x)$

где C – произвольная постоянная

$\Downarrow$

$F(x) + C$ – первообразная для $f(x)$

$\Downarrow$

$F(x) + C$ – множество первообразных для $f(x)$
$\forall\, x \in \langle a\,;b\rangle$,
где C – произвольная постоянная

СВЯЗИ МЕЖДУ ПЕРВООБРАЗНЫМИ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ФУНКЦИИ

Пусть
$F_1(x),\ F_2(x),\ f(x):$

$$\left.\begin{aligned} F_1'(x) &= f(x) \\ F_2'(x) &= f(x) \\ F_1'(x) &\neq F_2'(x) \end{aligned}\right\}\ \forall\, x \in \langle a;b\rangle \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &F_1'(x) = F_2'(x) \\ &\Downarrow \\ &F_1'(x) - F_2'(x) = \left[F_1(x) - F_2(x)\right]' = \\ &\Downarrow \qquad\qquad = \mathbf{0} = [\,\mathbf{C}\,]' \\ &F_1(x) - F_2(x) = \mathbf{C} \quad \forall\, x \in \langle a;b\rangle \end{aligned}$$

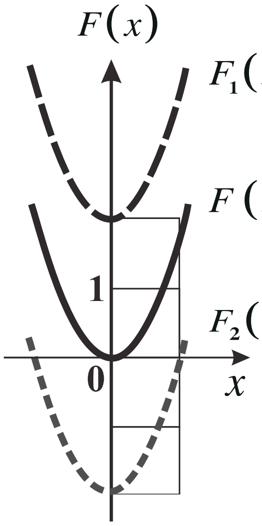
Две различные первообразные одной и той же функции, определенной в некотором промежутке, с о в п а д а ю т с точностью до постоянной
(отличаются друг от друга на **const**)

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пример

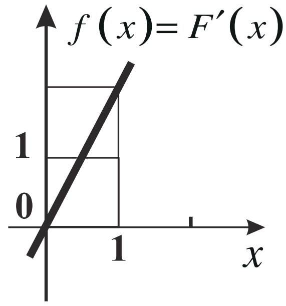
$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a; b \rangle$$



$$F_1(x) = x^2 + 2 \Longrightarrow F_1'(x) = 2x$$

$$F(x) = x^2 \Longrightarrow F'(x) = 2x$$

$$F_2(x) = x^2 - 2 \Longrightarrow F_2'(x) = 2x$$



$$\left(x^2 + \mathrm{C}\right)' = 2x \quad \forall x \in R$$

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ	
$f(x)$	$F(x)$ $+C$
$\mathbf{n}x^{\mathbf{n-1}}$	$x^{\mathbf{n}}$ $+C$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbf{ln}\lvert x \rvert$ $+C$
$\mathbf{cos}\, x$	$\mathbf{sin}\, x$ $+C$
$\dfrac{1}{\mathbf{cos}^2 x}$	$\mathbf{tg}\, x$ $+C$
$\dfrac{2x}{\left(1 + x^2\right)^2}$	$\dfrac{1}{1 + x^2}$ $+C$

Функция, для которой находится первообразная

Множество первообразных для исходной функции

1 Серия. Восстановите отсутствующие данные в оформлении перехода от функции к ее первообразной

1. $2x \to \square$
2. $3x^{\square} \to x^3$
3. $\square\, x^{-\frac{1}{2}} \to x^{\frac{1}{2}}$
4. $3x^{\square} \to 9x^{\frac{1}{3}}$
5. $\square \to x^{-\frac{4}{5}}$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

4 ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ КАК МНОЖЕСТВО ПЕРВООБРАЗНЫХ

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{F(x)+\boxed{C}}_{\text{неопределенный интеграл функции } f(x)} \iff \Big[\underbrace{F(x)+\boxed{C}}_{\text{множество всех первообразных для } f(x)}\Big]' = f(x)$$

$\Downarrow$ *Нахождение первообразной для $f(x)$*

$\Downarrow$ *Нахождение производной от $F(x)$*

C – заранее не определено

Операция нахождения множества первообразных для заданной функции называется

и н т е г р и р о в а н и е м

ОБЪЕДИНЕНИЕ ТАБЛИЦ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbf{k}x+\mathbf{p}$	$\mathbf{k}\dfrac{x^2}{2}+\mathbf{p}x$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ $\boxed{+C}$

$f(x)$	$F(x)$
$\mathbf{k}x+\mathbf{p}$	$\mathbf{k}\dfrac{x^2}{2}+\mathbf{p}x$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

Функция

дифференцирование → **Производная**

интегрирование → **Первообразная** $\boxed{+C}$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

РАСШИРЕННАЯ ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

Производная — Первообразная $\boxed{+C}$

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}x+\mathbf{p}$	$\mathbf{k}\frac{x^2}{2}+\mathbf{p}x$
$\mathbf{n}x^{\mathbf{n}-1}$	$x^{\mathbf{n}}$	$\frac{x^{\mathbf{n}+1}}{\mathbf{n}+1}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\frac{2x}{(1+x^2)^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\, x$

2 Тренажер

Запишите неопределенный интеграл как множество первообразных

1	$\int x^3 dx =$
2	$\int \frac{1}{x} dx =$
3	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$
4	$\int \frac{1}{1+x^2} dx =$
5	$\int \cos x\, dx =$

3 Докажите, что

$$\int\left(\frac{x}{\mathbf{k}}-\frac{1}{\mathbf{p}}\right)dx=\frac{x^2}{2\mathbf{k}}-\frac{x}{\mathbf{p}}+C$$

1 Тренажер

Запишите неопределенный интеграл как множество первообразных

1	$\int(\mathbf{k}x+\mathbf{p})dx$
2	$\int(3x+2)dx$
3	$\int(2x+3)dx$
4	$\int\left(x-\frac{1}{3}\right)dx$
5	$\int\left(-\frac{1}{2}x-3\right)dx$

4 Докажите, что

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$$

$$\lvert x\rvert=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

5 Докажите, что

$$\int\frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{1+x^2}+C$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

СТРУКТУРА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

символ интеграла

$$\underbrace{\int}_{} \quad \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{подынтегральная функция}} \quad \underbrace{d\;\overbrace{x}^{\text{переменная интегрирования}}}_{\text{дифференциал независимой переменной}}}_{\text{подынтегральное выражение}}$$

Пример

В интеграле $\int \mathbf{tg}\,\mathbf{2}x\,dx$

подынтегральное выражение $-\ \mathbf{tg}\,\mathbf{2}x\,dx$

подынтегральная функция $-\ \mathbf{tg}\,\mathbf{2}x$

аргумент $-\ \mathbf{2}x$

переменная интегрирования $-\ x$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

СВОЙСТВО	Доказательство
$\boxed{d\int}\overbrace{f(x)\,dx}^{\text{подынтегральное выражение}} = f(x)\,dx$	***Дифференциал от неопределенного интеграла*** равен ***подынтегральному выражению*** $d\int f(x)\,dx = d\left[F(x)+C\right] = dF(x) + \underbrace{dC}_{0} = dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$ **Пример** $\boxed{d\int}\mathbf{cos\,5}x\,dx = \mathbf{cos\,5}x\,dx$
$\left[\int \overbrace{f(x)}^{\text{подынтегральная функция}}\,dx\right]' = f(x)$	***Производная от неопределенного интеграла*** равна ***подынтегральной функции*** $\left[\int f(x)\,dx\right]'\cdot dx = d\boxed{\int f}(x)\,dx = f(x)\,dx$
$\boxed{\int d}F(x) = F(x) + \underbrace{C}_{\text{с точностью до постоянной}}$	***Неопределенный интеграл дифференциала функции*** равен ***самой функции* с точностью до постоянной** $\int d\,F(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$ **Пример** $\boxed{\int d}\,\mathbf{cos\,5}x = \mathbf{cos\,5}x + C$
$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$	***Неопределенный интеграл от производной функции*** равен ***самой функции* с точностью до постоянной** $\int f'(x)\,dx = \boxed{\int d}f(x) = f(x) + C$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1 Тренажер

	Запишите результат преобразований
1	$\int d\,\mathbf{cos}\,x =$
2	$d\int d\sqrt{x} =$
3	$\int d\,\mathbf{ln}\,\mathbf{sin}\,x =$
4	$d\int d\,\mathbf{tg}\,x =$
5	$\int d\left(x^{\mathbf{2}} - x + \mathbf{1}\right) =$

2 Тренажер

	Запишите результат преобразований
1	$\left[\int x\,dx\right]' =$
2	$\left[\int \mathbf{cos}\,x\,dx\right]' =$
3	$\int\left[-\,\mathbf{ctg}\,x\right]' dx =$
4	$\int\left[\mathbf{ln}\,\mathbf{sin}\,x\right]' dx =$
5	$\left[\int \frac{\mathbf{1}}{x}dx\right]' =$

3 Тест

Найдите интеграл	$\mathbf{tg}\,x$	$\mathbf{tg}\,x + C$	$\mathbf{tg}\,x\,dx$	$\mathbf{tg}\,x\,dx + C$	$-\,\mathbf{ln}\left\|\,\mathbf{cos}\,x\,\right\|$	$-\,\mathbf{ln}\left\|\,\mathbf{cos}\,x\,\right\| + C$
$\int \mathbf{tg}\,x\,dx$						
$\left[\int \mathbf{tg}\,x\,dx\right]'$						
$\int d\ \mathbf{tg}\,x$						
$d\int \mathbf{tg}\,x\,dx$						

4 Докажите, что

если $F'(x) = f(x)$, то $\int f(x)dx - \int dF(x) = C$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

6 ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

НЕЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИИ ОТ ОБОЗНАЧЕНИЯ ЕЕ АРГУМЕНТА

$$y(\,*\,) = f(\,*\,)$$

$y(\,x\,) = f(\,x\,)$	$y(\,\mathbf{n}\,) = f(\,\mathbf{n}\,)$
$y(\,\alpha\,) = f(\,\alpha\,)$	$y(\,\mathbf{0}\,) = f(\,\mathbf{0}\,)$
$y(\,t\,) = f(\,t\,)$	$y(\,\mathbf{k}\,) = f(\,\mathbf{k}\,)$

ВАЖНОЕ СВОЙСТВО ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛОВ

$$\int f(\,*\,)\,d\,* = F(\,*\,) + C$$

В таблице интегралов
обозначения
аргумента подынтегральной функции
и
переменной интегрирования
могут быть
изменены
(***одновременно!***)

Пример

$$\int \boxed{*}\ d\,\boxed{*} = \frac{\boxed{*}^{\,2}}{\mathbf{2}} + C$$

$$\int \boxed{y}\ d\,\boxed{y} = \frac{\boxed{y}^{\,2}}{\mathbf{2}} + C$$

$$\int \boxed{\mathbf{cos}\,t}\ d\,\boxed{\mathbf{cos}\,t} = \frac{\left(\boxed{\mathbf{cos}\,t}\right)^{2}}{\mathbf{2}} + C$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ $f\left(x \pm \mathbf{p}\right)$

$$x' = \boxed{=\ \mathbf{1}\ =} \quad \left(x \pm \mathbf{p}\right)'$$

$$dx = \qquad d\left(x \pm \mathbf{p}\right)$$

$$\int f\left(x \pm \mathbf{p}\right) dx = \underbrace{\int f\left(x \pm \mathbf{p}\right) d\left(x \pm \mathbf{p}\right)}_{\text{применение важного свойства таблицы интегралов}} =$$

$$= \overbrace{F\left(x \pm \mathbf{p}\right)} + C$$

Пример

$$\int \mathbf{cos}\left(t + \mathbf{1}\right) d\,t =$$

$$= \underbrace{\int \mathbf{cos}\left(t + \mathbf{1}\right) d\left(t + \mathbf{1}\right) =}_{\text{мысленно}}$$

$$= \mathbf{sin}\left(t + \mathbf{1}\right) + C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1 Тест — Найдите значение функции

$y(*) = \dfrac{1}{1+(*)^2}$ при	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
$* = 2$												
$* = \sqrt{2}$												
$* = \frac{1}{2}$												
$* = \frac{1}{\sqrt{2}}$												
$* = \frac{2}{\sqrt{2}}$												

2 Серия — Заполните пропуски в задании функции

$$y(\ *\ ) = \frac{2(\ *\ )}{\left[1+(\ *\ )^2\right]^2}$$

1 $$y(\ \mathbf{p}\ ) = \frac{2(\ \mathbf{p}\ )}{\left[1+(\quad)^2\right]^2}$$

2 $$y(\ x+\mathbf{k}\ ) = \frac{2(\qquad)}{\left[1+(\qquad)^2\right]^2}$$

3 $$y(\ x-\mathbf{kp}\ ) = \frac{2(\qquad)}{\left[\qquad\qquad\right]^2}$$

4 $$y(x+\ln \mathbf{p}) = \frac{\qquad}{\left[\qquad\qquad\right]^2}$$

5 $$y(x-\mathbf{e}^{\mathbf{p}-\mathbf{k}}) =$$

3 Серия — Найдите интеграл

1 $$\int \frac{dt}{\cos^2 t}$$

2 $$\int \frac{d(s+3)}{1+(s+3)^2}$$

3 $$\int \frac{d\alpha}{\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

4 $$\int \frac{d\vartheta}{\vartheta + \sin 3\pi}$$

5 $$\int \frac{d\omega}{1+\left(\omega - \log_2\sqrt{5}\right)^2}$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

Информационная схема
«ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

$\forall x \in \langle a; b\rangle$
$F(x)$ первообразная для $f(x)$,
если
$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a; b\rangle$

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{F(x) + C}_{\substack{\text{неопределенный}\\ \text{интеграл}\\ \text{функции } f(x)}} \quad \overset{C - \forall}{\Longleftrightarrow} \quad \Big[\underbrace{F(x) + C}_{\substack{\text{множество}\\ \text{всех первообразных}\\ \text{для } f(x)}}\Big]' = f(x)$$

СТРУКТУРА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$\int \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{подынтегральная функция}} \ \underbrace{d\,\overbrace{x}^{\text{переменная интегрирования}}}_{\text{дифференциал независимой переменной}}}_{\text{подынтегральное выражение}}$$

СТРУКТУРА ТАБЛИЦЫ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

Производная ← Функция → Первообразная $+C$

Производная	Функция	Первообразная
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}x + \mathbf{p}$	$\mathbf{k}\dfrac{x^2}{2} + \mathbf{p}x$

$$\int f(x \pm \mathbf{p})\,dx = \int f(x \pm \mathbf{p})\,d(x \pm \mathbf{p})$$

ОБРАТИМОСТЬ ОПЕРАЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\boxed{d\int} f(x)\,dx = f(x)\,dx \qquad \boxed{\int d}\, F(x) = F(x) + C$$

$$\left[\int \boxed{f(x)}\,dx\right]' = \boxed{f(x)}$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Самостоятельная работа 1

Вариант 1	1 $-\int \sin x\, dx$	2 $\int (2+x)\, dx$	3 $\int \frac{dt}{1+t^2}$
4 $\int \cos 2x\, d\,2x$	5 $\int \operatorname{tg}\frac{x}{2}\, d\frac{x}{2}$	6 $\int \frac{d s^2}{1+s^2}$	7 $\int 2\left(x^2\right)' dx$

Вариант 2	1 $\int (-\sin x)'\, dx$	2 $\int \frac{1}{\cos^2(x+2)}\, dx$	3 $\int \frac{d\sqrt{t}}{1+t}$
4 $\int \cos(5x-\alpha)\, d(5x+\alpha)$	5 $\int \operatorname{tg}\left(m+\frac{\pi}{4}\right) dm$	6 $\int \sqrt{x^2+1}\, dx^2$	7 $\int d\left[\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

Вариант 3	1 $\int \sin^2 x \cdot (\sin x)'\, dx$	2 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$	3 $\int \frac{d\left(\cos^2 2x\right)}{\cos^4 2x}$
4 $\left[\int (x)'\, dx\right]'$	5 $\int \operatorname{tg} x\, d\sqrt{\operatorname{tg} x}$	6 $\int (\operatorname{tg} s+3)\, d(\operatorname{tg} s-3)$	7 $\int (n-1)\cdot(n+1)\, dn^2$

ОТВЕТЫ

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Тренажер

С. 7, № 1		С. 7, № 2		С. 7, № 3	
1	$(\sin x)'=\cos x$	1	$d(-\cos x)=\sin x\,dx$	1	$\cos x\,dx$
2	$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	2	$d\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$	2	$2\cos 2x\,dx$
3	$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	3	$d\operatorname{ctg} x=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$	3	$\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}dx$
4	$\left[\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]'=\dfrac{1}{\cos x}$	4	$d\ln x=\dfrac{1}{x}dx$	4	$\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$
5	$(-\ln\cos x)'=\operatorname{tg} x$	5	$d\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{dx}{\sin x}$	5	$-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}dx$

Тренажер

С. 7, № 4		С. 11, № 1		С. 11, № 2		С. 13, № 1		С. 13, № 2	
1	$2x\cos x^2dx$	1	[illegible]	1	$\dfrac{x^4}{4}+C$	1	$\cos x+C$	1	x
2	$-\sin(x+1)dx$	2	$3\dfrac{x^2}{2}+2x+C$	2	$\ln\lvert x\rvert+C$	2	$d\sqrt{x}$	2	$\cos x$
3	$-\dfrac{2dx}{x^3\cos^2\dfrac{1}{x^2}}$	3	x^2+3x+C	3	$\operatorname{tg} x+C$	3	$\ln\lvert\sin x\rvert+C$	3	$-\operatorname{ctg} x+C$
4	$\dfrac{dx}{2\sqrt{x}(1+x^2)}$	4	$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{3}+C$	4	$\operatorname{arctg} x+C$	4	$d\operatorname{tg} x$	4	$\ln\lvert\sin x\rvert+C$
5	$\dfrac{dx}{x^2\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}$	5	$-\dfrac{x^2}{4}-3x+C$	5	$\sin x+C$	5	$\underbrace{(x^2-x+1)+C}_{C^*}$	5	$\dfrac{1}{x}$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

ОТВЕТЫ

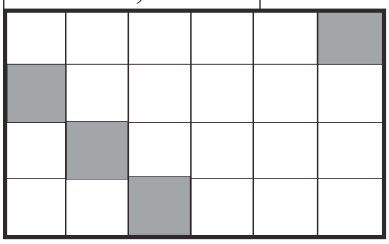
ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Серия

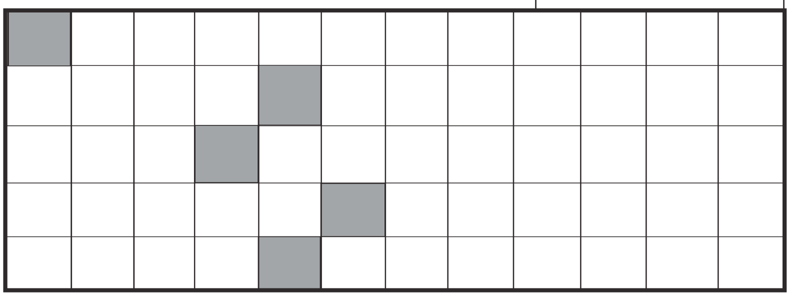
	С. 9, № 1		С. 15, № 2		С. 15, № 3
1	$\mathbf{2}x \to x^{\mathbf{2}}$	1	$\dfrac{\mathbf{2}(\mathbf{p})}{\left[\mathbf{1}+(\mathbf{p})^{2}\right]^{2}}$	1	$\mathbf{tg}\, t + C$
2	$\mathbf{3}x^{\mathbf{2}} \to x^{\mathbf{3}}$	2	$\dfrac{\mathbf{2}(x+\mathbf{k})}{\left[\mathbf{1}+(x+\mathbf{k})^{\mathbf{2}}\right]^{2}}$	2	$\mathbf{arctg}(s+\mathbf{3})+C$
3	$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}x^{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} \to x^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$	3	$\dfrac{\mathbf{2}(x-\mathbf{kp})}{\left[\mathbf{1}+(x-\mathbf{kp})^{\mathbf{2}}\right]^{2}}$	3	$\mathbf{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}\right)+C$
4	$\mathbf{3}x^{-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}} \to \mathbf{9}x^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}$	4	$\dfrac{\mathbf{2}(x+\mathbf{ln\,p})}{\left[\mathbf{1}+(x+\mathbf{ln\,p})^{\mathbf{2}}\right]^{2}}$	4	$\mathbf{ln}\left\|\vartheta+\mathbf{sin}\,\mathbf{3}\pi\right\|+C$
5	$-\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}x^{-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}}} \to x^{-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}}$	5	$\dfrac{\mathbf{2}(x-\mathbf{e}^{\mathbf{p}-\mathbf{k}})}{\left[\mathbf{1}+(x-\mathbf{e}^{\mathbf{p}-\mathbf{k}})^{\mathbf{2}}\right]^{2}}$	5	$\mathbf{arctg}\left(\omega-\mathbf{log_2}\sqrt{\mathbf{5}}\right)+C$

Тест

С. 13, № 3



С. 15, № 1



ОТВЕТЫ

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Задачи на доказательство

С. 7, № 4

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \left(a^x\right)' dx =$$

С.7. № 5

$$= d\left(\ln\sqrt{x-1} - \ln\sqrt{x+1}\right) = \left(\ln\sqrt{x-1} - \ln\sqrt{x+1}\right)' dx =$$

С. 11, № 3

1-й способ: $\int\left(\frac{x}{k} - \frac{1}{p}\right)dx = \int\left[\frac{1}{k}\cdot x + \left(-\frac{1}{p}\right)\right]dx = \cdots$

2-й способ: $\left(\frac{x^2}{2k} - \frac{x}{p} + C\right)' = \cdots$

С. 11, № 4

$x > 0 : |x| = x \Rightarrow (\ln x + C)' = \cdots$

$x < 0 : |x| = -x \Rightarrow [\ln(-x) + C]' = \cdots$

С. 11, № 5

$$\left(\frac{1}{1+x^2} + C\right)' = \cdots$$

С. 13, № 4

$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx - \int dF(x) = [F(x) + C_1] - [F(x) + C_2] = \cdots$