



1. Вынесение числа за знак интеграла	20
Вывод табличного интеграла	20
2. Свойства степени	22
3. Таблица степеней	24
4. Интеграл суммы	26
5. Алгебраические преобразования подынтегральной функции	28
6. Составляющие «неправильной» дроби	30
7. Свойства модулей	32
Свойства логарифмов	32
8. Разложение дроби $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$ на сумму простейших дробей ..	34
Интегрирование дроби $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$	34
9. Разложение дроби $\frac{kx+p}{(x-a)(x-b)}$ на сумму простейших дробей ..	36
Информационная схема «Линейность операции интегрирования» ..	38
Самостоятельная работа 2. Вариант 1	38
Вариант 2	38
Вариант 3	39

1

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ВЫНЕСЕНИЕ ЧИСЛА ЗА ЗНАК ИНТЕГРАЛА

$\mathbf{A} \neq 0$

$$\begin{aligned}
 F(x) : F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a ; b \rangle \\
 \Downarrow \\
 F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F(x) + C = \int f(x) dx \\
 \Downarrow \\
 \mathbf{A} \cdot F'(x) = \mathbf{A} \cdot f(x) \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot F(x) + \mathbf{A} \cdot C = \mathbf{A} \cdot \int f(x) dx \\
 \Downarrow \\
 [\mathbf{A} \cdot F(x)]' = \mathbf{A} \cdot f(x) \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot F(x) + C^* = \int \mathbf{A} \cdot f(x) dx \\
 \Downarrow \\
 \int \mathbf{A} \cdot f(x) dx = \mathbf{A} \cdot F(x) + C^* = \mathbf{A} \cdot \int f(x) dx
 \end{aligned}$$

ВЫВОД ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x) dx = F(x) + C$$

$$(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n \Leftrightarrow \int [(n+1) \cdot x^n] dx = x^{n+1} + C,$$

$\forall n > 0$

$$(n+1) \int x^n dx = x^{n+1} + C,$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$\forall n > 0,$
 $n \neq 1$

$$\int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1

Докажите,
что

$$\frac{\int \frac{1}{\sqrt{x \pm p}} dx}{2} = \sqrt{x \pm p} + C$$

2

Докажите,
что

$$\int \left(x + \frac{p}{A} \right) dx = \frac{(Ax + p)^2}{2A^2} + C$$

3

Докажите,
что

$$\int \frac{1}{Bx} dAx = \frac{A \ln|x|}{B} + C$$

Найдите интеграл

1 $\int x dx =$

4
Тренинг
занятие

2 $\int 5x^4 dx =$

3 $\int \frac{x^5}{4} dx =$

4 $\int \frac{5}{x^4} dx =$

5 $\int \left(-\frac{4}{x^5} \right) dx =$

Серия 5

Найдите интеграл

1 $\int 2(x+1)^2 dx =$

2 $\int \frac{\sin(x+1)}{2} dx =$

3 $\int \frac{1}{4x-2} dx =$

4 $\int \sqrt{e} \operatorname{tg}(x-1) dx =$

5 $\int \frac{2}{\pi \cos^2(x-\sqrt{\pi})} dx =$

2

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$n, m \in R$$

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

1

Докажите,
что

$$\int \sqrt[n]{x} \sqrt[m]{x} dx = \frac{x^{\frac{n+m}{n \cdot m}}}{\frac{n+m}{n \cdot m} + 1} + C$$

МАТРИЦА 2

Для каждого выражения выполните действия:

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНОЙ ДЛЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

преобразуйте в выражение вида
 x^n

найдите число
 $n+1$

запишите первообразную в виде
 $\frac{1}{n+1} x^{n+1}$

преобразуйте полученную первообразную к виду, аналогичному исходному

$$x^2$$

$$\frac{1}{x^2}$$

$$\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

3

Докажите,
что

$$\int \frac{1}{\sqrt[k]{(x \pm p)^n}} dx = \frac{k}{k-n} \cdot \frac{x \pm p}{\sqrt[k]{(x \pm p)^n}} + C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

4

Докажите,
что

$$\int \sqrt[n]{nx} dx = \frac{\sqrt[n]{n^{1+n} x^{1+n}}}{1+n} + C$$

5

Докажите,
что

$$\int \frac{\sqrt[n]{A^{n-1}x}}{\sqrt[m]{B^{m-1}x}} dx = \frac{A \cdot \sqrt[m]{B}}{B \cdot \sqrt[n]{A}} \int \sqrt[\frac{n-m}{nm}]{x} dx$$

6

Докажите,
что

$$\int x \sqrt[n]{x} dx = \frac{nx^2 \sqrt[n]{x}}{2n+1} + C$$

Серия 7

Найдите интеграл

1

$$\int (x \cdot x^{-1}) dx =$$

2

$$\int (x^{-2} \cdot x^3) dx =$$

3

$$\int (2x^2 \cdot 3x^{-3}) dx =$$

4

$$\int (2x)^{-2} \cdot x dx =$$

5

$$\int \frac{(x+2) \cdot [2(x+2)]^3}{2} dx =$$

3

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ТАБЛИЦА СТЕПЕНЕЙ		$k, n \in N$ $n \neq 1$	
$f'(x)$ 		$f(x)$	 $\int f(x) dx$
$n \cdot x^{n-1}$		x^n	 $\frac{x^{n+1}}{1+n} + C$
1		$\frac{1}{x^n}$	
2		$\sqrt[n]{x}$	
3		$\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	
4		$\sqrt[n]{x^k}$	
5		$\frac{1}{\sqrt[n]{x^k}}$	
Запишите результаты		дифференцирования интегрирования	

3

Докажите, что

$$\left[\frac{1}{(1-n)x^{n-1}} \right]' + \int \frac{n}{x^{n+1}} dx = C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

4 Докажите, что $\int x^{\frac{n}{n+p}} dx = \frac{n \cdot \sqrt[n]{x^{2n+p}}}{2n+p} + C$

5 Докажите, что $\int x^k \sqrt[n]{x^p} dx = \frac{n \cdot x^{k+1} \cdot \sqrt[n]{x^p}}{kn+p+n} + C$

Найдите интеграл

6 1 $\int \sqrt{x+1} dx =$

Трениажер 2 $\int \sqrt[4]{x+1} dx =$

3 $\int \sqrt[5]{(x+1)^2} dx =$

4 $\int \sqrt[5]{(x-\sqrt{2})^3} dx =$

5 $\int (x-1)^{\frac{5}{4}} dx =$

Серия 7 Найдите интеграл

1 $\int 2\sqrt{x} dx$

2 $\int \sqrt{2x} dx$

3 $\int \sqrt{\sqrt{2}x} dx$

4 $\int \sqrt{\sqrt{2}x} dx$

5 $\int \frac{\sqrt{x}\sqrt{2x}}{\sqrt{2}} dx$

4

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ИНТЕГРАЛ СУММЫ

$$]f(x), g(x): x \in \langle a ; b \rangle$$

$$F(x), G(x): \begin{array}{l} F'(x) = f(x) \\ G'(x) = g(x) \end{array} \quad \forall x \in \langle a ; b \rangle$$

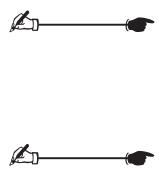
$$\begin{aligned} F'(x) \pm G'(x) &= f(x) \pm g(x) \Leftrightarrow F(x) \pm G(x) + \underbrace{C_f \pm C_g}_C = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \\ &\uparrow \\ F'(x) &= f(x) \Leftrightarrow F(x) + C_f = \int f(x) dx \\ G'(x) &= g(x) \Leftrightarrow G(x) + C_g = \int g(x) dx \\ &\downarrow \\ [F(x) \pm G(x)]' &= f(x) \pm g(x) \Leftrightarrow F(x) \pm G(x) + C = \int [f(x) \pm g(x)] dx \end{aligned}$$

Найдите интеграл

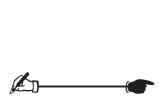
и сравните
результаты

Найдите интеграл

1	$\int (x^2 + 2x + 2) dx =$
1	
Трениажер	
2	$\int (x^2 - 3x + 1) dx =$
2	
Трениажер	



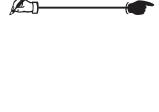
2	$\int [(x+1)^2 + 1] dx =$
1	
Трениажер	
2	$\int [(x-1)^2 - x] dx =$
2	
Трениажер	



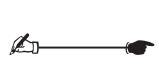
3	$\int (x^3 + 3x^2 + 5x + 1) dx =$
3	
Трениажер	



4	$\int (x^3 - 3x^2 + 3x + 2) dx =$
4	
Трениажер	



5	$\int (x^3 + 3x^2 + 4x + 1) dx =$
5	
Трениажер	



3 Докажите,
что

$$a > 0, \neq 1: \int [e^x + a^x] dx = e^x + \frac{a^x}{\ln a} + C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Найдите интеграл	
1	$\int \left(x^5 + \frac{1}{\sqrt[5]{x}} - \frac{x}{5} \right) dx$
2	$\int (1 - \sqrt{x} + x) dx$
3	$\int \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{3x} \right) dx$
4	$\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{2} + 2\sqrt{x^3} \right) dx$
5	$\int \left(\frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{5x\sqrt{x}}{2} \right) dx$

Серия 5	Найдите интеграл
1	$\int [2^x + e^x] dx =$
2	$\int [x - \cos(x-2)] dx =$
3	$\int \left(\frac{e^{2+x}}{2} + \frac{e^x}{e^{2+x}} \right) dx =$
4	$\int \left(\frac{1}{\cos^2(x-2)} - \frac{1}{\sin^2(x+2)} \right) dx =$
5	$\int \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1+2x}{2}\right)} - \frac{1}{\operatorname{ctg}(x-1)} + \frac{1}{\sin^2(x-2)} dx =$

5

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

*Формулы
сокращенного умножения*

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$

$$x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 = (x \pm y)^3$$

ПРИМЕР

$$\int \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx = \int \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} dx = \int (x^2 - x + 1) dx = \\ = \int x^2 dx - \int x dx + \int dx = \\ = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$$

ПРИМЕР

$$\int \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) dx = \int (\sqrt{x} + 1) dx = \\ = \int \sqrt{x} dx + \boxed{\int d} x = \\ = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + x + C$$

1

Докажите,
что

$$\int \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{x^2} + C$$

2

Докажите,
что

$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3 dx = 2\sqrt{x} \left(\frac{1}{5} x^2 \sqrt{x} - x^2 + 3x + 1 \right) + C$$

3

Докажите,
что

$$\int (x - \sqrt{x} + x\sqrt{x}) (x\sqrt{x} - \sqrt{x} - x) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Найдите интеграл

1 $\int x(x-1)^2 dx$

4

2 $\int (1+x^2)^2 dx$

тренажер

3 $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$

4 $\int \frac{(x+1)^2}{x} dx$

5 $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$

Найдите интеграл

1 $\int \frac{\sqrt{x-4}}{4\sqrt{x+2}} dx$

5

2 $\int \frac{\sqrt{x-2}}{4\sqrt{x}-\sqrt{2}} dx$

тренажер

3 $\int \frac{\sqrt{x+2}\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}} dx$

4 $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x+1}} dx$

5 $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x-2}} dx =$

6

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

СОСТАВЛЯЮЩИЕ «НЕПРАВИЛЬНОЙ» ДРОБИ

$$\frac{kx+p}{rx+n} = \frac{k \cdot \left(x + \frac{p}{k} \right)}{r \cdot \left(x + \frac{n}{r} \right)} = \frac{k}{r} \cdot \left(\frac{x + \frac{p}{k}}{x + \frac{n}{r}} \right) =$$

$$= \frac{k}{r} \cdot \left(\frac{x + P}{x + N} \right) =$$

$$= \frac{k}{r} \cdot \left[\frac{(x+N)+(P-N)}{x+N} \right] = \frac{k}{r} \cdot \left(1 + \frac{P-N}{x+N} \right)$$

простейшая дробь

$\frac{A}{x+a}$
простейшая дробь

$$\begin{aligned} \frac{x+p}{x+n} &= \\ &= \frac{x+n + (p-n)}{x+n} = \\ &= \frac{x+n}{x+n} + \frac{(p-n)}{x+n} \\ &\quad \text{i} \text{ч} \text{ел} \text{ая} \quad \text{пр} \text{ост} \text{е} \text{й} \text{ши} \text{я} \text{я} \\ &\quad \text{ча} \text{ст} \text{ь} \quad \text{др} \text{об} \text{ь} \end{aligned}$$

ПРИМЕР

$$\begin{aligned} \int \frac{x+7}{x-5} dx &= \\ &= \int \frac{(x-5)+(7+5)}{x-5} dx = \int \left(1 + \frac{12}{x-5} \right) dx = \\ &= \int dx + 12 \int \frac{dx}{x-5} = x + 12 \ln|x-5| + C \end{aligned}$$

ПРИМЕР

$$\begin{aligned} \frac{6x+1}{3x+5} &= \frac{6 \cdot \left(x + \frac{1}{6} \right)}{3 \cdot \left(x + \frac{5}{3} \right)} = 2 \cdot \left(\frac{x + \frac{5}{3} + \frac{1}{6} - \frac{5}{3}}{x + \frac{5}{3}} \right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{\frac{3}{2}}{x + \frac{5}{3}} \right) \\ &\downarrow \\ \int \frac{6x+1}{3x+5} dx &= 2 \cdot \left[\int dx - \frac{3}{2} \cdot \int \frac{1}{x + \frac{5}{3}} dx \right] = 2 \cdot \left[x - \frac{3}{2} \cdot \ln \left| x + \frac{5}{3} \right| \right] + C \end{aligned}$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Разложите дробь на составляющие и найдите				
производную		1 Трениажер	интеграл	
2	1	$\frac{x+2}{x+1} =$	1	3 Трениажер
Трениажер	2	$\frac{x-1}{x} =$	2	Трениажер
Трениажер	3	$\frac{x-1}{x+2} =$	3	Трениажер
4	4	$\frac{1-x}{x+1} =$	4	
5	5	$\frac{x+2}{2-x} =$	5	

Серия 4		разложите на составляющие		и найдите интеграл	
1	$\frac{2x-1}{x-2}$				
2	$\frac{x+2}{2x+1}$				
3	$\frac{3x-2}{2x-3}$				
4	$\frac{x}{1-2x}$				
5	$\frac{2x-3}{2-3x}$				

7

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

СВОЙСТВА МОДУЛЕЙ

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

$$|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \left| \frac{|x|}{|y|} \right|$$

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\forall x > 0$$

$$\log_x x = 1$$

$$\forall y > 0, \neq 1$$

$$x^{\log_x y} = y$$

$$\forall x > 0$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a |x|$$

ПРИМЕР

$$\int \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} \right) dx =$$

$$= \underbrace{\int \frac{1}{x+3} dx}_{\text{Мысленное преобразование}} + \underbrace{\int \frac{1}{x-3} dx}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

Мысленное преобразование

$$= \underbrace{\int \frac{d(x+3)}{x+3} dx}_{\text{Мысленное преобразование}} + \underbrace{\int \frac{d(x-3)}{x-3} dx}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= \ln|x+3| + \ln|x-3| + C =$$

$$= \underbrace{\ln|(x+3) \cdot (x-3)|}_{\text{Мысленное преобразование}} + C =$$

$$= \ln|x^2 - 9| + C$$

ПРИМЕР

$$\int \left(\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x-2} \right) dx =$$

$$= \underbrace{\int \frac{2}{x-3} dx}_{\text{Мысленное преобразование}} - \underbrace{\int \frac{3}{x-2} dx}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

Мысленное преобразование

$$= \underbrace{2 \cdot \int \frac{dx}{x-3}}_{\text{Мысленное преобразование}} - 3 \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{x-2}}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

Мысленное преобразование

$$= \underbrace{2 \cdot \int \frac{d(x-3)}{x-3}}_{\text{Мысленное преобразование}} - 3 \cdot \underbrace{\int \frac{d(x-2)}{x-2}}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

Мысленное преобразование

$$= 2 \ln|x-3| + 3 \cdot \ln|x-2| + C =$$

$$= \underbrace{\ln(x-3)^2}_{\text{Мысленное преобразование}} - \underbrace{\ln(x-2)^3}_{\text{Мысленное преобразование}} + C =$$

Мысленное преобразование

$$= \ln \frac{(x-3)^2}{|x-2|^3} + C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Тест 1

Найдите соответствующую подынтегральную функцию

по заданной первообразной	$\frac{4}{x+1} - \frac{3}{x-1}$	$\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x+1}$	$\frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-1}$	$\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x+1}$	$\frac{3}{x+1} - \frac{4}{x-1}$
$\ln \frac{(x+1)^4}{ x-1 ^3}$					
$\ln \frac{ x-1 ^3}{(x+1)^4}$					
$\ln \frac{ x+1 ^3}{(x-1)^4}$					
$\ln \frac{(x-1)^4}{ x+1 ^3}$					
$\ln \left \frac{x+1}{x-1} \right ^3$					

Серия 2

Найдите интеграл

1	$\int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx =$
2	$\int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx =$
3	$\int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx =$
4	$\int \left(\frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2} \right) dx =$
5	$\int \left(\frac{2}{2x+1} + \frac{3}{3x+1} \right) dx =$

8

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ НА СУММУ ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

Простейшая дробь

$$\frac{A}{x+a}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-a)(x-b)} &= \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(x-a)(x-b)} &= \frac{A(x-b) + B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\ &= A(x-b) + B(x-a) \\ 1 + 0 \cdot (x-b) + 0 \cdot (x-a) &= 0 + A(x-b) + B(x-a) \end{aligned}$$

при $x=a$: $1 = A(a-b) + B \cdot 0 \Rightarrow A = \frac{1}{a-b}$

подстановка

при $x=b$: $1 = A \cdot 0 + B(b-a) \Rightarrow B = \frac{1}{b-a}$

$$\frac{1}{(a-b)(x-a)} + \frac{1}{(b-a)(x-b)} \stackrel{\Downarrow}{=} \frac{1}{(x-a)(x-b)}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБИ

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} &= \\ \frac{1}{(a-b)} \cdot \int \frac{d(x-a)}{(x-a)} + \frac{1}{(b-a)} \cdot \int \frac{d(x-b)}{(x-b)} &= \\ = \frac{\ln|x-a|}{(a-b)} + \frac{\ln|x-b|}{(b-a)} + C & \end{aligned}$$

1 Докажите, что дробь $\frac{1}{kx+p}$ можно преобразовать в простейшую

2 Докажите, что

$$\int \frac{dx}{kx+p} = \frac{\ln|x+\frac{p}{k}|}{k} + C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Серия 3

Каждую дробь разложите на простейшие дроби

1

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

2

$$\frac{1}{(1-x)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

3

$$\frac{1}{x(x-2)}$$

4

$$\frac{1}{x^2 - \frac{1}{4}}$$

5

$$\frac{1}{x(2x-1)}$$

Приведите
интеграл к виду,
удобному для интегрирования

Найдите интеграл

4 Трениажер	1	$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$ $\int \frac{dx}{(1-x)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$ $\int \frac{dx}{x(x-2)}$ $\int \frac{dx}{x^2 - \frac{1}{4}}$ $\int \frac{dx}{x(2x-1)}$	1	5 Трениажер
	2		2	
	3		3	
	4		4	
	5		5	

9

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ

$$\frac{kx+p}{(x-a)(x-b)}$$

НА СУММУ ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

$$\frac{kx+p}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \quad \Leftrightarrow$$

$$kx+p = A(x-b) + B(x-a)$$

↓

$$\text{при } x=a: ka+p = A(a-b) + 0 \Rightarrow A = \frac{ka+p}{a-b}$$

подстановка

$$\text{при } x=b: kb+p = 0 + B(a-b) \Rightarrow B = \frac{kb+p}{b-a}$$

$$\int \frac{kx+p}{(x-a)(x-b)} dx = \frac{ka+p}{a-b} \cdot \int \frac{d(x-a)}{x-a} + \frac{kb+p}{b-a} \cdot \int \frac{d(x-b)}{(x-b)}$$

ПРИМЕР

$$\frac{3x-2}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$3x-2 = A(x+2) + B(x-3)$$

↓

$$x=3 \Rightarrow 3 \cdot 3 - 2 = A(3+2) \Rightarrow A = \frac{7}{5}$$

$$x=-2 \Rightarrow 3 \cdot (-2) - 2 = B(-2-3) \Rightarrow B = \frac{8}{5}$$

↓

$$\int \frac{3x-2}{(x-3)(x+2)} dx = \frac{7}{5} \int \frac{dx}{x-3} + \frac{8}{5} \int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{7}{5} \ln|x-3| + \frac{8}{5} \ln|x+2| + C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Тест 1 Определите коэффициенты дроби

в ее разложении вида $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$	A =	3	2	5	5	2	5	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
	B =	-2	-3	5	2	3	3	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{5x}{x^2 - 1}$												
$\frac{5x - 1}{x^2 - 1}$												
$\frac{5x + 1}{x^2 - 1}$												
$\frac{5 - x}{x^2 - 1}$												
$\frac{x + 5}{x^2 - 1}$												

Серия 2	Каждую дробь	разложите на простейшие	найдите интеграл
1	$\frac{1}{(x+1)(x-2)}$		
2	$\frac{2}{(x+1)(x-2)}$		
3	$\frac{2x}{(x+1)(x-2)}$		
4	$\frac{2x}{(x-1)(x+2)}$		
5	$\frac{1-x}{x^2-4}$		

**Информационная схема
«ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ»**

СТРУКТУРА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{подынтегральная функция}} dx$$

переменная интегрирования

дифференциал независимой переменной

подынтегральное выражение

ГЛАВНЫЙ ПРИНЦИП ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТАБЛИЦЫ

$$\int f(*) dx = F(*) + C$$

ЧИСЛОВОЙ МНОЖИТЕЛЬ ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА

$$\int A f(x) dx = A \cdot \int f(x) dx$$

ИНТЕГРАЛ СУММЫ

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x}{1+n} \cdot x^n + C$$

$$\int \sqrt[n]{x^k} dx = \frac{nx}{k+n} \cdot \sqrt[n]{x^k} + C$$

Разложение дроби на простейшие

$$\int \frac{kx+p}{(x-a)(x-b)} dx = A \int \frac{dx}{x-a} + B \int \frac{dx}{x-b}$$

$$\frac{kx+p}{rx+n} = \frac{k}{r} \cdot \left(1 + \frac{P-N}{x+N} \right)$$

простейшая дробь

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{x^n} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[n]{x^k}} dx = \frac{kx}{k-n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x^k}} + C$$

A и B находятся методом подстановки

1 Найдите интеграл

$$\int \frac{\sin(x + \sqrt{2}) dx}{[\cos(x + \sqrt{2})]^2}$$

2

Найдите интеграл $\int \frac{\ln 2 dx}{(\ln 2 \cdot x + 2)}$

3 Запишите неопределенный интеграл как множество первообразных

$$\int [e^{(x-\ln 4)} - \ln 4 \cdot (e-x)] dx$$

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1 $\int \frac{\sin 3x}{3} dx$

2 $\int \frac{5}{x} d\frac{1}{5x}$

3 $\int \frac{3}{2} d\frac{2}{3} \sqrt{\cos x}$

4 $\int \frac{\pi x - 1}{\pi x} d\pi x$

5 $\int \frac{3dx}{(x+2)(1-x)}$

6 $\int \frac{2x-4}{(x-3)(x+1)} dx$

7 $\int (\operatorname{tg} 2x + 2x + 2) d2x$

Вариант 2

1 $\int 4 \sin\left(\frac{x+4}{4}\right) d\left(\frac{x}{4}-1\right)$

2 $\int \left[(\sqrt{x}-1)^2 - 1 \right] d\sqrt{x}$

3 $\int \left(\frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{3\sqrt{x}} \right) dx$

4 $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx$

5 $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$

6 $\int \frac{1+x}{15x - 3x^2 - 12} dx$

7 $\int (2\operatorname{tg} x \cdot \cos x - 3\operatorname{ctg} x \cdot \sin x) dx$

Самостоятельная работа 2

Вариант 3

1

$$\int \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{\ln 3} + \frac{\ln 3}{3}\right)}{\ln 3} d\frac{3x}{\ln 3}$$

2

$$\int \left[(\sqrt{x} - 1)^2 + 1 \right] dx$$

3

$$\int \frac{\cos 3x}{3} d9x$$

4

$$\frac{27}{4} \cdot \int \frac{4}{9} \ln x d\frac{2}{3} \sqrt{\ln x}$$

5

$$\int \frac{x-1}{x^3 + x^2 - 2x} dx$$

6

$$\int \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

7

$$\int \frac{\sin^2 e^x - \cos^2 e^x}{\sin^2 e^x \cdot \cos^2 e^x} d e^x$$