



1. Вынесение числа за знак интеграла	22
Вывод табличного интеграла	22
2. Свойства степеней и радикалов	24
3. Таблица степеней	26
4. Интеграл суммы	28
5. Алгебраические преобразования подынтегральной функции	30
6. Составляющие «неправильной» дроби	32
7. Свойства модулей	34
Свойства логарифмов	34
8. Разложение дроби $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$ на сумму простейших дробей ..	36
Интегрирование дроби $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$	36
9. Разложение дроби $\frac{kx+p}{(x-a)(x-b)}$ на сумму простейших дробей ..	38
Информационная схема «Линейность операции интегрирования» ..	40
Самостоятельная работа 2	41
Ответы	42
Подсказки к доказательствам	46

1

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ВЫНЕСЕНИЕ ЧИСЛА ЗА ЗНАК ИНТЕГРАЛА

$\mathbf{A} \neq 0$

$$F(x) : F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a ; b \rangle$$

$$\downarrow$$

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F(x) + C = \int f(x) dx$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{A} \cdot F'(x) = \mathbf{A} \cdot f(x) \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot F(x) + \mathbf{A} \cdot C = \mathbf{A} \cdot \int f(x) dx$$

$$\downarrow$$

$$[\mathbf{A} \cdot F(x)]' = \mathbf{A} \cdot f(x) \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot F(x) + C^* = \int \mathbf{A} \cdot f(x) dx$$

$$\downarrow$$

$$\int \mathbf{A} \cdot f(x) dx = \mathbf{A} \cdot F(x) + C^* = \mathbf{A} \cdot \int f(x) dx$$

ВЫВОД ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x) dx = F(x) + C$$

$$(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n \Leftrightarrow \int [(n+1) \cdot x^n] dx = x^{n+1} + C,$$

$$\downarrow$$

$\forall n > 0$

$$(n+1) \int x^n dx = x^{n+1} + C,$$

$$\downarrow$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$\downarrow$$

$\forall n > 0,$
 $n \neq 1$

$$\int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$$

$$\downarrow$$

$$\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$$

Пример

$$\int \frac{1}{x^{10}} dx =$$

$$= -\frac{1}{(10-1)x^{10-1}} + C =$$

$$= -\frac{1}{9} x^9 + C$$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1	Докажите, что
---	------------------

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm p}} dx = \sqrt{x \pm p} + C$$

2	Докажите, что
---	------------------

$$\int \left(x + \frac{p}{A} \right) dx = \frac{(Ax + p)^2}{2A^2} + C$$

3	Докажите, что
---	------------------

$$\int \frac{1}{Bx} dAx = \frac{A \ln|x|}{B} + C$$

Найдите интеграл

4 Т р е н а ж е р	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;">1</td><td>$\int x dx =$</td></tr> <tr> <td>2</td><td>$\int 5x^4 dx =$</td></tr> <tr> <td>3</td><td>$\int \frac{x^5}{4} dx =$</td></tr> <tr> <td>4</td><td>$\int \frac{5}{x^4} dx =$</td></tr> <tr> <td>5</td><td>$\int \left(-\frac{4}{x^5} \right) dx =$</td></tr> </table>	1	$\int x dx =$	2	$\int 5x^4 dx =$	3	$\int \frac{x^5}{4} dx =$	4	$\int \frac{5}{x^4} dx =$	5	$\int \left(-\frac{4}{x^5} \right) dx =$
1	$\int x dx =$										
2	$\int 5x^4 dx =$										
3	$\int \frac{x^5}{4} dx =$										
4	$\int \frac{5}{x^4} dx =$										
5	$\int \left(-\frac{4}{x^5} \right) dx =$										

5 Серия

Найдите интеграл

1	$\int 2(x+1)^2 dx =$
---	----------------------

2	$\int \frac{\sin(x+1)}{2} dx =$
---	---------------------------------

3	$\int \frac{1}{4x-2} dx =$
---	----------------------------

4	$\int \sqrt{e} \operatorname{tg}(x-1) dx =$
---	---

5	$\int \frac{2}{\pi \cos^2(x-\sqrt{\pi})} dx =$
---	--

2

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ И РАДИКАЛОВ

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

$$n, m \in R$$

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[m]{x} = \sqrt[n \cdot m]{x^{n+m}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x^{n-m}}$$

1

Докажите,
что

$$\int \sqrt[n]{x} \sqrt[m]{x} dx = \frac{x^{\frac{n+m}{n \cdot m}}}{\frac{n+m}{n \cdot m} + 1} + C$$

МАТРИЦА 2

Для каждого выражения выполните действия:

**АЛГОРИТМ
НАХОЖДЕНИЯ
ПЕРВООБРАЗНОЙ
ДЛЯ
СТЕПЕННОЙ
ФУНКЦИИ**

преобразуйте
в выражение
вида
 x^n

найдите
число
 $n+1$

запишите
первообразную
в виде
 $\frac{1}{n+1} x^{n+1}$

преобразуйте
полученную
первообразную
к виду,
аналогичному
исходному

$$x^2$$

$$\frac{1}{x^2}$$

$$\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$$

3

Докажите,
что

$$\int \frac{1}{\sqrt[k]{(x \pm p)^n}} dx = \frac{k}{k-n} \cdot \frac{x \pm p}{\sqrt[k]{(x \pm p)^n}} + C$$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

4

Докажите,
что

$$\int \sqrt[n]{nx} dx = \frac{\sqrt[n]{n^{1+n} x^{1+n}}}{1+n} + C$$

5

Докажите,
что

$$\int \frac{\sqrt[n]{A^{n-1}x}}{\sqrt[m]{B^{m-1}x}} dx = \frac{A \cdot \sqrt[m]{B}}{B \cdot \sqrt[n]{A}} \int \sqrt[\frac{n-m}{nm}]{x} dx$$

6

Докажите,
что

$$\int x \sqrt[n]{x} dx = \frac{nx^2 \sqrt[n]{x}}{2n+1} + C$$

7

Серия Найдите интеграл

1

$$\int (x \cdot x^{-1}) dx =$$

2

$$\int (x^{-2} \cdot x^3) dx =$$

3

$$\int (2x^2 \cdot 3x^{-3}) dx =$$

4

$$\int (2x)^{-2} \cdot x dx =$$

5

$$\int \frac{(x+2) \cdot [2(x+2)]^3}{2} dx =$$

3

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ТАБЛИЦА СТЕПЕНЕЙ		$k, n \in N$ $n \neq 1$
$f'(x)$ ↗		$f(x)$ ↗ $\int f(x) dx$
$n \cdot x^{n-1}$	↘	x^n ↘ $\frac{x^{n+1}}{1+n} + C$
↓	↓	↓
1	↘	$\frac{1}{x^n}$ ↘ 1
2	↘	$\sqrt[n]{x}$ ↘ 2
3	↘	$\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ ↘ 3
4	↘	$\sqrt[n]{x^k}$ ↘ 4
5	↘	$\frac{1}{\sqrt[n]{x^k}}$ ↘ 5

Запишите
результаты
дифференцирования интегрирования

3

Докажите,
что

$$\left[\frac{1}{(1-n)x^{n-1}} \right]' + \int \frac{n}{x^{n+1}} dx = C$$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

4

Докажите,
что

$$\int x^{\frac{n}{n+p}} dx = \\ = \frac{n \cdot \sqrt[n]{x^{2n+p}}}{2n+p} + C$$

5

Докажите,
что

$$\int x^k \sqrt[n]{x^p} dx = \\ = \frac{n \cdot x^{k+1} \cdot \sqrt[n]{x^p}}{kn+p+n} + C$$

6

Найдите интеграл

1

$$\int \sqrt{x+1} dx =$$

Трениажер

2

$$\int \sqrt[4]{x+1} dx =$$

4

$$\int \sqrt[5]{(x+1)^2} dx =$$

5

$$\int \sqrt[5]{(x-\sqrt{2})^3} dx =$$

7

Серия

Найдите интеграл

1

$$\int 2\sqrt{x} dx =$$

2

$$\int \sqrt{2x} dx =$$

3

$$\int \sqrt{\sqrt{2}x} dx =$$

4

$$\int \sqrt{\sqrt{2}x} dx =$$

5

$$\int \frac{\sqrt{x\sqrt{2x}}}{\sqrt{2}} dx =$$

4

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ИНТЕГРАЛ СУММЫ

$$]f(x), g(x): x \in \langle a ; b \rangle$$

$$F(x), G(x): \begin{array}{l} F'(x) = f(x) \\ G'(x) = g(x) \end{array} \quad \forall x \in \langle a ; b \rangle$$

$$F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x) \Leftrightarrow F(x) \pm G(x) + \underbrace{C_f \pm C_g}_C = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\begin{array}{ll} F'(x) = f(x) & \Leftrightarrow F(x) + C_f = \int f(x) dx \\ G'(x) = g(x) & \Leftrightarrow G(x) + C_g = \int g(x) dx \end{array}$$

$$[F(x) \pm G(x)]' = f(x) \pm g(x) \Leftrightarrow F(x) \pm G(x) + C = \int [f(x) \pm g(x)] dx$$

Пример

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 6x + 1) dx &= \underbrace{\int [(x^2 + 6x + 9) - 8] dx}_{\text{мысленно}} = \int [(x+3)^2 - 8] dx = \\ &= \int (x+3)^2 dx - \int 8 dx = \underbrace{\int (x+3)^2 d(x+3)}_{\text{мысленно}} - \underbrace{8 \int dx}_{\text{мысленно}} = \frac{(x+3)^3}{3} - 8 + C \end{aligned}$$

Найдите интеграл

1

Трениажер

$$\int (x^2 + 2x + 2) dx =$$

2

Трениажер

$$\int (x^2 - 3x + 1) dx =$$

3

Трениажер

$$\int (x^3 + 3x^2 + 5x + 1) dx =$$

4

Трениажер

$$\int (x^3 - 3x^2 + 3x + 2) dx =$$

5

Трениажер

и сравните
результаты



Найдите интеграл

2

Трениажер

$$\int [(x+1)^2 + 1] dx =$$

1

Трениажер

$$\int [(x-1)^2 - x] dx =$$

2

Трениажер

$$\int [(x+1)^3 + 2x] dx =$$

3

Трениажер

$$\int [(x-1)^3 - x + 1] dx =$$

4

Трениажер

$$\int [(x+1)^3 + x] dx =$$

5

Трениажер

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

3

Докажите,
что

$$a > 0, \neq 1: \int [e^x + a^x] dx = e^x + \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Найдите интеграл

1

$$\int \left(x^5 + \frac{1}{\sqrt[5]{x}} - \frac{x}{5} \right) dx$$

4

2

$$\int (1 - \sqrt{x} + x) dx$$

Т
р
е
н
а
ж
е
р

3

$$\int \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{3x} \right) dx$$

4

$$\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{2} + 2\sqrt{x^3} \right) dx$$

5

$$\int \left(\frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{5x\sqrt{x}}{2} \right) dx$$

5

Серия Найдите интеграл

1

$$\int [2^x + e^x] dx =$$

2

$$\int [x - \cos(x-2)] dx =$$

3

$$\int \left(\frac{e^{2+x}}{2} + \frac{e^x}{e^{2+x}} \right) dx =$$

4

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2(x-2)} - \frac{1}{\sin^2(x+2)} \right) dx =$$

5

$$\int \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1+2x}{2}\right)} - \frac{1}{\operatorname{ctg}(x-1)} + \frac{1}{\sin^2(x-2)} dx =$$

5

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \quad \text{Формулы} \quad x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

сокращенного умножения

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2) \quad x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 = (x \pm y)^3$$

Пример

$$\int \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx = \int \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} dx = \int (x^2 - x + 1) dx =$$

$$= \int x^2 dx - \int x dx + \int dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$$

Пример

$$\int \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) dx = \int (\sqrt{x} + 1) dx =$$

$$= \int \sqrt{x} dx + \boxed{\int d} x =$$

$$= \frac{2}{3} x \sqrt{x} + x + C$$

1

Докажите,
что

$$\int \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{x^2} + C$$

2

Докажите,
что

$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3 dx = 2\sqrt{x} \left(\frac{1}{5} x^2 \sqrt{x} - x^2 + 3x + 1 \right) + C$$

3

Докажите,
что

$$\int (x - \sqrt{x} + x\sqrt{x}) (x\sqrt{x} - \sqrt{x} - x) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + C$$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Найдите интеграл

4 Трениажер 1 $\int x(x-1)^2 dx$

2 $\int (1+x^2)^2 dx$

3 $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$

4 $\int \frac{(x+1)^2}{x} dx$

5 $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$

Найдите интеграл

5 Трениажер 1 $\int \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[4]{x}+2} dx$

2 $\int \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{2}} dx$

3 $\int \frac{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} dx$

4 $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1} dx$

5 $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}-2} dx =$

6

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

СОСТАВЛЯЮЩИЕ «НЕПРАВИЛЬНОЙ» ДРОБИ

$$\frac{kx+p}{rx+n} = \frac{k \cdot \left(x + \frac{p}{k} \right)}{r \cdot \left(x + \frac{n}{r} \right)} = \frac{k}{r} \cdot \left(\frac{x + \frac{p}{k}}{x + \frac{n}{r}} \right) =$$

$$= \frac{k}{r} \cdot \left(\frac{x + P}{x + N} \right) =$$

$$= \frac{k}{r} \cdot \left[\frac{(x+N)+(P-N)}{x+N} \right] = \frac{k}{r} \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{P-N}{x+N}}_{\text{простейшая дробь}} \right)$$

A
 $\frac{x+a}{x+a}$
 простейшая
 дробь

$$\frac{x+p}{x+n} =$$

$$= \frac{x+n + (p-n)}{x+n} =$$

$$= \frac{x+n}{x+n} + \frac{(p-n)}{x+n}$$

$\underbrace{x+n}_{\text{целая часть}}, \underbrace{\frac{(p-n)}{x+n}}_{\text{простейшая дробь}}$

Пример

$$\int \frac{x+7}{x-5} dx =$$

$$= \int \frac{(x-5)+(7+5)}{x-5} dx = \int \left(1 + \frac{12}{x-5} \right) dx =$$

$$= \int dx + 12 \int \frac{dx}{x-5} = x + 12 \ln|x-5| + C$$

Пример

$$\frac{6x+1}{3x+5} = \frac{6 \cdot \left(x + \frac{1}{6} \right)}{3 \cdot \left(x + \frac{5}{3} \right)} = 2 \cdot \left(\frac{x + \frac{5}{3} + \frac{1}{6} - \frac{5}{3}}{x + \frac{5}{3}} \right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{\frac{3}{2}}{x + \frac{5}{3}} \right)$$

$$\downarrow$$

$$\int \frac{6x+1}{3x+5} dx = 2 \cdot \left[\int dx - \frac{3}{2} \cdot \int \frac{1}{x + \frac{5}{3}} dx \right] = 2 \cdot \left[x - \frac{3}{2} \cdot \ln \left| x + \frac{5}{3} \right| \right] + C$$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Разложите дробь на составляющие
и найдите

		производную	1			интеграл
Трениажер	2				1	
	2				2	
	3				3	
	4				4	
	5				5	

$$\frac{x+2}{x+1} =$$

$$\frac{x-1}{x} =$$

$$\frac{x-1}{x+2} =$$

$$\frac{1-x}{x+1} =$$

$$\frac{x+2}{2-x} =$$

Серия 4		разложите на составляющие	и найдите интеграл
Каждую дробь			
1	$\frac{2x-1}{x-2}$		
2	$\frac{x+2}{2x+1}$		
3	$\frac{3x-2}{2x-3}$		
4	$\frac{x}{1-2x}$		
5	$\frac{2x-3}{2-3x}$		

7

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

СВОЙСТВА МОДУЛЕЙ

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

$$|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$$

$$\frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|$$

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\forall x > 0$$

$$\log_x x = 1$$

$$\forall y > 0, \neq 1$$

$$x^{\log_x y} = y$$

$$\forall x > 0$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a |x|$$

Пример

$$\int \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} \right) dx =$$

$$= \underbrace{\int \frac{1}{x+3} dx + \int \frac{1}{x-3} dx}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

Мысленное преобразование

$$= \underbrace{\int \frac{d(x+3)}{x+3} dx + \int \frac{d(x-3)}{x-3} dx}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

Мысленное преобразование

$$= \ln|x+3| + \ln|x-3| + C =$$

$$= \underbrace{\ln|(x+3) \cdot (x-3)| + C}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

Мысленное преобразование

$$= \ln|x^2 - 9| + C$$

Пример

$$\int \left(\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x-2} \right) dx =$$

$$= \underbrace{\int \frac{2}{x-3} dx - \int \frac{3}{x-2} dx}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

Мысленное преобразование

$$= \underbrace{2 \cdot \int \frac{dx}{x-3} - 3 \cdot \int \frac{dx}{x-2}}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

Мысленное преобразование

$$= \underbrace{2 \cdot \int \frac{d(x-3)}{x-3} dx - 3 \cdot \int \frac{d(x-2)}{x-2} dx}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

Мысленное преобразование

$$= 2 \ln|x-3| + 3 \cdot \ln|x-2| + C =$$

$$= \underbrace{\ln(x-3)^2 - \ln(x-2)^3 + C}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= \ln \frac{(x-3)^2}{|x-2|^3} + C$$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1 Тест

Найдите соответствующую подынтегральную функцию

по заданной первообразной	$\frac{4}{x+1} - \frac{3}{x-1}$	$\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x+1}$	$\frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-1}$	$\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x+1}$	$\frac{3}{x+1} - \frac{4}{x-1}$
$\ln \frac{(x+1)^4}{ x-1 ^3}$					
$\ln \frac{ x-1 ^3}{(x+1)^4}$					
$\ln \frac{ x+1 ^3}{(x-1)^4}$					
$\ln \frac{(x-1)^4}{ x+1 ^3}$					
$\ln \left \frac{x+1}{x-1} \right ^3$					

2 Серия

Найдите интеграл

1 $\int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx =$

2 $\int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx =$

3 $\int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx =$

4 $\int \left(\frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2} \right) dx =$

5 $\int \left(\frac{2}{2x+1} + \frac{3}{3x+1} \right) dx =$

8

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$
НА СУММУ ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

Простейшая дробь

$$\frac{A}{x+a}$$

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)}$$

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} \stackrel{\Leftrightarrow}{=} \frac{A(x-b) + B(x-a)}{(x-a)(x-b)}$$

$$= A(x-b) + B(x-a)$$

$$1 + 0 \cdot (x-b) + 0 \cdot (x-a) = 0 + A(x-b) + B(x-a)$$



$$\text{при } x=a: 1 = A(a-b) + B \cdot 0 \Rightarrow A = \frac{1}{a-b}$$

подстановка

$$\text{при } x=b: 1 = A \cdot 0 + B(b-a) \Rightarrow B = \frac{1}{b-a}$$

$$\frac{1}{(a-b)(x-a)} + \frac{1}{(b-a)(x-b)} = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ
ДРОБИ $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} &= \\ \frac{1}{(a-b)} \cdot \int \frac{d(x-a)}{(x-a)} + \frac{1}{(b-a)} \cdot \int \frac{d(x-b)}{(x-b)} &= \\ = \frac{\ln|x-a|}{(a-b)} + \frac{\ln|x-b|}{(b-a)} + C & \end{aligned}$$

1 Докажите, что дробь $\frac{1}{kx+p}$
 можно преобразовать в простейшую

2 Докажите, что

$$\int \frac{dx}{kx+p} = \frac{\ln|x+\frac{p}{k}|}{k} + C$$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

3 Серия

Каждую дробь разложите на простейшие дроби

1 $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$

2 $\frac{1}{(1-x)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$

3 $\frac{1}{x(x-2)}$

4 $\frac{1}{x^2-\frac{1}{4}}$

5 $\frac{1}{x(2x-1)}$

Приведите
интеграл к виду,
удобному для интегрирования

Найдите интеграл

1	
2	
3	
4	
5	

4 Трениажер

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$$

$$\int \frac{dx}{(1-x)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\int \frac{dx}{x(x-2)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-\frac{1}{4}}$$

$$\int \frac{dx}{x(2x-1)}$$

1	
2	
3	
4	
5	

5 Трениажер

9

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ $\frac{kx+p}{(x-a)(x-b)}$
НА СУММУ ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

$$\frac{kx+p}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \quad \Leftrightarrow$$

$$kx+p = A(x-b) + B(x-a)$$



$$\text{при } x=a: ka+p = A(a-b) + 0 \Rightarrow A = \frac{ka+p}{a-b}$$

подстановка

$$\text{при } x=b: kb+p = 0 + B(a-b) \Rightarrow B = \frac{kb+p}{b-a}$$

$$\int \frac{kx+p}{(x-a)(x-b)} dx = \frac{ka+p}{a-b} \cdot \int \frac{d(x-a)}{x-a} + \frac{kb+p}{b-a} \cdot \int \frac{d(x-b)}{(x-b)} \quad \downarrow$$

Пример

$$\frac{3x-2}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$3x-2 = A(x+2) + B(x-3)$$



$$x=3 \Rightarrow 3 \cdot 3 - 2 = A(3+2) \Rightarrow A = \frac{7}{5}$$

$$x=-2 \Rightarrow 3 \cdot (-2) - 2 = B(-2-3) \Rightarrow B = \frac{8}{5}$$



$$\int \frac{3x-2}{(x-3)(x+2)} dx = \frac{7}{5} \int \frac{dx}{x-3} + \frac{8}{5} \int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{7}{5} \ln|x-3| + \frac{8}{5} \ln|x+2| + C$$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1	Тест	Определите коэффициенты дроби											
в ее разложении вида	$A =$	3	2	5	5	2	5	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	
$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$	$B =$	-2	-3	5	2	3	3	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	
$\frac{5x}{x^2 - 1}$													
$\frac{5x - 1}{x^2 - 1}$													
$\frac{5x + 1}{x^2 - 1}$													
$\frac{5 - x}{x^2 - 1}$													
$\frac{x + 5}{x^2 - 1}$													

2	Серия	Каждую дробь	разложите на простейшие	найдите интеграл
1		$\frac{1}{(x+1)(x-2)}$		
2		$\frac{2}{(x+1)(x-2)}$		
3		$\frac{2x}{(x+1)(x-2)}$		
4		$\frac{2x}{(x-1)(x+2)}$		
5		$\frac{1-x}{x^2-4}$		

**Информационная схема
«ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ»**

**СТРУКТУРА
НЕОПРЕДЕЛЕННОГО
ИНТЕГРАЛА**

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{подынтегральная функция}} dx$$

переменная интегрирования

дифференциал независимой переменной

подынтегральное выражение

**ГЛАВНЫЙ ПРИНЦИП
ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТАБЛИЦЫ**

$$\int f(*) dx = F(*) + C$$

**ЧИСЛОВОЙ МНОЖИТЕЛЬ
ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА**

$$\int A f(x) dx = A \cdot \int f(x) dx$$

ИНТЕГРАЛ СУММЫ

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x}{1+n} \cdot x^n + C$$

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C$$

$$\int \sqrt[n]{x^k} dx = \frac{n x}{k+n} \cdot \sqrt[n]{x^k} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[n]{x^k}} dx = \frac{k x}{k-n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x^{k-n}}} + C$$

Разложение дроби на простейшие

$$\begin{aligned} & \frac{kx+p}{rx+n} = \\ & = \frac{k}{r} \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{P-N}{x+N}}_{\text{простейшая дробь}} \right) \end{aligned}$$

$$\int \frac{kx+p}{(x-a)(x-b)} dx = A \int \frac{dx}{x-a} + B \int \frac{dx}{x-b}$$

**A и B
находятся
методом
подстановки**

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1	$\int \frac{\sin 3x}{3} dx$	2	$\int \frac{5}{x} d \frac{1}{5x}$	3	$\int \frac{3}{2} d \frac{2}{3} \sqrt{\cos x}$		
4	$\int \frac{\pi x - 1}{\pi x} d \pi x$	5	$\int \frac{3 dx}{(x+2)(1-x)}$	6	$\int \frac{2x-4}{(x-3)(x+1)} dx$	7	$\int (\operatorname{tg} 2x + 2x + 2) d 2x$

Вариант 2

1	$\int 4 \sin\left(\frac{x+4}{4}\right) d\left(\frac{x}{4} - 1\right)$	2	$\int [(\sqrt{x}-1)^3 - 1] d\sqrt{x}$	3	$\int \left(\frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{3\sqrt{x}}\right) dx$		
4	$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx$	5	$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$	6	$\int \frac{1+x}{15x - 3x^2 - 12} dx$	7	$\int (2 \operatorname{tg} x \cdot \cos x - 3 \operatorname{ctg} x \cdot \sin x) dx$

Вариант 3

1	$\int \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{\ln 3} + \frac{\ln 3}{3}\right)}{\ln 3} d \frac{3x}{\ln 3}$	2	$\int [(\sqrt{x}-1)^2 + 1] dx$	3	$\int \frac{\cos 3x}{3} d 9x$		
4	$\frac{27}{4} \int \frac{4 \ln x}{9} d \frac{2}{3} \sqrt{\ln x}$	5	$\int \frac{x-1}{x^3 + x^2 - 2x} dx$	6	$\int \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$	7	$\int \frac{\sin^2 e^x - \cos^2 e^x}{\sin^2 e^x \cdot \cos^2 e^x} d e^x$

ОТВЕТЫ

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Тренажер

C. 23, № 4		C. 26, № 1		C. 27, № 2		C. 25, № 6	
1	$x^5 + C$	1	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	1	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	1	$\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C$
2	$\frac{2x^6}{3} + C$	2	$\frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$	2	$\frac{nx\sqrt[n]{x}}{n+1} + C$	2	$\frac{4}{5}(x+1)\sqrt[4]{x+1} + C$
3	$\frac{4}{3x^3} + C$	3	$-\frac{1}{nx\sqrt[n]{x}}$	3	$\frac{1}{\sqrt[n]{x}} \cdot x \cdot \frac{n}{1-n} + C$	3	$\frac{5}{7}(x+1)\sqrt[5]{(x+1)^2} + C$
4	$-\frac{5}{4x^4} + C$	4	$\frac{k\sqrt[n]{x^k}}{nx}$	4	$\frac{nx\sqrt[n]{x^k}}{n+k} + C$	4	$\frac{5}{8}(x-\sqrt{2})\sqrt[5]{(x-\sqrt{2})^3} + C$
5	$\frac{5}{3x^3} + C$	5	$-\frac{k}{nx\sqrt[n]{x^k}}$	5	$-\frac{k\sqrt[n]{x^{n-k}}}{n-k} + C$	5	$\frac{4}{9}(x-1)^2(x-1)^{\frac{1}{4}} + C$

Тренажер

C. 28, № 1		C. 28, № 2		C. 29, № 4	
1	$\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + C$	1	$\frac{(x+1)^3}{3} + x + C$	1	$\frac{x^6}{6} + \frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4} - \frac{x^2}{10} + C$
2	$\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + x + C$	2	$\frac{(x-1)^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$	2	$x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$
3	$\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{5x^2}{2} + x + C$	3	$\frac{(x+1)^4}{4} + x^2 + C$	3	$\frac{x}{3} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + C$
4	$\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{3x^2}{2} + 2x + C$	4	$\frac{(x-1)^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + C$	4	$6\sqrt[3]{x} - \frac{3x}{2} + \frac{4}{5}x\sqrt{x^3} + C$
5	$\frac{x^4}{4} + x^3 + 2x^2 + x + C$	5	$\frac{(x+1)^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C$	5	$-\frac{4}{\sqrt{x}} + x^2\sqrt{x} + C$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ОТВЕТЫ

Тренажер

C. 31, № 4	C. 31, № 5	C. 33, № 1	C. 33, № 2
1 $\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$	1 $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - 2x + C$	1 $1 + \frac{1}{x+1}$	1 $-\frac{1}{(x+1)^2}$
2 $x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + C$	2 $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + \sqrt{2}x + C$	2 $1 - \frac{1}{x}$	2 $\frac{1}{x^2}$
3 $-\frac{1}{x} - 2\ln x + x + C$	3 $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + x + C$	3 $1 - \frac{3}{x+2}$	3 $\frac{3}{(x+2)^2}$
4 $\frac{x^2}{2} + 2x + \ln x + C$	4 $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - x + C$	4 $-1 + \frac{2}{x+1}$	4 $-\frac{2}{(x+1)^2}$
5 $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$	5 $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + C$	5 $-1 - \frac{4}{x-2}$	5 $\frac{4}{(x-2)^2}$

Тренажер

C. 33, № 3	C. 37, № 4	C. 37, № 5
1 $x + \ln x+1 + C$	1 $\frac{1}{3} \left[\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} \right]$	1 $\frac{1}{3} \ln \left \frac{x-1}{x+2} \right + C$
2 $x - \ln x + C$	2 $-\frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+\frac{1}{2}}$	2 $\frac{2}{3} \ln \left \frac{2x+1}{2(1-x)} \right + C$
3 $x - 3\ln x+2 + C$	3 $\frac{1}{2} \left[\int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x} \right]$	3 $\frac{1}{2} \ln \left \frac{x-2}{x} \right + C$
4 $-x + 2\ln x+1 + C$	4 $\int \frac{dx}{x-\frac{1}{2}} - \int \frac{dx}{x+\frac{1}{2}}$	4 $\ln \left \frac{2x-1}{2x+1} \right + C$
5 $-x - 4\ln x-2 + C$	5 $-\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-\frac{1}{2}}$	5 $\ln \left \frac{2x-1}{2x} \right + C$

ОТВЕТЫ

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Матрица		C. 24, № 2	
x^2	3	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{x^3}{3}$
x^{-2}	-1	$\frac{1}{-1}x^{-1}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$x^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}}$	$2\sqrt{x}$
$x^{-\frac{4}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{1}x^{-\frac{1}{3}}$	$-\frac{3}{3}\sqrt[3]{x}$

Серия		C. 23, № 5	C. 25, № 7
1		$\frac{2(x+1)^3}{3} + C$	$x + C$
2		$-\frac{\cos(x+1)}{2} + C$	$\frac{x^2}{2} + C$
3		$\frac{1}{4} \ln \left x - \frac{1}{2} \right + C$	$6 \ln x + C$
4		$-\sqrt{e} \ln \cos(x-1) + C$	$\frac{1}{4} \ln x + C$
5		$\frac{2}{\pi} \operatorname{tg}(x - \sqrt{\pi}) + C$	$\frac{4(x+2)^5}{5} + C$

Серия

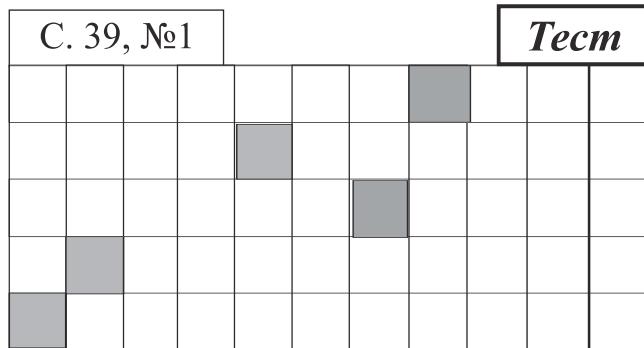
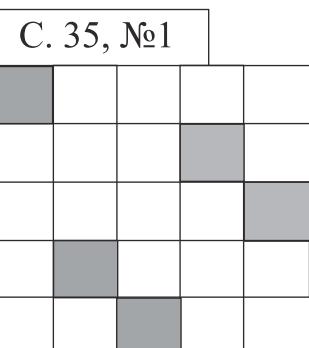
C. 27, № 7		C. 29, № 5		C. 33, № 4	
1	$\frac{4x\sqrt{x}}{3} + C$	1	$\frac{2^x}{\ln 2} + e^x + C$	1	$2x + 3 \ln x-2 + C$
2	$\frac{2\sqrt{2}x\sqrt{x}}{3} + C$	2	$\frac{x^2}{2} - \sin(x-2) + C$	2	$\frac{x}{2} + \frac{3}{4} \ln \left x + \frac{1}{2} \right + C$
3	$\frac{2\sqrt[4]{2}x\sqrt{x}}{3} + C$	3	$\frac{e^{2+x}}{2} + \frac{x}{e^2} + C$	3	$\frac{3}{2}x + \frac{5}{4} \ln \left x - \frac{3}{2} \right + C$
4	$\frac{4\sqrt[4]{2}x\sqrt[4]{x}}{5} + C$	4	$\operatorname{tg}(x-2) + \operatorname{ctg}(x+2) + C$	4	$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \ln \left x - \frac{1}{2} \right + C$
5	$\frac{4x\sqrt[4]{x^3}}{7\sqrt[4]{2}} + C$	5	$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}+x\right) + \ln \cos(x-1) - \operatorname{ctg}(x-2) + C$	5	$-\frac{2}{3}x + \frac{5}{9} \ln \left x - \frac{2}{3} \right + C$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ОТВЕТЫ

Серия

C. 35, № 2	C. 37, № 3	C. 39, № 2
1 $\ln x^2-3x+2 +C$	1 $\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}$	1 $\frac{1}{3} \ln \left \frac{x-2}{x+1} \right + C$
2 $\ln \left \frac{x+2}{x+3} \right + C$	2 $\frac{2}{3(1-x)} + \frac{2}{3\left(x+\frac{1}{2}\right)}$	2 $\frac{2}{3} \ln \left \frac{x-2}{x+1} \right + C$
3 $\ln(x^2+3x+2)^2+C$	3 $-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x-2)}$	3 $\frac{1}{3} \ln(x+1)^2(x-2)^4 + C$
4 $\ln \frac{ x-3 ^3}{(x-2)^2} + C$	4 $\frac{1}{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$	4 $\frac{1}{3} \ln(x-1)^2(x+2)^4 + C$
5 $\ln 6x^2+5x+1 +C$	5 $-\frac{1}{x} + \frac{2}{2x-1}$	5 $-\frac{1}{4} \ln x-2 x+2 ^3 + C$



ОТВЕТЫ

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Задачи на доказательство

$$\text{C. 23, № 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x \pm p)}{\sqrt{x \pm p}} =$$

$$\text{C. 23, № 2} = \int \left(x + \frac{p}{A} \right) d\left(x + \frac{p}{A} \right) =$$

$$\text{C. 23, № 3} = \int \frac{A}{Bx} dx =$$

$$\text{C. 24, № 1} = \int x^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{m}} dx =$$

$$\text{C. 24, № 3} = \int (x \pm p)^{\frac{n}{k}} d(x \pm p) =$$

$$\text{C. 25, № 4} = n^{\frac{1}{n}} \int x^{\frac{1}{n}} dx =$$

$$\text{C. 25, № 5} = \frac{\sqrt[n]{A^{n-1}}}{\sqrt[m]{B^{m-1}}} \int \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{x}} dx =$$

$$\text{C. 25, № 6} = \int \sqrt[n]{x^{n+1}} dx =$$

$$\text{C. 26, № 3} = \frac{1}{(1-n)} \left[\frac{1}{x^{n-1}} \right]' + n \int \frac{dx}{x^{n+1}} =$$

$$\text{C. 27, № 4} = \int \sqrt[n]{x^{n+p}} dx =$$

$$\text{C. 27, № 5} = \int \sqrt[n]{x^{k \cdot n + p}} dx =$$

$$\text{C. 29, № 3} = (e^x)' + \frac{1}{\ln a} (a^x)' =$$

$$\text{C. 30, № 1} = \int \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) dx =$$

$$\text{C. 30, № 2} = \int \left(x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$\text{C. 30, № 3} = \int \left[(x\sqrt{x} - \sqrt{x})^2 - x^2 \right] dx =$$

$$\text{C. 36, № 1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\underbrace{x + \frac{p}{k}}_{}}$$

$$\text{C. 36, № 2} = \frac{1}{k} \cdot \int \frac{d\left(x + \frac{p}{k} \right)}{x + \frac{p}{k}} =$$