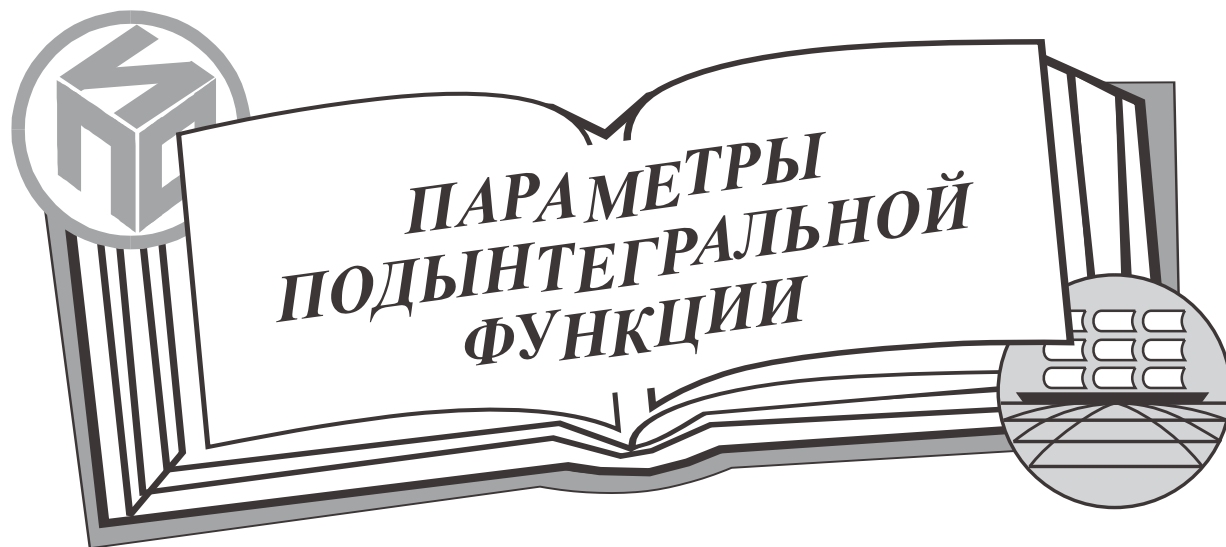




|                                                                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Структура аналитического задания функции с параметрами                                                   | 42 |
| Постановка задачи                                                                                           | 42 |
| 2. Конструирование дроби $\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$                                                     | 44 |
| Интегрирование дроби $\frac{kx^2 + mx + p}{(x-a)(x-b)(x-c)}$                                                | 44 |
| 3. Алгоритм разложения на простейшие дроби                                                                  |    |
| $\frac{k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \dots + k_{n-1} x + p}{(x-a_1)(x-a_2) \cdot \dots \cdot (x-a_n)(x-a_2)}$ | 46 |
| 4. Корректировка переменной интегрирования                                                                  | 48 |
| 5. Простейшие тригонометрические преобразования                                                             | 50 |
| 6. Интегрирование функции с линейным аргументом                                                             | 52 |
| 7. Алгоритм корректировки переменной интегрирования                                                         | 54 |
| Общая схема корректировки переменной интегрирования                                                         | 54 |
| 8. Схема выделения целой части дроби                                                                        | 56 |
| Информационная схема «Параметры подынтегральной функции»                                                    | 58 |
| Самостоятельная работа 3. Вариант 1                                                                         | 59 |
| Вариант 2                                                                                                   | 59 |
| Вариант 3                                                                                                   | 60 |

# 1

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

### СТРУКТУРА АНАЛИТИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ С ПАРАМЕТРАМИ

$$y = \underbrace{\mathbf{A}}_{\text{параметр функции}} \cdot f(\underbrace{\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}}_{\text{линейный аргумент}}) + \underbrace{\mathbf{B}}_{\text{параметр функции}}$$

$$y = \underbrace{\mathbf{A}}_{\text{параметр функции}} \cdot f(\underbrace{\mathbf{k} \cdot * + \mathbf{p}}_{\text{параметры линейного аргумента}}) + \underbrace{\mathbf{B}}_{\text{параметр функции}}$$

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$$\int [\mathbf{A} \cdot f(\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}) + \mathbf{B}] dx =$$

$$= \mathbf{A} \cdot \int f(\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}) dx + \mathbf{B} \int dx =$$

$$= \mathbf{A} \cdot \int f(\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}) d(x + \mathbf{p}) + \mathbf{B} x = ?$$

Преобразуйте функцию  
к виду  $y = \mathbf{A} \cdot f(\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}) + \mathbf{B}$

|                                       |   |                          |
|---------------------------------------|---|--------------------------|
| 1<br>Тр<br>е<br>н<br>а<br>ж<br>е<br>р | 1 | $y = \frac{1}{2x}$       |
|                                       | 2 | $y = \frac{x}{2} + 3$    |
|                                       | 3 | $y = \frac{3}{x} + 2$    |
|                                       | 4 | $y = \frac{2x+3}{x}$     |
|                                       | 5 | $y = \frac{2}{3x+2} + 1$ |

|                                       |   |                                 |
|---------------------------------------|---|---------------------------------|
| 2<br>Тр<br>е<br>н<br>а<br>ж<br>е<br>р | 1 | $y = 2 \cos(1+3x)$              |
|                                       | 2 | $y = \frac{1}{2 \cos(1-3x)}$    |
|                                       | 3 | $y = \frac{\cos 3x + 1}{2}$     |
|                                       | 4 | $y = \frac{3 \cos(x+2) - 1}{3}$ |
|                                       | 5 | $y = \cos[2(x-3)]$              |

|                                       |   |                                       |
|---------------------------------------|---|---------------------------------------|
| 3<br>Тр<br>е<br>н<br>а<br>ж<br>е<br>р | 1 | $y = \sqrt{7x}$                       |
|                                       | 2 | $y = \sqrt{7x+7}$                     |
|                                       | 3 | $y = \frac{7}{\sqrt{7x}}$             |
|                                       | 4 | $y = \frac{\sqrt{7x}}{7}$             |
|                                       | 5 | $y = \frac{7 + \sqrt{x+7}}{\sqrt{7}}$ |

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

| Серия 4     |                             | постройте<br>функцию<br>с параметрами | при | A=3π | B = −3 | k = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | p = ln 3 |
|-------------|-----------------------------|---------------------------------------|-----|------|--------|--------------------------|----------|
| Для функции |                             |                                       |     |      |        |                          |          |
| 1           | $f(x) = x$                  | $f(k \cdot x) + B$                    |     |      |        |                          |          |
| 2           | $f(x) = \frac{1}{x}$        | $A \cdot f(k \cdot x + p)$            |     |      |        |                          |          |
| 3           | $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $A \cdot f(x + p) + B$                |     |      |        |                          |          |
| 4           | $f(x) = \frac{1}{x^2}$      | $A \cdot f(k \cdot x) + B$            |     |      |        |                          |          |
| 5           | $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $f(k \cdot x + p) + B$                |     |      |        |                          |          |

| Серия 5 |                                                                                                                                           | Найдите интеграл |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| 1       | $\int [\sin x - \cos(x-1)] dx =$                                                                                                          |                  |
| 2       | $\int [e^{2x-1} - (2x)^e] d 2x =$                                                                                                         |                  |
| 3       | $\int \left[ \frac{\operatorname{tg}(x-3)}{3} - 1 \right] dx =$                                                                           |                  |
| 4       | $\int \left( \frac{1}{\sqrt{2x}} + \sqrt{\frac{x}{2}} \right) dx =$                                                                       |                  |
| 5       | $\int \left( \frac{1}{\frac{\cos^2 x}{2}} - \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} x} + \frac{1}{\sqrt{2} \sin^2 x} \right) dx =$ |                  |

# 2

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

### КОНСТРУИРОВАНИЕ ДРОБИ

$$\begin{aligned} & \frac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} \\ & \frac{1}{(x-a)} + \frac{1}{(x-b)} + \frac{1}{(x-c)} = \\ & = \frac{(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \\ & = \frac{(x^2 - bx - cx - bc) + (x^2 - ax - cx - ac) + (x^2 - ax - bx - ab)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \\ & \quad \overbrace{\frac{3x^2 - 2(a+b+c)x - (ab+ac+bc)}{(x-a)(x-b)(x-c)}}^{R(x)} = \\ & = \frac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} \end{aligned}$$

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБИ

$$\frac{kx^2 + mx + p}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

Коэффициенты **A, B и C**  
находятся  
методом подстановки

$$\begin{aligned} & \frac{kx^2 + mx + p}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \\ & \quad \begin{array}{ccc} \underbrace{\quad}_I & \underbrace{\quad}_II & \underbrace{\quad}_III \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \underbrace{\quad}_I & \underbrace{\quad}_II & \underbrace{\quad}_III \end{array} \\ & \quad \Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow \\ & \int \frac{kx^2 + mx + p}{(x-a)(x-b)(x-c)} dx = A \cdot \int \frac{dx}{x-a} + B \cdot \int \frac{dx}{x-b} + C \cdot \int \frac{dx}{x-c} = \\ & = A \cdot \ln|x-a| + B \cdot \ln|x-b| + C \cdot \ln|x-c| + C \\ & = \ln(|x-a|^A \cdot |x-b|^B \cdot |x-c|^C) + C \end{aligned}$$

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

**ПРИМЕР**

$$\frac{5-x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$\frac{5-x}{(x-1)(x-2)(x-3)} \Downarrow = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

$x=1 \Rightarrow 5-1 = A(1-2)(1-3) \Rightarrow A=2$ 
 $x=2 \Rightarrow 5-2 = B(2-1)(2-3) \Rightarrow B=-3$ 
 $x=3 \Rightarrow 5-3 = C(3-1)(3-2) \Rightarrow C=1$

$$\int \frac{(5-x)dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} \Downarrow = 2 \cdot \int \frac{dx}{x-1} - 3 \cdot \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= 2 \cdot \ln|x-1| - 3 \cdot \ln|x-2| + \ln|x-3| + C$$

$$= \ln \frac{(x-1)^2 |x-3|}{|x-2|^3} + C$$

| МАТРИЦА 1                               | Для каждой дроби                                                                         |                                                                        |                                                                        |                     |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| РАЗЛОЖЕНИЕ<br>ДРОБИ<br>НА<br>ПРОСТЕЙШИЕ | определите<br>количество<br>простейших<br>дробей,<br>на которые<br>ее можно<br>разложить | представьте<br>данную<br>дробь<br>в виде суммы<br>простейших<br>дробей | определите<br>числовой<br>коэффициент<br>каждой<br>простейшей<br>дроби | найдите<br>интеграл |
| $\frac{2x}{x^2-1}$                      |                                                                                          |                                                                        |                                                                        |                     |
| $\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}$                |                                                                                          |                                                                        |                                                                        |                     |
| $\frac{6x^2-3x+1}{x(x-1)(x+1)}$         |                                                                                          |                                                                        |                                                                        |                     |
| $\frac{3x^2-2x-4}{(x^2-4)(x-1)}$        |                                                                                          |                                                                        |                                                                        |                     |
| $\frac{x^2-4x+4}{(x-1)(4-x^2)}$         |                                                                                          |                                                                        |                                                                        |                     |

# 3

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

### АЛГОРИТМ РАЗЛОЖЕНИЯ НА ПРОСТЕЙШИЕ

**ДРОБИ** 
$$\frac{k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \dots + k_{n-1} x + p}{(x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n)}$$

$$\frac{k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \dots + k_{n-1} x + p}{(x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n)}$$

Каждой простейшей дроби  
соответствует  
свой числовой коэффициент

$$= \frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_2)} + \dots + \frac{A_{n-1}}{(x - a_{n-1})} + \frac{A_n}{(x - a_n)}$$

Числовые коэффициенты  
простейших дробей  
находятся

**методом подстановки**

Количество  
множителей знаменателя  
заданной дроби

равно

количеству  
простейших дробей  
I типа

**Серия 1**      Разложите дробь на простейшие

1 
$$\frac{2x - 1}{(x - 1)(x + 1)}$$

2 
$$\frac{2x - 1}{x(x + 1)(x + 2)}$$

3 
$$\frac{2x - 1}{x^2 - 4}$$

4 
$$\frac{2x - 1}{(x^2 - 4)(x + 1)}$$

5 
$$\frac{2x - 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

| МАТРИЦА 2                               | Для каждой дроби                                                       |                                                                        |                                       |                                         |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------|
| РАЗЛОЖЕНИЕ<br>ДРОБИ<br>НА<br>ПРОСТЕЙШИЕ | представьте<br>данную<br>дробь<br>в виде суммы<br>простейших<br>дробей | определите<br>числовой<br>коэффициент<br>каждой<br>простейшей<br>дроби | найдите<br>производную<br>и упростите | найдите<br>первообразную<br>и упростите |
| $\frac{5x-2}{x(x-1)}$                   |                                                                        |                                                                        |                                       |                                         |
| $\frac{3x-2}{x(x-2)}$                   |                                                                        |                                                                        |                                       |                                         |
| $\frac{x+3}{x^2-1}$                     |                                                                        |                                                                        |                                       |                                         |
| $\frac{1+7x}{x(2-x)(x+1)}$              |                                                                        |                                                                        |                                       |                                         |
| $\frac{x^2-2x-2}{x(x^2-x-2)}$           |                                                                        |                                                                        |                                       |                                         |

# 4

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

### СХЕМА ВЫДЕЛЕНИЯ ЦЕЛОЙ ЧАСТИ ДРОБИ

Если у дроби  
степень числителя  
**больше** или **равна**  
степени знаменателя

$$R = \frac{k_1 x^{n+s} + \dots + k}{p_1 x^n + \dots + p}$$

то  
выделение  
целой части дроби  
можно осуществлять  
«делением уголком»

Числитель

Уголок  
для  
вычислений

Остаток

не делится  
на  
знаменатель

Знаменатель

Запись  
целой части  
дроби

$$R = \text{целая часть} + \frac{\text{остаток}}{\text{знаменатель}}$$

### ПРИМЕР

$$I = \int \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x - 2)} dx = ?$$

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x - 2)} =$$

для удобства вычислений  
в числителе  
учитываются  
все степени переменной  $x$   
с соответствующими  
коэффициентами

$$= \frac{x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

$$\begin{array}{r} \phantom{0}x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1 \\ \underline{-(x^3 - 2x^2 - x + 2)} \\ \phantom{0}2x^3 - x^2 - 2x + 1 \\ \underline{-(2x^3 - 4x^2 - 2x + 4)} \\ \phantom{0}3x^2 - 3 \end{array}$$

$$I = \underbrace{\int (x+2) dx}_{\text{непосредственное применение таблицы}} + 3 \underbrace{\int \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x+1)(x-2)} dx}_{\text{разложение подынтегральной дроби на простейшие}}$$



## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

| МАТРИЦА 1                                             | Для каждой дроби |         |                                                     |                                                |                     |
|-------------------------------------------------------|------------------|---------|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------|
|                                                       | запишите         |         | разложите<br>знаменатель<br>остатка<br>на множители | разложите<br>остаток<br>на простейшие<br>дроби | найдите<br>интеграл |
| РАЗЛОЖЕНИЕ<br>ДРОБИ<br>НА<br>СОСТАВЛЯЮЩИЕ             | целую<br>часть   | остаток |                                                     |                                                |                     |
| $\frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 3x + 2}$                   |                  |         |                                                     |                                                |                     |
| $\frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 7x + 12}$                  |                  |         |                                                     |                                                |                     |
| $\frac{2x^2 - 3x - 7}{x^2 + x - 6}$                   |                  |         |                                                     |                                                |                     |
| $\frac{3x - 2x^3 - 9x^2 + 1}{x^2 + 6x + 8}$           |                  |         |                                                     |                                                |                     |
| $\frac{x^3 + 8x^2 + 11x + 38}{x^3 + 8x^2 + 19x + 12}$ |                  |         |                                                     |                                                |                     |

# 5

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

### КОРРЕКТИРОВКА ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$k \neq 0$

$$\frac{1}{k} \cdot d(kx) = \frac{k}{k} \cdot d(x) = d(x)$$

$\Downarrow$

$$d(x) = \frac{1}{k} \cdot d(kx)$$

$$f(x), F(x) : F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a; b \rangle$$

$$\int \underbrace{f(kx)}_{\substack{\text{трудно} \\ \text{для} \\ \text{преобразования}}} dx = \Downarrow \int f(kx) \cdot \underbrace{\frac{1}{k} \cdot d(kx)}_{\substack{\text{элементарные} \\ \text{преобразования}}} =$$

$$= \frac{1}{k} \int f(kx) d(kx) =$$

$$= \frac{1}{k} F(kx) + C$$

### ПРИМЕР

*Вынесение числа  
за знак интеграла*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \underbrace{\left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \right]}_{\text{1-й способ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{x} + C = \sqrt{2x} + C$$

**1-й способ**

**2-й способ**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \underbrace{\left[ \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{\sqrt{2x}} \right]}_{\text{Корректировка}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2x} + C = \sqrt{2x} + C$$

*Корректировка  
переменной интегрирования*

### ПРИМЕР

Осуществите в исходном задании  
корректировку переменной интегрирования  $I = \int \frac{dx}{\sin \sqrt{5x}}$   
и найдите интеграл

**А н а л и з**

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d\sqrt{5x}}{\sin \sqrt{5x}}$$

**Р е ш е н и е**

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\sqrt{5x}}{2} \right| + C$$

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

| Восстановите<br>переменную интегрирования |                                                                                                                         |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1                                         | $\int \cos 2x d\boxed{\phantom{x}} = \sin 2x + C$                                                                       |
| 2                                         | $\int \operatorname{ctg}(-3x) d\boxed{\phantom{x}} = -\ln \sin 3x  + C$                                                 |
| 3                                         | $\int \sin \frac{1}{4}x d\boxed{\phantom{x}} = -\cos \frac{x}{4} + C$                                                   |
| 4                                         | $\int \frac{1}{\cos^2 5x} d\boxed{\phantom{x}} = \operatorname{tg} 5x + C$                                              |
| 5                                         | $\int \frac{d\boxed{\phantom{x}}}{\operatorname{ctg}\left(-\frac{1}{2}x\right)} = \ln\left \cos \frac{x}{2}\right  + C$ |

**1**  
Тренижер

| Мысленно измените<br>в исходном задании<br>переменную интегрирования,<br>введите<br>соответствующий множитель<br>и найдите интеграл |                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 1                                                                                                                                   | $\int 2 \cdot \operatorname{tg} x dx$                    |
| 2                                                                                                                                   | $\int \operatorname{ctg} 2x dx$                          |
| 3                                                                                                                                   | $\int (-2 \operatorname{ctg} 2x) dx$                     |
| 4                                                                                                                                   | $\int \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x dx$               |
| 5                                                                                                                                   | $2 \int \operatorname{ctg}\left(-\frac{1}{2}x\right) dx$ |

**2**  
Тренижер

| Тест 3             | $\frac{e^x}{2} + C$ | $2e^x + C$ | $e^{2x} + C$ | $\frac{e^{2x}}{2} + C$ | $\frac{e^2 e^{2x}}{2} + C$ | $2e^{2x} + C$ | $e^{4x} + C$ | $e^2 + C$ | $e^{2x} + C$ |
|--------------------|---------------------|------------|--------------|------------------------|----------------------------|---------------|--------------|-----------|--------------|
| Найдите интеграл   |                     |            |              |                        |                            |               |              |           |              |
| $2 \int e^x dx$    |                     |            |              |                        |                            |               |              |           |              |
| $\int e^{2x} dx$   |                     |            |              |                        |                            |               |              |           |              |
| $2 \int e^{2x} dx$ |                     |            |              |                        |                            |               |              |           |              |
| $\int e^2 dx$      |                     |            |              |                        |                            |               |              |           |              |
| $\int e^{2x+2} dx$ |                     |            |              |                        |                            |               |              |           |              |

# 6

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

### ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

*Тригонометрические  
тождества*

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \\ &= \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

#### ПРИМЕР

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x \, dx &= \\ &= \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \boxed{\int dx} = \\ &\quad \text{мысленное преобразование} \\ &= \operatorname{tg} x - x + C \end{aligned}$$

#### ПРИМЕР

$$\begin{aligned} \int \cos^2(-3x) \, dx &= \\ &= \frac{1}{3} \int \cos^2 3x \, d3x = \\ &\quad \text{мысленное преобразование} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 2} \int 2 \cos^2 3x \, d3x = \\ &= \frac{1}{6} \int [1 + \cos(2 \cdot 3x)] \, d3x = \\ &\quad \text{мысленное преобразование} \\ &= \frac{1}{6} \left( \boxed{\int d} 3x + \int \cos 6x \, d3x \right) = \\ &= \frac{1}{6} \left[ 3x + \frac{1}{2} \int \cos 6x \, d(2 \cdot 3x) \right] = \\ &\quad \text{мысленное преобразование} \\ &= \frac{1}{6} \left[ 3x + \frac{1}{2} \sin 6x \right] + C \end{aligned}$$

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

| Найдите интеграл                          |                                                                                                                                   |
|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1<br>Т<br>р<br>е<br>н<br>а<br>ж<br>е<br>р | 1 $\int (\operatorname{tg}^2 x - 1) dx =$                                                                                         |
|                                           | 2 $\int (\operatorname{ctg}^2 2x + 1) dx =$                                                                                       |
|                                           | 3 $\int \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx =$                                                                             |
|                                           | 4 $\int \left( \operatorname{tg} \frac{x}{3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{3} - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} \right) dx =$ |
|                                           | 5 $\int [1 - \operatorname{tg} x]^2 dx =$                                                                                         |

| Серия 2 | Найдите интеграл                                      |
|---------|-------------------------------------------------------|
| 1       | $\int (\sin x \cdot \cos x) dx$                       |
| 2       | $\int \frac{2 - \sin 2x}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx$     |
| 3       | $\int \frac{dx}{\cos 2x - \cos^2 x}$                  |
| 4       | $\int \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 2x} dx$   |
| 5       | $\int \frac{3 - \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$ |

# 7

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ АРГУМЕНТОМ

$k, p \neq 0$

$$\begin{aligned}
 F(x) : F'(x) &= f(x) \quad \forall x \in \langle a; b \rangle \\
 &\Downarrow \\
 \int f(kx+p) dx &= \int f(kx+p) \cdot \frac{1}{k} \cdot d(kx) = \boxed{d(kx) = d(kx+p)} \\
 &= \frac{1}{k} \cdot \int f(kx+p) d(kx+p) = \\
 &= \frac{1}{k} \cdot F(kx+p) + C
 \end{aligned}$$

#### ПРИМЕР

$$\int \frac{4 dx}{\sqrt{2x-7}} = ?$$

Анализ  
Числовой множитель  
подынтегральной функции

$$\sqrt{\underbrace{4}_{\text{Числовой множитель}} \cdot \underbrace{2 \cdot x - 7}_{\text{Параметры аргумента}}}$$

Параметры  
аргумента  
подынтегральной функции

Решение

$$\begin{aligned}
 \int \frac{4}{\sqrt{2 \cdot x - 7}} dx &= \\
 &= \frac{4}{2} \int \frac{1}{\sqrt{2x-7}} d(2x-7) = \\
 &= 4\sqrt{2x-7} + C
 \end{aligned}$$

Серия 1 Найдите интеграл

1  $\int \frac{1}{(2-x)^2} dx =$

2  $\int \frac{1}{(x-3)^3} dx =$

3  $\int \frac{3}{(5x-4)^4} dx =$

4  $\int \frac{6}{(7-6x)^5} dx =$

Серия 2 Найдите интеграл

1  $\int 2x dx =$

2  $\int 2\alpha d\frac{\alpha}{2} =$

3  $\int \frac{5t}{3} d\frac{t}{3} =$

4  $\int \frac{3\theta}{2} d\frac{2\theta}{3} =$

5  $\int \frac{y-2}{7} d\frac{y}{7} =$

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

| Осуществите корректировку<br>переменной интегрирования<br>и найдите интеграл                                      |                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div>3</div> <div>Тренижер</div> </div> | 1 $\int (2x+1) dx$                       |
|                                                                                                                   | 2 $\int \frac{dx}{2x-1}$                 |
|                                                                                                                   | 3 $\int \left(\frac{x}{3}-3\right)^2 dx$ |
|                                                                                                                   | 4 $\int \frac{dx}{(\sqrt{2}x+2)^4}$      |
|                                                                                                                   | 5 $\int 5\sqrt{5-\frac{x}{5}} dx$        |

| Запишите результат,<br>мысленно осуществив<br>корректировку<br>переменной интегрирования                          |                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div>4</div> <div>Тренижер</div> </div> | 1 $\int \operatorname{ctg} 2x dx$                               |
|                                                                                                                   | 2 $\int \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx$                       |
|                                                                                                                   | 3 $\int \frac{dx}{\sin^2(x-2)}$                                 |
|                                                                                                                   | 4 $\int \frac{dx}{\cos^2\left(2x-\frac{1}{2}\right)}$           |
|                                                                                                                   | 5 $\int \operatorname{ctg}\left(2-\frac{x}{\sqrt{2}}\right) dx$ |

| Тест 5 | Найдите<br>первообразную для<br>подынтегральной<br>функции | $2^{x+2}$ | $2x^2$ | $x \ln 2$ | $\ln x$ | $\ln 2$ | $4^x$ | $x^2$ | $\frac{2^{2x}}{\ln 2}$ |
|--------|------------------------------------------------------------|-----------|--------|-----------|---------|---------|-------|-------|------------------------|
|        | $\int 2^{2x+1} dx$                                         |           |        |           |         |         |       |       |                        |
|        | $\int 2^{x+2} \ln 2 dx$                                    |           |        |           |         |         |       |       |                        |
|        | $\int 2x dx$                                               |           |        |           |         |         |       |       |                        |
|        | $\int 2x d 2x$                                             |           |        |           |         |         |       |       |                        |
|        | $\int 4^x \ln 2 d 2x$                                      |           |        |           |         |         |       |       |                        |

# 8

## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

### АЛГОРИТМ КОРРЕКТИРОВКИ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\int f(kx + p) dx =$ <p style="text-align: center;"><i>Преобразование дифференциала</i></p> $= \frac{1}{k} \cdot \int f(kx + p) d(k \cdot x) =$ <p style="text-align: center;"><i>Добавление свободного члена к переменной интегрирования</i></p> $= \frac{1}{k} \cdot \int f(kx + p) d(kx + p) =$ <p style="text-align: center;"><i>Нахождение результата по таблице</i></p> $= \frac{1}{k} \cdot F(kx + p) + C$ | $\int (2x + 1)^2 dx =$ $= \frac{1}{2} \cdot \int (2x + 1)^2 d(2x) =$ $= \frac{1}{2} \cdot \int (2x + 1)^2 d(2x + 1) =$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x + 1)^3}{3} + C =$ $= \frac{(2x + 1)^3}{6} + C$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### ОБЩАЯ СХЕМА КОРРЕКТИРОВКИ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int f(kx + p) d(x) =$$

$$= \frac{1}{k} \cdot F(kx + p) + C$$

| Серия 1 | Восстановите подынтегральную функцию                                                                              |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | $\int ( ? ) dx = -\cos x + C = \int ( ? ) dx$                                                                     |
| 2       | $\int ( ? ) d 2x = -\operatorname{ctg} 2x + C = \int ( ? ) d 2x$                                                  |
| 3       | $\int ( ? ) d(3x+1) = \frac{(3x+1)^2}{2} + C = \int ( ? ) d(3x+1)$                                                |
| 4       | $\int ( ? ) d\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C = \int ( ? ) d\left(\frac{x}{2}\right)$ |
| 5       | $\int ( ? ) d(1-2x) = \cos(1-2x) + C = \int ( ? ) d(1-2x)$                                                        |



## ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Серия **2**

Найдите интеграл

$$1 \int \left( e^x - \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^x}{e^{2x}} \right) dx =$$

$$2 \int \left[ (\sin 2x \cdot \cos 2x)^2 + \frac{\cos^2 2x}{4} \right] dx =$$

$$3 \int \left( \frac{\operatorname{ctg}^2 3x}{3} - 1 \right) dx =$$

$$4 \int \left( \frac{1}{\sqrt{2x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{2}} \right) dx =$$

$$5 \int \left[ \frac{1}{\cos^2 \left( 1 + \frac{x}{2} \right)} - \frac{1}{\operatorname{ctg} \left( 1 - \frac{2x}{\sqrt{2}} \right)} \right] dx =$$

Информационная схема  
«ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ»

$$y = \underbrace{A}_{\text{параметр функции}} \cdot f(\underbrace{k}_{\text{параметры линейного аргумента}} \cdot \underbrace{x+p}_{\text{параметр функции}}) + \underbrace{B}_{\text{параметр функции}}$$

КОРРЕКТИРОВКА  
ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int f(x+p) dx = \int f(x+p) d(x+p) \quad \int f(kx) dx = \frac{1}{k} \int f(kx) d(kx)$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ  
ФУНКЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ АРГУМЕНТОМ

$$\int f(kx+p) dx = \frac{\int f(kx+p) d(kx+p)}{k}$$

Выделяется  
целая часть дроби

$$R = \frac{k_1 x^{n+s} + \dots + k}{p_1 x^n + \dots + p}$$

Степень числителя  
меньше  
степени знаменателя

$$\int \frac{R(x) dx}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \int \frac{A dx}{x-a} + \int \frac{B dx}{x-b} + \int \frac{C dx}{x-c}$$

A, B, C  
находятся  
методом  
подстановки

1

$$\int \left( \frac{2}{\sqrt{2x-1}} + \frac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{2}} \right) dx =$$

2

$$\int \frac{1 - \sin^2(1-x)}{\cos^2(x-1)} dx =$$

3

По результату интегрирования  $\ln \left| \frac{\sqrt[3]{x+5}}{(x-5)^3} \right| + C$  восстановите подынтегральную функцию

## Самостоятельная работа 3

### Вариант 1

|   |                                                                                                 |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $\int \frac{\sin 3x}{3} dx$                                                                     |
| 2 | $\int \left( \frac{\sqrt{ex} - \sqrt{e^3}}{\sqrt{e}} \right)^2 dx$                              |
| 3 | $\int \left( \sin^2 \frac{3x}{2} - 1 \right) dx$                                                |
| 4 | $\int \frac{\sin 2x}{2 \sin^2 x} dx$                                                            |
| 5 | $\int \frac{2 dx}{x^2 - 1}$                                                                     |
| 6 | $\int \frac{3x-1}{6x-1} dx$                                                                     |
| 7 | $\int \left( \frac{2}{\operatorname{tg}(2x+1)} + \frac{3}{\operatorname{ctg}(3x-1)} \right) dx$ |

### Вариант 2

|   |                                                                          |
|---|--------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $\int \frac{x^4 - x^{-4} + 2}{x^2} dx$                                   |
| 2 | $\int \sin^4 \frac{x}{4} dx$                                             |
| 3 | $\int \frac{\sqrt{7x-1}}{\sqrt{7\pi x}} dx$                              |
| 4 | $\int \frac{2x-3x^2-1}{(x+1)(x-2)} dx$                                   |
| 5 | $\int \left( \frac{1}{\sqrt{1-2x}} + 2 \sqrt{\frac{1-2x}{2}} \right) dx$ |
| 6 | $\int \frac{3 \cos^2 3x dx}{\sin^2(-3x)}$                                |
| 7 | $\int \frac{2x^2-5}{2(x^2-1)(x^2-4)} dx$                                 |

## Самостоятельная работа 3

### Вариант 3

|   |                                                                                  |
|---|----------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $\int \left[ \sin^2(1-x) - \operatorname{ctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} \right] dx :$ |
| 2 | $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx :$                                            |
| 3 | $\int \operatorname{ctg}^3 \left( 2x - \frac{\pi}{2} \right) dx :$               |
| 4 | $\int \frac{e^x+3}{e^{2x}-4e^x+3} de^x$                                          |
| 5 | $\int \cos \frac{x}{4} \cdot \sin \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{2} dx$         |
| 6 | $\int \sqrt{\frac{\sqrt[4]{2x-1}}{2}} dx$                                        |
| 7 | $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx$                                           |

## *Разные задачи*

1  $\int [f'(x) + g'(x)] dx$

2  $\int \left[ \frac{f'(x)}{f(x)} + f'(x) \cdot f(x) \right] dx$

3 Найдите  $F(x)$  : 
$$\begin{cases} F'(x) = 6x + 3 \\ F(-2) = 4 \end{cases}$$

4  $\int (\ln x)' \frac{dx}{\ln^2 x}$

5 Докажите, что если  $F'(x) = f(x)$ ,  
то  $\int f[f(x)] \cdot f'(x) dx = F[f(x)] + C$

### ***Использованная литература***

1. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл.сред. шк.– М.: Просвещение, 1991.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учебн. пособие для вузов.– 7-е изд., испр.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.