

1. Структура аналитического задания функции с параметрами .....	48
Постановка задачи .....	48
2. Конструирование дроби $\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ .....	50
Интегрирование дроби $\frac{kx^2 + mx + p}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ .....	50
3. Алгоритм разложения на простейшие дроби 1-го типа $\frac{k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \dots + k_{n-1} x + p}{(x-a_1)(x-a_2) \cdot \dots \cdot (x-a_n)(x-a_2)}$ .....	52
4. Схема выделения целой части дроби. ....	54
5. Корректировка переменной интегрирования ....	56
6. Простейшие тригонометрические преобразования ....	58
7. Интегрирование функций с линейным аргументом ....	60
8. Алгоритм корректировки переменной интегрирования .... Общая схема корректировки переменной интегрирования .... Информационная схема «Параметры подынтегральной функции» .... Самостоятельная работа 3 .... Ответы .... Зачет .... Использованная литература ....	62
.....	64
.....	65
.....	66
.....	71
.....	72

# 1

## ПАРАМЕТРЫ ПОДИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

### СТРУКТУРА АНАЛИТИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ С ПАРАМЕТРАМИ

$$y = \underbrace{\mathbf{A}}_{\substack{\text{параметр} \\ \text{функции}}} \cdot f(\underbrace{\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}}_{\substack{\text{аргумент} \\ \text{линейного} \\ \text{аргумента}}}) + \underbrace{\mathbf{B}}_{\substack{\text{параметр} \\ \text{функции}}}$$

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$$\begin{aligned} & \int [\mathbf{A} \cdot f(\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}) + \mathbf{B}] dx = \\ & = \mathbf{A} \cdot \int f(\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}) dx + \mathbf{B} \int dx = \\ & = \mathbf{A} \cdot \int f(\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}) d(x + \mathbf{p}) + \mathbf{B} x = ? \end{aligned}$$

Преобразуйте функцию  
к виду  $y = \mathbf{A} \cdot f(\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}) + \mathbf{B}$

<b>1</b>	1	$y = \frac{1}{2x}$	<b>2</b>	1	$y = 2\cos(1+3x)$	<b>3</b>	1	$y = \sqrt{7x}$
Трениажер			Трениажер			Трениажер		
2	2	$y = \frac{x}{2} + 3$	2	2	$y = \frac{1}{2\cos(1-3x)}$	2	2	$y = \sqrt{7x+7}$
				3	$y = \frac{\cos 3x + 1}{2}$		3	$y = \frac{7}{\sqrt{7x}}$
3	3	$y = \frac{3}{x} + 2$	3	4	$y = \frac{3\cos(x+2)-1}{3}$	4	4	$y = \frac{\sqrt{7x}}{7}$
				5	$y = \cos[2(x-3)]$	5	5	$y = \frac{7+\sqrt{x+7}}{\sqrt{7}}$
4	4	$y = \frac{2x+3}{x}$	4					
5	5	$y = \frac{2}{3x+2} + 1$	5					

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

<b>Серия 4</b>	постройте функцию с параметрами	при	<b>A=3π</b>	<b>B = -3</b>	<b>k = <math>\frac{1}{\sqrt{3}}</math></b>	<b>p = ln 3</b>
1 $f(x) = x$	$f(k \cdot x) + B$					
2 $f(x) = \frac{1}{x}$	$A \cdot f(k \cdot x + p)$					
3 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$A \cdot f(x + p) + B$					
4 $f(x) = \frac{1}{x^2}$	$A \cdot f(k \cdot x) + B$					
5 $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$f(k \cdot x + p) + B$					

<b>Серия 5</b>	Найдите интеграл
1	$\int [\sin x - \cos(x-1)] dx =$
2	$\int [e^{2x-1} - (2x)^e] d(2x) =$
3	$\int \left[ \frac{\operatorname{tg}(x-3)}{3} - 1 \right] dx =$
4	$\int \left( \frac{1}{\sqrt{2x}} + \sqrt{\frac{x}{2}} \right) dx =$
5	$\int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sqrt{2} \sin^2 x} \right) dx =$

# 2

## ПАРАМЕТРЫ ПОДИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

### КОНСТРУИРОВАНИЕ ДРОБИ

$$\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$\frac{1}{(x-a)} + \frac{1}{(x-b)} + \frac{1}{(x-c)} =$$

$$= \frac{(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)} =$$

$$= \frac{(x^2 - bx - cx - bc) + (x^2 - ax - cx - ac) + (x^2 - ax - bx - ab)}{(x-a)(x-b)(x-c)} =$$

$$= \frac{\overbrace{3x^2 - 2(a+b+c)x - (ab+ac+bc)}^{R(x)}}{(x-a)(x-b)(x-c)} =$$

$$= \frac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБИ

$$\frac{kx^2 + mx + p}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

Коэффициенты **A**, **B** и **C**  
находятся  
методом подстановки

$$\underbrace{\frac{kx^2 + mx + p}{(x-a)(x-b)(x-c)}}_{I} = \underbrace{\frac{A}{x-a}}_{I} + \underbrace{\frac{B}{x-b}}_{II} + \underbrace{\frac{C}{x-c}}_{III}$$

$$\int \frac{kx^2 + mx + p}{(x-a)(x-b)(x-c)} dx = A \cdot \int \frac{dx}{x-a} + B \cdot \int \frac{dx}{x-b} + C \cdot \int \frac{dx}{x-c} =$$

$$= A \cdot \ln|x-a| + B \cdot \ln|x-b| + C \cdot \ln|x-c| + C$$

$$= \ln(|x-a|^A \cdot |x-b|^B \cdot |x-c|^C) + C$$

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

<b>ПРИМЕР</b>	$\frac{5-x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$ $\Downarrow$ $5-x = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$
	$x = 1 \Rightarrow 5-1 = A(1-2)(1-3) \Rightarrow A = 2$
	$x = 2 \Rightarrow 5-2 = B(2-1)(2-3) \Rightarrow B = -3$
	$x = 3 \Rightarrow 5-3 = C(3-1)(3-2) \Rightarrow C = 1$
	$\int \frac{(5-x)dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{\Downarrow}{2 \cdot \int \frac{dx}{x-1} - 3 \cdot \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3}} =$ $= 2 \cdot \ln x-1  - 3 \cdot \ln x-2  + \ln x-3  + C$ $= \ln \frac{(x-1)^2  x-3 }{ x-2 ^3} + C$

МАТРИЦА 1		Для каждой дроби		
<b>РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ</b>	определите количество простейших дробей, на которые ее можно разложить	представьте данную дробь в виде суммы простейших дробей	определите числовой коэффициент каждой простейшей дроби	найдите интеграл
$\frac{2x}{x^2-1}$				
$\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}$				
$\frac{6x^2-3x+1}{x(x-1)(x+1)}$				
$\frac{3x^2-2x-4}{(x^2-4)(x-1)}$				
$\frac{x^2-4x+4}{(x-1)(4-x^2)}$				

# 3

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

### АЛГОРИТМ РАЗЛОЖЕНИЯ НА ПРОСТЕЙШИЕ

ДРОБИ     $\frac{k_1x^{n-1} + k_2x^{n-2} + \dots + k_{n-1}x + p}{(x-a_1)(x-a_2) \cdot \dots \cdot (x-a_n)}$

$$\frac{k_1x^{n-1} + k_2x^{n-2} + \dots + k_{n-1}x + p}{(x-a_1)(x-a_2) \cdot \dots \cdot (x-a_n)}$$

Количество множителей знаменателя заданной дроби

равно

количество простейших дробей I типа

$$= \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \dots + \frac{A_{n-1}}{(x-a_{n-1})} + \frac{A_n}{(x-a_n)}$$

Числовые коэффициенты простейших дробей находятся методом подстановки

### Серия 1

Разложите дробь на простейшие

1     $\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)}$

2     $\frac{2x-1}{x(x+1)(x+2)}$

3     $\frac{2x-1}{x^2 - 4}$

4     $\frac{2x-1}{(x^2 - 4)(x+1)}$

5     $\frac{2x-1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

МАТРИЦА 2	Для каждой дроби			
РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ	представьте данную дробь в виде суммы простейших дробей	определите числовой коэффициент каждой простейшей дроби	найдите производную и упростите	найдите первообразную и упростите
$\frac{5x - 2}{x(x-1)}$				
$\frac{3x - 2}{x(x-2)}$				
$\frac{x + 3}{x^2 - 1}$				
$\frac{1 + 7x}{x(2-x)(x+1)}$				
$\frac{x^2 - 2x - 2}{x(x^2 - x - 2)}$				

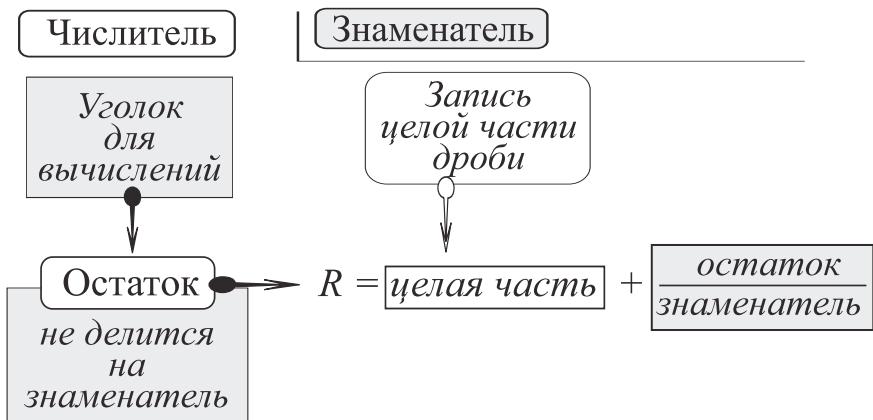
## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

### СХЕМА ВЫДЕЛЕНИЯ ЦЕЛОЙ ЧАСТИ ДРОБИ

Если у дроби степень числителя **больше или равна** степени знаменателя

$$R = \frac{k_1 x^{n+s} + \dots + k}{p_1 x^n + \dots + p}$$

то выделение целой части дроби можно осуществлять «делением уголком»



### ПРИМЕР

$$I = \int \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x - 2)} dx = ?$$

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x - 2)} =$$

для удобства вычислений в числителе учитываются все степени переменной  $x$  с соответствующими коэффициентами

$$= \frac{x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c}
 \frac{x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \\
 \hline
 -x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x \\
 \hline
 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \\
 \hline
 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 \\
 \hline
 3x^2 \quad -3
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 I = \underbrace{\int (x+2) dx}_{\text{непосредственное применение таблицы}} + 3 \underbrace{\int \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x+1)(x-2)} dx}_{\substack{\text{разложение} \\ \text{подынтегральной дроби} \\ \text{на простейшие}}}
 \end{array}$$

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

МАТРИЦА 1  РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ НА СОСТАВЛЯЮЩИЕ	Для каждой дроби				
	запишите		разложите знаменатель остатка на множители	разложите остаток на простейшие дроби	найдите интеграл
	целую часть	остаток			
$\frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 3x + 2}$					
$\frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 7x + 12}$					
$\frac{2x^2 - 3x - 7}{x^2 + x - 6}$					
$\frac{3x - 2x^3 - 9x^2 + 1}{x^2 + 6x + 8}$					
$\frac{x^3 + 8x^2 + 11x + 38}{x^3 + 8x^2 + 19x + 12}$					

# 5

## ПАРАМЕТРЫ ПОДИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

### КОРРЕКТИРОВКА ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$k \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x), F(x) : F'(x) &= f(x) \quad \forall x \in \langle a; b \rangle \\ \frac{1}{k} \cdot d(kx) &= \frac{k}{k} \cdot d(x) = d(x) \quad \downarrow \\ d(x) &= \frac{1}{k} \cdot d(kx) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \int \underbrace{f(kx)}_{\substack{\text{трудно} \\ \text{для} \\ \text{преобразования}}} dx &= \int f(kx) \cdot \underbrace{\frac{1}{k} \cdot d(kx)}_{\substack{\text{элементарные} \\ \text{преобразования}}} = \\ &= \frac{1}{k} \int f(kx) d(kx) = \\ &= \frac{1}{k} F(kx) + C \end{aligned}$$

### ПРИМЕР

Вынесение числа  
за знак интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x}}}_{\substack{1-\text{й способ}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{x} + C = \sqrt{2x} + C$$

1-й способ

2-й способ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \underbrace{\frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{\sqrt{2x}}}_{\substack{\text{Корректировка} \\ \text{переменной интегрирования}}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2x} + C = \sqrt{2x} + C$$

Корректировка  
переменной интегрирования

### ПРИМЕР

Осуществите в исходном задании  
корректировку переменной интегрирования  $I = \int \frac{dx}{\sin \sqrt{5}x}$   
и найдите интеграл

Анализ

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d\sqrt{5}x}{\sin \sqrt{5}x}$$

Решение

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\sqrt{5}x}{2} \right| + C$$

## ПАРАМЕТРЫ ПОДИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Восстановите переменную интегрирования	
1	$\int \cos 2x d\boxed{\phantom{00}} = \sin 2x + C$
2	$\int \operatorname{ctg}(-3x) d\boxed{\phantom{00}} = -\ln \sin 3x  + C$
3	$\int \sin \frac{1}{4}x d\boxed{\phantom{00}} = -\cos \frac{x}{4} + C$
4	$\int \frac{1}{\cos^2 5x} d\boxed{\phantom{00}} = \operatorname{tg} 5x + C$
5	$\int \frac{d\boxed{\phantom{00}}}{\operatorname{ctg}\left(-\frac{1}{2}x\right)} = \ln\left \cos \frac{x}{2}\right  + C$

Мысленно измените в исходном задании переменную интегрирования, введите соответствующий множитель и найдите интеграл	
1	$\int 2 \cdot \operatorname{tg} x dx$
2	$\int \operatorname{ctg} 2x dx$
3	$\int (-2 \operatorname{ctg} 2x) dx$
4	$\int \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x dx$
5	$2 \int \operatorname{ctg}\left(-\frac{1}{2}x\right) dx$

Тест 3		$\frac{e^x}{2} + C$	$2e^x + C$	$e^{2x} + C$	$\frac{e^{2x}}{2} + C$	$\frac{e^2 e^{2x}}{2} + C$	$2e^{2x} + C$	$e^{4x} + C$	$e^2 + C$	$e^{2x+2} + C$
Найдите интеграл	$2 \int e^x dx$									
	$\int e^{2x} dx$									
	$2 \int e^{2x} dx$									
	$\int e^2 dx$									
	$\int e^{2x+2} dx$									

# 6

## ПАРАМЕТРЫ ПОДИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

### ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

*Триногометрические тождества*

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \\ &= \cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

### ПРИМЕР

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx =$$

$$= \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \boxed{\int dx} =$$

*мысленное преобразование*

$$= \operatorname{tg} x - x + C$$

### ПРИМЕР

$$\int \cos^2(-3x) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \cos^2 3x d 3x =$$

*мысленное преобразование*

$$= \frac{1}{3 \cdot 2} \int 2 \cos^2 3x d 3x =$$

$$= \frac{1}{6} \int [1 + \cos(2 \cdot 3x)] d 3x =$$

*мысленное преобразование*

$$= \frac{1}{6} \left( \int d 3x + \int \cos 6x d 3x \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \left[ 3x + \frac{1}{2} \int \cos 6x d(2 \cdot 3x) \right] =$$

*мысленное преобразование*

$$= \frac{1}{6} \left[ 3x + \frac{1}{2} \sin 6x \right] + C$$

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Найдите интеграл	
1	$\int (\operatorname{tg}^2 x - 1) dx =$
2	$\int (\operatorname{ctg}^2 2x + 1) dx =$
3	$\int \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx =$
4	$\int \left( \operatorname{tg} \frac{x}{3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{3} - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} \right) dx =$
5	$\int [1 - \operatorname{tg} x]^2 dx =$

Серия 2		Найдите интеграл
1	$\int (\sin x \cdot \cos x) dx$	
2	$\int \frac{2 - \sin 2x}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx$	
3	$\int \frac{dx}{\cos 2x - \cos^2 x}$	
4	$\int \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 2x} dx$	
5	$\int \frac{3 - \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$	

# 7

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ АРГУМЕНТОМ

$k, p \neq 0$

$$F(x) : F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a ; b \rangle$$

$$\int f(kx + p) dx \stackrel{\downarrow}{=} \int f(kx + p) \cdot \frac{1}{k} \cdot d(kx) = \boxed{d(kx) =}$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \int f(kx + p) d(kx + p) =$$

$$= \frac{1}{k} \cdot F(kx + p) + C$$

### ПРИМЕР

$$\int \frac{4 dx}{\sqrt{2x - 7}} = ?$$

Анализ

Числовой множитель подынтегральной функции

$$\overbrace{4}^{\text{Числовой множитель подынтегральной функции}}$$

$\overbrace{2} \cdot x - \overbrace{7}$   
Параметры аргумента подынтегральной функции

Решение

$$\int \frac{4}{\sqrt{2x - 7}} dx =$$

$$= \frac{4}{2} \int \frac{1}{\sqrt{2x - 7}} d(2x - 7) =$$

$$= 4 \sqrt{2x - 7} + C$$

Серия 1 Найдите интеграл

1  $\int \frac{1}{(2-x)^2} dx =$

2  $\int \frac{1}{(x-3)^3} dx =$

3  $\int \frac{3}{(5x-4)^4} dx =$

4  $\int \frac{6}{(7-6x)^5} dx =$

Серия 2 Найдите интеграл

1  $\int 2x dx =$

2  $\int 2\alpha d\frac{\alpha}{2} =$

3  $\int \frac{5t}{3} d\frac{t}{3} =$

4  $\int \frac{3\theta}{2} d\frac{2\theta}{3} =$

5  $\int \frac{y-2}{7} d\frac{y}{7} =$

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Осуществите корректировку переменной интегрирования и найдите интеграл

**Трениажер**

1  $\int (2x+1)dx$

2  $\int \frac{dx}{2x-1}$

3  $\int \left(\frac{x}{3}-3\right)^2 dx$

4  $\int \frac{dx}{(\sqrt{2}x+2)^4}$

5  $\int 5\sqrt{5-\frac{x}{5}} dx$

**Трениажер**

Запишите результат, мысленно осуществив корректировку переменной интегрирования

1  $\int \operatorname{ctg} 2x dx$

2  $\int \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx$

3  $\int \frac{dx}{\sin^2(x-2)}$

4  $\int \frac{dx}{\cos^2\left(2x-\frac{1}{2}\right)}$

5  $\int \operatorname{ctg}\left(2-\frac{x}{\sqrt{2}}\right) dx$

**Тест 5**

Найдите первообразную для подынтегральной функции

$2^{x+2}$	$2x^2$	$x \ln 2$	$\ln x$	$\ln 2$	$4^x$	$x^2$	$\frac{2^{2x}}{\ln 2}$
-----------	--------	-----------	---------	---------	-------	-------	------------------------

$\int 2^{2x+1} dx$

$\int 2^{x+2} \ln 2 dx$

$\int 2x dx$

$\int 2x d2x$

$\int 4^x \ln 2 d2x$

# 8

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

### АЛГОРИТМ КОРРЕКТИРОВКИ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int f(kx+p) dx = \frac{1}{k} \cdot \int f(kx+p) d(k \cdot x) =$$

*Преобразование дифференциала*

$$= \frac{1}{k} \cdot \int (2x+1)^2 d(2x) =$$

*Добавление свободного члена к переменной интегрирования*

$$= \frac{1}{k} \cdot \int f(kx+p) d(kx+p) =$$

*Нахождение результата по таблице*

$$= \frac{1}{k} \cdot F(kx+p) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^3}{3} + C =$$

$$= \frac{(2x+1)^3}{6} + C$$

### ОБЩАЯ СХЕМА КОРРЕКТИРОВКИ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int f(kx+p) d(x) =$$

↓  
↓  
 $\cancel{k}$

$$= \frac{1}{k} \cdot F(kx+p) + C$$

Серия 1

Восстановите подынтегральную функцию

1  $\int (\ ? ) d x = - \cos x + C = \int (\ ? ) d x$

2  $\int (\ ? ) d 2x = - \operatorname{ctg} 2x + C = \int (\ ? ) d 2x$

3  $\int (\ ? ) d(3x+1) = \frac{(3x+1)^2}{2} + C = \int (\ ? ) d(3x+1)$

4  $\int (\ ? ) d \left( \frac{x}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C = \int (\ ? ) d \left( \frac{x}{2} \right)$

5  $\int (\ ? ) d(1-2x) = \cos(1-2x) + C = \int (\ ? ) d(1-2x)$

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Серия 2

Найдите интеграл

1  $\int \left( e^x - \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^x}{e^{2x}} \right) dx =$

2  $\int \left[ (\sin 2x \cdot \cos 2x)^2 + \frac{\cos^2 2x}{4} \right] dx =$

3  $\int \left( \frac{\operatorname{ctg}^2 3x}{3} - 1 \right) dx =$

4  $\int \left( \frac{1}{\sqrt{2x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{2}} \right) dx =$

5  $\int \left[ \frac{1}{\cos^2 \left( 1 + \frac{x}{2} \right)} - \frac{1}{\operatorname{ctg} \left( 1 - \frac{2x}{\sqrt{2}} \right)} \right] dx =$

Информационная схема  
«ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ»

$$y = \underbrace{\mathbf{A}}_{\substack{\text{параметр} \\ \text{функции}}} \cdot f \left( \underbrace{\mathbf{k}}_{\substack{\text{параметры} \\ \text{линейного}}} \cdot * + \underbrace{\mathbf{p}}_{\substack{\text{параметр} \\ \text{аргумента}}} \right) + \underbrace{\mathbf{B}}_{\substack{\text{параметр} \\ \text{функции}}}$$

**КОРРЕКТИРОВКА  
ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

$$\int f(x + p) dx = \int f(x + p) d(x + p)$$

$$\int f(kx) dx = \frac{1}{k} \int f(kx) d(kx)$$

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ  
ФУНКЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ АРГУМЕНТОМ**

$$\int f(kx + p) dx = \frac{\int f(kx + p) d(kx + p)}{k}$$

Выделяется  
целая часть дроби

$$R = \frac{k_1 x^{n+s} + \dots + k}{p_1 x^n + \dots + p}$$

Степень числителя  
меньше  
степени знаменателя

$$\begin{aligned} & \int \frac{R(x) dx}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \\ & = \int \frac{A dx}{x-a} + \int \frac{B dx}{x-b} + \int \frac{C dx}{x-c} \end{aligned}$$

**A, B, C**  
находятся  
методом  
подстановки

## Самостоятельная работа 3

### Вариант 1

1	$\int \frac{\cos(3x+2)}{6} dx$	2	$\int \left( \frac{\sqrt{ex} - \sqrt{e^3}}{\sqrt{e}} \right)^2 dx$	3	$\int \left( \sin^2 \frac{3x}{2} - 1 \right) dx$		
4	$\int \frac{\sin 2x}{2 \sin^2 x} dx$	5	$\int \frac{2}{x^2-1} dx$	6	$\int \frac{3x-1}{6x-1} dx$	7	$\int \left( \frac{2}{\operatorname{tg}(2x+1)} + \frac{3}{\operatorname{ctg}(3x-1)} \right) dx$

### Вариант 2

1	$\int \frac{x^4 - x^{-4} + 2}{x^2} dx$	2	$\int \frac{\sin^4 x}{4} dx$	3	$\int \frac{\sqrt{7x} - 1}{\sqrt{7\pi x}} dx$		
4	$\int \frac{2x-3x^2-1}{(x+1)(x-2)} dx$	5	$\int \left( \frac{1}{\sqrt{1-2x}} + 2\sqrt{\frac{1-2x}{2}} \right) dx$	6	$\int \frac{3\cos^2 3x dx}{\sin^2(-3x)}$	7	$\int \frac{2x^2-5}{2(x^2-1)(x^2-4)} dx$

### Вариант 3

1	$\int \left[ \sin^2(1-x) - \operatorname{ctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} \right] dx$	2	$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$	3	$\int \operatorname{ctg}^3 \left( 2x - \frac{\pi}{2} \right) dx$		
4	$\int \frac{e^x+3}{e^{2x}-4e^x+3} de^x$	5	$\int \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} dx$	6	$\int \sqrt{\frac{\sqrt[4]{2x-1}}{2}} dx$	7	$\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx$

## ОТВЕТЫ

### Тренажер

C. 48, № 1		C. 48, № 2	
1	$y = 1 \cdot \frac{1}{2 \cdot x + 0} + 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot x + 0} + 0$	1	$y = 2 \cdot \cos(3 \cdot x + 1) + 0$
2	$y = 1 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot x + 0 \right) + 3$	2	$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos(-3 \cdot x + 1)} + 0$
3	$y = 3 \cdot \frac{1}{1 \cdot x + 0} + 2 = 1 \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot x + 0} + 2$	3	$y = \frac{1}{2} \cdot \cos(3 \cdot x - 0) + \frac{1}{2}$
4	$y = 3 \cdot \frac{1}{1 \cdot x + 0} + 2 = 1 \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot x + 0} + 2$	4	$y = 1 \cdot \cos(1 \cdot x + 2) - \frac{1}{3}$
5	$y = 2 \cdot \frac{1}{3 \cdot x + 2} + 1 = 1 \cdot \frac{1}{\frac{3}{2} \cdot x + 1} + 2$	5	$y = 1 \cdot \cos(2 \cdot x - 6) + 0$

### Тренажер

C. 48, № 3		C. 57, № 1		C. 57, № 2	
1	$y = \sqrt{7} \cdot \sqrt{1 \cdot x + 0} + 0 = 1 \cdot \sqrt{7 \cdot x + 0} + 0$	1	$2x$	1	$-2 \ln  \cos x  + C$
2	$y = 1 \cdot \sqrt{7 \cdot x + 7} + 0 = \sqrt{7} \cdot \sqrt{1 \cdot x + 1} + 0$	2	$3x$	2	$\frac{\ln  \sin 2x }{2} + C$
3	$y = 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{7 \cdot x + 0}} + 0 = \sqrt{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 \cdot x + 0}} + 0$	3	$\frac{x}{4}$	3	$-\ln  \sin 2x  + C$
4	$y = \frac{1}{7} \cdot \sqrt{7 \cdot x + 0} + 0 = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{1 \cdot x + 0} + 0$	4	$5x$	4	$-\frac{\ln  \cos 2x }{4} + C$
5	$y = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{1 \cdot x + 7} + \sqrt{7}$	5	$\frac{x}{2}$	5	$-4 \ln \left  \sin \frac{x}{2} \right  + C$

**ОТВЕТЫ**

**ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ**

**Тренажер**

C. 59, № 1		C. 61, № 3		C. 61, № 4	
1	$\operatorname{tg}x - 2x + C$	1	$\frac{(2x+1)^2}{4} + C$	1	$\frac{1}{2} \ln  \sin 2x  + C$
2	$-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2x + C$	2	$\frac{\ln  2x-1 }{2} + C$	2	$-2 \ln \left  \cos \frac{x}{2} \right  + C$
3	$-\frac{1}{2} \cos x + C$	3	$\left( \frac{x}{3} - 3 \right)^3 + C$	3	$-\operatorname{ctg}(x-2) + C$
4	$2x - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3} + C$	4	$-\frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{1}{(\sqrt{2}x+2)^3} + C$	4	$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( 2x - \frac{1}{2} \right) + C$
5	$2 \ln  \cos x  + \operatorname{tg} x + C$	5	$-\frac{2\sqrt{5}}{3} (25-x) \sqrt{25-x} + C$	5	$-\sqrt{2} \ln \left  \sin \left( 2 - \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right  + C$

**Матрица**

C. 51, № 1

2	$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$	A = 1 B = 1	$\ln x^2-1  + C$
2	$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$	A = 2 B = -1	$\ln \frac{(x-1)^2}{ x-2 } + C$
3	$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$	A = -1 B = 2 C = 5	$\ln \frac{(x-1)^2  x+1 ^5}{ x } + C$
3	$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$	A = 1 B = 1 C = 1	$\ln (x-1)(x^2-4)  + C$
2	$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$	A = $\frac{1}{3}$ B = $-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3} \ln \frac{ x-1 }{(x+2)^4} + C$

## ОТВЕТЫ

### ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

#### Серия

С. 49, № 4

$$1 \quad \frac{x}{\sqrt{3}} - 3$$

$$2 \quad \frac{3\sqrt{3}\pi}{x + \sqrt{3} \ln 3}$$

$$3 \left( \frac{\pi}{\sqrt{x} + \ln 3} - 1 \right)$$

$$4 \quad \frac{3\pi}{x^2} - 3$$

$$5 \quad \cos^2 \left( \frac{x}{\sqrt{3}} + \ln 3 \right)$$

С. 49, № 5

$$1 \quad -\cos x - \sin(x - 1) + C$$

$$2 \quad e^{2x-1} - \frac{(2x)^{e+1}}{e+1} + C$$

$$3 \quad -\frac{\ln |\cos(x-3)|}{3} - x + C$$

$$4 \quad \sqrt{2x} + \frac{x\sqrt{2x}}{3} + C$$

$$5 \quad 2 \operatorname{tg} x + \frac{\ln |\cos x|}{\sqrt{2}} - \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}} + C$$

#### Серия

С. 52, № 1

$$1 \quad \frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{2(x+1)}$$

$$2 \quad -\frac{1}{2x} + \frac{3}{x+1} - \frac{5}{2(x+2)}$$

$$3 \quad \frac{3}{4(x-2)} + \frac{5}{4(x+2)}$$

$$4 \quad \frac{1}{4(x-2)} - \frac{5}{4(x+2)} + \frac{5}{x+1}$$

$$5 \quad \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x-2} + \frac{5}{2(x-3)}$$

С. 59, № 2

$$1 \quad -\frac{\cos 2x}{4} + C$$

$$2 \quad 2x + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

$$3 \quad \operatorname{ctg} x + C$$

$$4 \quad \frac{\operatorname{tg}^2 2x + 2x}{8} + C$$

$$5 \quad 3\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + C$$

С. 60, № 1

$$1 \quad \frac{1}{2-x} + C$$

$$2 \quad -\frac{1}{2(x-3)^2} + C$$

$$3 \quad \frac{1}{5(4-5x)^3} + C$$

$$4 \quad \frac{1}{4(7-6x)^4} + C$$

**ОТВЕТЫ**

**ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ**

**Матрица**

C. 53, № 2

$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$	A = 2 B = 3	$-\left[ \frac{2}{x^2} + \frac{3}{(x-1)^2} \right]$	$\ln \left  x^2 \right  (x-1)^3$
$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$	A = 1 B = 2	$-\left[ \frac{1}{x^2} + \frac{2}{(x-2)^2} \right]$	$\ln \left  x \right  (x-2)^2$
$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$	A = 2 B = -1	$-\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$	$\ln \frac{(x-1)^2}{ x+1 }$
$\frac{\square}{\cancel{x}} + \frac{\square}{\cancel{x}-\cancel{5}} + \frac{\square}{\cancel{x}+\square}$	$\square = \frac{\square}{\cancel{x}}$ $\square = -\frac{\square}{\cancel{5}}$ $C = 2$	$\frac{5}{2(x-2)^2} - \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{(x+1)^2}$	$\frac{1}{2} \ln \frac{ x (x+1)^4}{ x-2 ^5}$
$\frac{\square}{\cancel{x}} + \frac{\square}{\cancel{x}+\square} + \frac{\square}{\cancel{x}-\cancel{5}}$	$A = 1$ $\square = \frac{\square}{\cancel{4}}$ $\square = -\frac{\square}{\cancel{4}}$	$-\frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-2)^2}$	$\ln \left  x \right  \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}$

**Матрица**

C. 55. № 1

1	$\frac{5}{x^2-3x+2}$	$\frac{5}{(x-1)(x-2)}$	$-\frac{5}{x-1} + \frac{5}{x-2}$	$x + 5 \ln \left  \frac{x-2}{x-1} \right  + C$
1	$\frac{3x-10}{x^2-7x+12}$	$\frac{3x-10}{(x-3)(x-4)}$	$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-4}$	$x + \ln \left   x-3 (x-4)^2 \right  + C$
2	$\frac{\cancel{x}-\cancel{5}}{\cancel{x}-\cancel{x}-\cancel{5}}$	$\frac{-5x+5}{(x-2)(x+3)}$	$-\frac{4}{x+3} - \frac{1}{x-2}$	$2x - \ln(x+3)^4 - \ln x-2  + C$
-2x+3	$\frac{x-4}{x^2+6x+8}$	$\frac{x-4}{(x+2)(x+4)}$	$\frac{4}{x+4} - \frac{3}{x+2}$	$-x^2 + 3x + \ln \frac{(x+4)^4}{ x+2 ^3} + C$
1	$\frac{26-8x}{x^3+8x^2+19x+12}$	$\frac{-8x+26}{(x+3)(x+4)(x+1)}$	$\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x+4} - \frac{3}{x+1}$	$x + \ln \frac{ x+3 (x+4)^2}{ (x+1)^3 } + C$

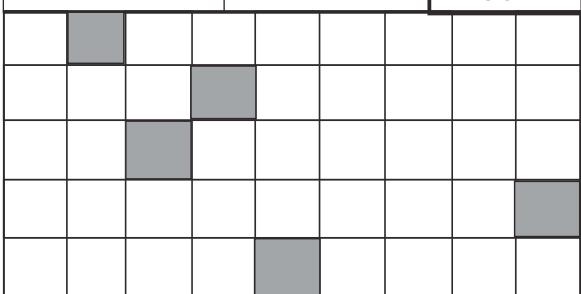
## ОТВЕТЫ

### Серия

C. 60, № 2	C. 62, № 1	C. 69, № 2
1 $x^2+C$	1 $\sin x$	1 $e^x - \frac{e^{2x}}{4} - e^{-x} + C$
2 $\frac{\alpha^2}{2}+C$	2 $\frac{1}{\sin^2 2x}$	2 $\frac{1}{4}x + C$
3 $\frac{5t^2}{18}+C$	3 $3x+1$	3 $-\frac{\operatorname{ctg} 3x}{9} - \frac{4x}{3} + C$
4 $\frac{\theta^2}{2}+C$	4 $\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$	4 $\sqrt{2x-1} + \frac{\sqrt{2}(x-1)}{3}\sqrt{x-1} + C$
5 $\frac{y^2}{98} - \frac{2y}{49} + C$	5 $-\sin(1-2x)$	5 $2 \operatorname{tg}\left(1+\frac{x}{2}\right) - \frac{\sqrt{2} \ln \cos(1-\sqrt{2}x) }{2} + C$

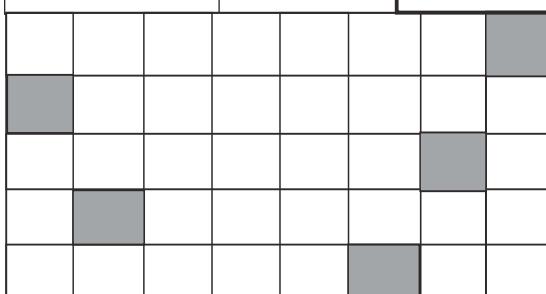
C. 57. №3

*Tecm*



C. 61. №5

*Tecm*



# Зачет

1

Восстановите подынтегральную функцию

$$\int dx = x^3 \sqrt[3]{x} + C$$

2

Восстановите подынтегральную функцию

$$\int (\quad) dx = \frac{1}{4x^4} + C$$

3

Запишите неопределенный интеграл как множество первообразных

$$\int \left( \pi - \frac{x}{\sqrt{3}} \right) dx$$

4

$$\int [e^{(x-\ln 4)} - \ln 4 \cdot (e-x)] dx$$

5

По результату интегрирования

$\ln \left| \frac{\sqrt[3]{x+5}}{(x-5)^3} \right| + C$  восстановите подынтегральную функцию

6

$$\int \left( \frac{2}{\sqrt{2x-1}} + \frac{\sqrt{2}x}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{2}} \right) dx$$

7

$$\int \frac{1 - \sin^2(1-x)}{\cos^2(x-1)} dx$$

8

$$\int \frac{d \cos(x + \sqrt{2})}{[\cos(x + \sqrt{2})]^2}$$

9

$$\int \frac{\ln 2 dx}{(\ln 2 \cdot x + 2)}$$

10

$$\int \left[ \frac{f'(x)}{f(x)} + f'(x) \cdot f(x) \right] dx$$

11

$$\int (\ln x)' \frac{dx}{\ln^2 x}$$

12

Докажите, что если  $F'(x) = f(x)$ ,

$$\text{то } \int f[f(x)] \cdot f'(x) dx = F[f(x)] + C$$

## ***Использованная литература***

1. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк.– М.: Просвещение, 1991.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учебн. пособие для вузов.– 7-е изд., испр.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
3. Резник Н.А. Неопределенный интеграл: Визуальный конспект-практикум. Вып. I. Начальные представления о технике интегрирования Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. - 80 с.

## **СОДЕРЖАНИЕ**

<b>ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ</b>	3
<b>ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ</b>	21
<b>ПАРАМЕТРЫ ПОДИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ</b>	47
Зачет	71
<b>Использованная литература</b>	72

Дифференцирование		
$f'(x)$	$\leftarrow \leftarrow \leftarrow$	$f(x)$
$k$	$k x + p$	$k \frac{x^2}{2} + p x$
$n x^{n-1}$	$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n+1)x^{n-1}}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$-\frac{1}{x^2 \cdot \ln a}$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\log_a x $
$a^x \cdot \ln a$	$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$e^x$	$e^x$	$e^x$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$-\ln \cos x $
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{ctg} x$	$\ln \sin x $
$-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{arc tg} x$ $-\operatorname{arc ctg} x$
$f(x)$		$\int f(x) dx$
Интегрирование		$+C$

