

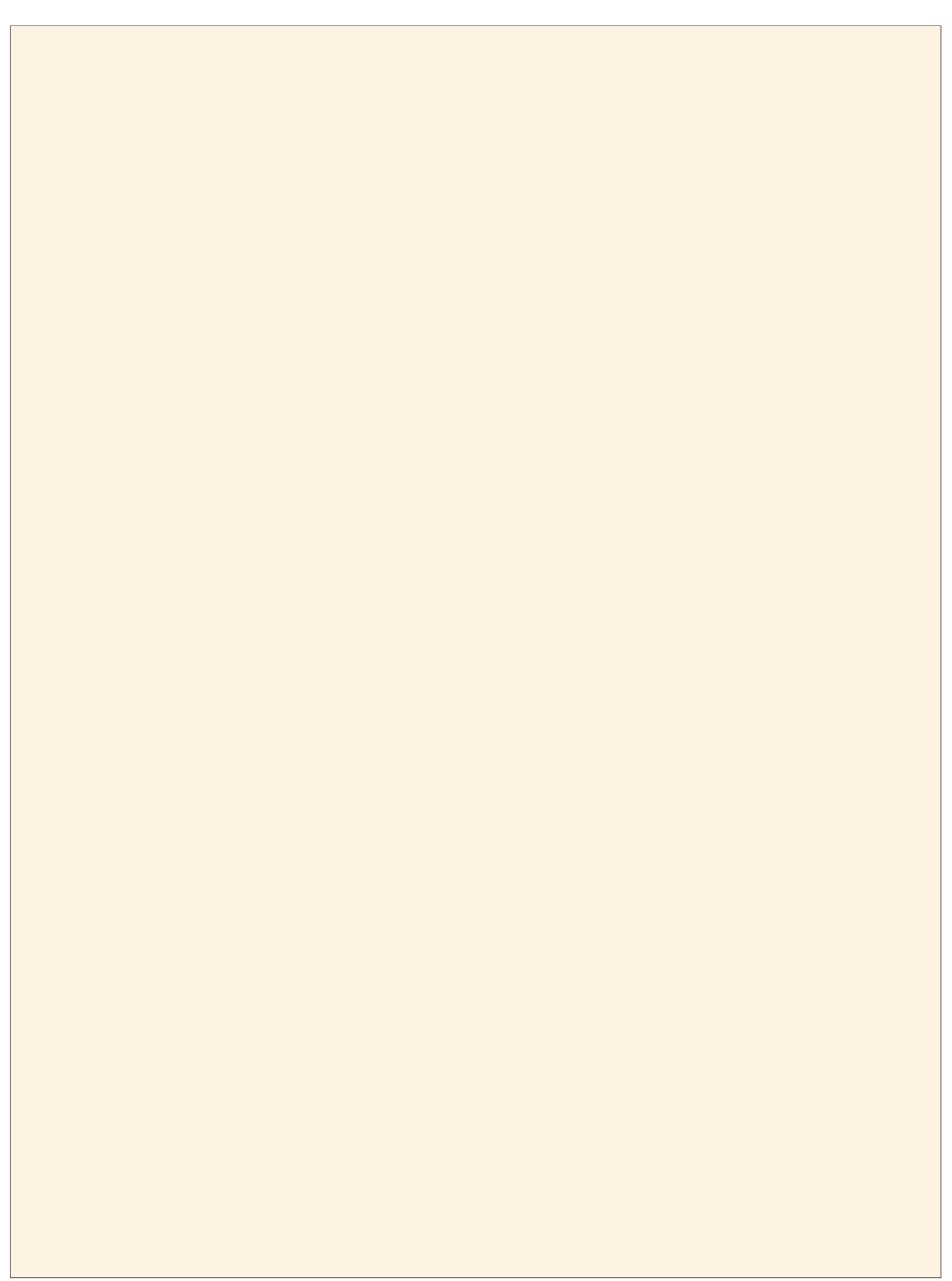
Н.А. РЕЗНИК, Г.Б. КАЗАКОВА

*Неопределенный
интеграл*

*Визуальный
конспект-практикум*

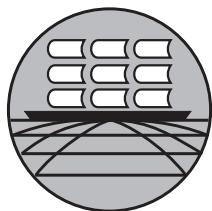
*Выпуск II
Часть 1*

*Простейшие
методы интегрирования*





ИНСТИТУТ ПРОДУКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ
МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ



Н.А. РЕЗНИК

Неопределенный интеграл

Визуальный
конспект-практикум

*Выпуск II
Часть 1*

*Простейшие
методы интегрирования*

Мурманск
1998

УДК 512.83(07)
ББК 22.143. я7

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум. Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

Второй выпуск визуального конспекта-практикума "Неопределенный интеграл" разработан для студентов 1-го курса технологического факультета Мурманского государственного технического университета с целью помочь им получить представления о простейших методах интегрирования. В данном выпуске содержится более 500 задач и упражнений различного уровня сложности. Ответы к упражнениям и подробные решения к задачам на доказательство приведены во 2-й части данного выпуска. Отдельные страницы и примеры пособия могут быть использованы в качестве дополнительных didактических материалов в 11-х классах средних общеобразовательных школ с углубленным и расширенным изучением математики, а также в группах технических специализаций техникумов и колледжей. Конспект-практикум может оказать помощь в самостоятельных занятиях студентам вечернего и заочного отделений университета.

The second issue of the visual manual "Indefinite Integral" has been worked out for students of the 1-st course of the Technological Faculty of the Murmansk State Technical University in order to help them to get knowledge about elementary methods of integration. The manual contains more than 500 tasks and exercises of the various level of complexity. Key answers and detailed decisions to the tasks are given in the second part of the issue. Separate pages and examples of the manual can be used as additional didactic materials for the 11-th forms of secondary schools with advanced study of mathematics, and also in technical schools and colleges. The manual can be useful for students of evening and correspondence courses of the University.

Рецензент - Н.Р. Ланина, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики Мурманского государственного технического университета

© Резник Наталия Александровна
Казакова Галина Борисовна

© Мурманский государственный технический университет, 1998

Резник Наталия Александровна
Казакова Галина Борисовна
Неопределенный интеграл: Визуальный конспект-практикум: Выпуск II. Часть 1-я

© Графика, компьютерный набор и верстка Н.А.Резник

Редактор Е.В. Смирнова
Корректор Т.А. Пехтерева

ISBN 5-86185-0960X



1. Подынтегральная функция и ее аргумент	4
2. Таблица интегралов	6
3. Главный принцип использования таблицы	8
Основные свойства неопределенного интеграла	8
4. Особенность интегрирования функции $f(x \pm p)$	10
5. Влияние числового множителя аргумента подынтегральной функции на результат интегрирования	12
6. Обратные тригонометрические функции и логарифмы в качестве первообразных	14
7. Расширение таблицы интегралов	16
«Свободный» параметр в интеграле вида $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	16
«Свободный» параметр в интеграле вида $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$	17
8. Структура табличных выражений с параметром	18
9. Важное свойство табличного интеграла	20
10. Корректировка переменной интегрирования в интеграле со «свободным» параметром	22
Информационная схема	
«Анализ структуры табличного интеграла»	24
Самостоятельная работа 1.	
Вариант 1	25
Вариант 2	25
Вариант 3	26

1

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

ПОДЫНТЕГРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ АРГУМЕНТ

$F(x), f(x) \colon \forall x \in \langle a; b \rangle$

$$\left[\underbrace{F(x)} \right]' = \underbrace{f(x)}$$

Первообразная Производная
для $f(x)$ от $F(x)$

$$\int \underbrace{f(\overbrace{x})}_{\substack{\text{Подынтегральная} \\ \text{функция}}} d\overbrace{x}^{\substack{\text{Переменная} \\ \text{интегрирования}}}$$

Множество первообразных
для $f(x)$

$$f(x) = \overbrace{F(x) + C}^{'}$$

$\iff C - \forall const$

$$\int f(x) dx = \underline{\underline{F(x) + C}}$$

Неопределенный интеграл функции $f(x)$

$$\int f(*)d* = F(*) + C$$

↑
[...]

1 Докажите,
что

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = +\operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x + C$$

2

Докажите, что

3 Докажите,
 что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = +\arcsin x - \arccos x + C$$

4

Докажите,
что

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

Серия 5

Восстановите
подынтегральную функцию

1 $\int (\quad) dx = 77x + C$

2 $\int (\quad) dx = \frac{1}{2x} + C$

3 $\int (\quad) dx = \ln|x| + C$

4 $\int (\quad) dx = \operatorname{tg} x + C$

5 $\int (\quad) dx = \operatorname{arc ctg} x + C$

Серия 6

Восстановите
подынтегральную функцию

1 $\frac{x^3}{3} + C = \int (\quad) dx$

2 $121 \cdot \sin x + C = \int (\quad) dx$

3 $2\sqrt{2 \cdot x} + C = \int (\quad) dx$

4 $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C = \int (\quad) dx$

5 $-\frac{\ln|\cos x|}{e^2} + C = \int (\quad) dx$

7

Докажите,
что $\int (\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x) dx = \ln|\operatorname{tg} x| + C$

8

Докажите,
что

$$\int \left(-\frac{4 \cos 2x}{\sin^2 2x} \right) dx = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + C$$

2

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ		
Производная	Первообразная $+C$	
$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
k	$kx + p$	$\frac{kx^2}{2} + px$
nx^{n-1}	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$-\frac{1}{x^2 \cdot \ln a}$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\log_a x $
$a^x \cdot \ln a$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
e^x	e^x	e^x
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$-\ln \cos x $
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{ctg} x$	$\ln \sin x $
$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\cos x} = \sec x$	$\ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right = \ln \left \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right $
$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$	$\ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right = \ln \left \frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right $

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

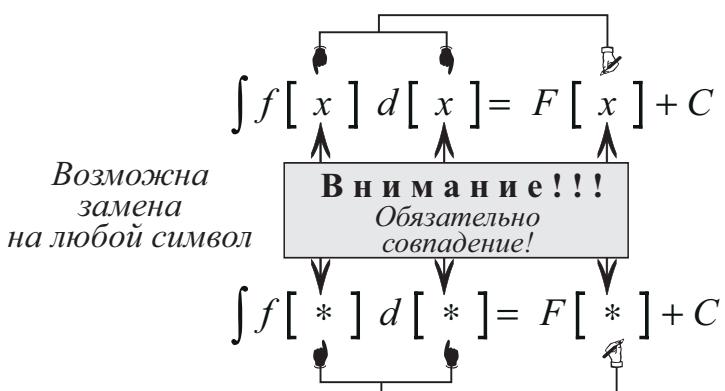
		Найдите интеграл		
1 Трениажер		$\int 2^x dx =$		
		$\int 3^x \cdot 5^x dx =$	1 Трениажер	
2		$\int \sqrt{4^x} dx =$		
3		$\int \frac{e^x}{10^x} dx =$		
4		$\int (3^x)^2 dx =$	2 Трениажер	
5		$\int (-\operatorname{tg} x) dx =$		
6		$\int \left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) dx =$	3 Трениажер	
7		$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}} =$		

		Найдите интеграл		
3 Трениажер		$\int \sqrt[3]{x} dx =$		
		$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx =$	3 Трениажер	
2		$\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^5}} dx =$		
3		$\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx =$		
4		$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}} =$	4 Трениажер	
5		$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}} =$		

3

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

ГЛАВНЫЙ ПРИНЦИП ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТАБЛИЦЫ



ПРИМЕР

$$\int * d * = \frac{*^2}{2} + C$$

$$\int y d y = \frac{y^2}{2} + C$$

$$\int \cos t d \cos t = \frac{(\cos t)^2}{2} + C$$

$$\int \sqrt{\cos \alpha} d \sqrt{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{2} + C$$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$d \left[\int f(x) dx \right] = d [F(x) + C] = d F(x) + \underbrace{dC}_0 = d F(x) = F'(x) dx = f(x) dx$$

Дифференциал от неопределенного интеграла

$$\left[\int f(x) dx \right]' dx = [F(x) + C]' = F'(x) + \underbrace{C'}_0 = f(x)$$

Производная от неопределенного интеграла

$$\int d F(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C$$

Неопределенный интеграл для дифференциала функции

ПРИМЕР

$$d \int \cos 5x dx = \cos 5x dx$$

$$\int d \cos 5x = \cos 5x + C$$

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

МАТРИЦА 1		Для каждого интеграла		
ГЛАВНЫЙ ПРИНЦИП ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТАБЛИЦЫ		определите подходящую замену	осуществите замену в интеграле	определите перво- образную
$\int e^{\sqrt{\sin x}} d\sqrt{\sin x}$				
$\int \sin x d\sqrt{\sin x}$				
$\int \operatorname{ctg}^2 \sqrt{\operatorname{tg} x} d \operatorname{ctg} \sqrt{\operatorname{tg} x}$				
$\int \frac{d \operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg} x^2}}$				
$\int \frac{d \sin \sqrt{x}}{\sqrt{1 - \sin^2 \sqrt{x}}}$				

Серия 2		Найдите интеграл
1	$\int \operatorname{tg}^2 x d \operatorname{tg} x =$	
2	$\int \operatorname{tg} x d \operatorname{tg} x =$	
3	$\int \frac{1}{\operatorname{tg} x} d \operatorname{tg} x =$	
4	$\int 4^{\operatorname{tg} x} d \operatorname{tg} x =$	
5	$\int 2\sqrt{\operatorname{tg} x} d 4^{\operatorname{tg} x} =$	

Серия 3		Найдите интеграл
1	$\int d \ln x =$	
2	$\left[\int 4 \operatorname{tg} \sqrt{x} dx \right]' =$	
3	$d \int s d \sqrt{2} s =$	
4	$\int d \frac{1}{5x} =$	
5	$d \int \sqrt{\cos x} d \sqrt{\cos x} =$	

4

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

ОСОБЕННОСТЬ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИИ $f(x \pm p)$

$$\begin{aligned} & \int f[x \pm p] dx = \\ & = \int f[x \pm p] d[x \pm p] = \quad \text{Посмотрите} \\ & \quad \text{и} \\ & \quad \text{корректировка} \\ & \quad \text{переменной интегрирования} \\ & = F[x \pm p] + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [f(x \pm p)]' = \\ & = f'(x \pm p) \cdot \underbrace{(x \pm p)}_1' = \\ & = f'(x \pm p) \end{aligned}$$

ПРИМЕР

$$\int \cos(x - 5) dx = \int \cos(x - 5) d(x - 5) = \sin(x - 5) + C$$

ПРИМЕР

$$\int \frac{1}{\cos^2(x+3)} dx = \int \frac{1}{\cos^2(x+3)} d(x+3) = \frac{\operatorname{tg}(x+3)}{3} + C$$

Найдите интеграл

1 $\int \frac{1}{(x-1)^2} dx =$

2 $\int \frac{1}{(x+2)^2} dx =$

3 $\int \frac{1}{(x-3)^3} dx =$

4 $\int \frac{1}{(x+\sqrt{5})^5} dx =$

5 $\int \frac{1}{(x-\pi)^9} dx =$

2

Докажите,
что

$$\begin{aligned} \int f(x) d(x \pm p) &= \\ &= F(x) + C \end{aligned}$$

3

Докажите,
что

$$\begin{aligned} \int f(x-p) d(x+p) &= \\ &= F(x-p) + C \end{aligned}$$

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

Найдите интеграл	
1	$\int \frac{dx}{x-135} =$
2	$\int \frac{dx}{(x-531)^3} =$
3	$\int \cos(x+153) dx =$
4	$\int \frac{\sin(x-315)}{\cos^2(x-315)} dx =$
5	$\int 7^{x+531} dx =$

Серия 5		Восстановите недостающие данные в неопределенном интеграле
1	$\int d(x-\sqrt{3}) =$	$+C$
2	$\int d(x-\sqrt{3}) =$	$\frac{x^2}{2} + C$
3	$\int \frac{dx}{(x-\sqrt{3})} =$	$-\frac{1}{(x-\sqrt{3})} + C$
4	$\int \frac{d(x+\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}} =$	$+C$
5	$\int (\quad) d(-x) =$	$\frac{(\sqrt{3}-x)^2}{2} + C$

Серия 6		Восстановите подынтегральную функцию
1	$\int (\quad) d(x+1) =$	$\sin(x+1) + C$
2	$\int (\quad) d(x-1) =$	$\operatorname{tg}(x-1) + C$
3	$\int (\quad) d(\sqrt{2}+x) =$	$-\ln \cos(\sqrt{2}+x) + C$
4	$\int (\quad) d\left(x-\frac{1}{2}\right) =$	$\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + C$
5	$\int (\quad) d \sin\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$	$\ln \left \sin\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right + C$

5

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

ВЛИЯНИЕ ЧИСЛОВОГО МНОЖИТЕЛЯ АРГУМЕНТА ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ НА РЕЗУЛЬТАТ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$(f[kx])' = f'[kx] \cdot \underbrace{[kx]'}_k = k f'[kx]$$

Посмотрите
и сравните!

$$\int f[kx] dx = \frac{1}{k} \int f[kx] d[kx] = \frac{1}{k} F[kx] + C$$

Корректировка
переменной интегрирования

ПРИМЕР

$$\int \cos 5x dx = \frac{1}{5} \int \cos 5x d[5x] = \frac{1}{5} \sin 5x + C$$

Корректировка
переменной интегрирования

$$\int \frac{1}{\cos^2 3x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 3x} d[3x] = \frac{\operatorname{tg} 3x}{3} + C$$

ПРИМЕР

1

Докажите,
что

$$\int [k \cdot f(kx)] dx = F(kx) + C$$

2

Докажите,
что

$$\int \left[\frac{1}{k} \cdot f\left(\frac{x}{k}\right) \right] dx = F\left(\frac{x}{k}\right) + C$$

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

МАТРИЦА 3	Для каждого интеграла			
СВОЙСТВО ЧИСЛОВОГО МНОЖИТЕЛЯ АРГУМЕНТА ПОДИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ	определите		осуществите корректировку переменной интегрирования	запишите результат интегрирования
	аргумент подынтегральной функции	переменную интегрирования		
$\int \operatorname{ctg} x d\sqrt{2x}$				
$\int \operatorname{tg} \sqrt{2x} dx$				
$\int \operatorname{ctg} 2x d\sqrt{2x}$				
$\int \operatorname{tg} \sqrt{2x} d2x$				
$\int \operatorname{ctg} 2\sqrt{2x} dx \frac{x}{\sqrt{2}}$				

Найдите интеграл	
4	1 $\int \operatorname{tg} 111x dx =$
Трениажер	2 $\int \operatorname{ctg} \frac{x}{222} dx =$
	3 $\int \frac{dx}{\sin^2 333x} =$
	4 $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{555}} =$
	5 $\int \frac{dx}{\cos 444x} =$

Серия 5 Найдите интеграл	
1	$\int \sqrt{2} s d\sqrt{2}s =$
2	$\int 2 \ln x d \ln x =$
3	$\int 4 \operatorname{tg} \sqrt{x} d \operatorname{tg} \sqrt{x} =$
4	$\int \frac{5}{x} d \frac{1}{5x} =$
5	$\int \frac{3}{2} \cos x d \frac{2}{3} \sqrt{\cos x} =$

6

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ЛОГАРИФМЫ В КАЧЕСТВЕ ПЕРВООБРАЗНЫХ

Производная		Первообразная
$f(x)$	→	$\int f(x)dx + C$
$f'(x)$	→	$f(x)$
$\frac{1}{x^2+1}$		$\operatorname{arc tg} x$ $-\operatorname{arcctg} x$
$\frac{1}{x^2-1}$		$\frac{1}{2} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right $
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\operatorname{arc sin} x$ $-\operatorname{arc cos} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$		$\ln \left x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right $

1	Докажите, что	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln \left \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2-1}} \right + C$

2	Докажите, что	$\int \frac{1}{(kx)^2-1} dx = -\frac{1}{2k} \ln \left \frac{kx+1}{kx-1} \right + C$

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

Мысленно осуществите корректировку переменной интегрирования и найдите интеграл	
3 Трениажер	$\int \frac{dx}{(x-1)^2+1} =$
4 Трениажер	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+2)^2}} =$
1	$\int \frac{dx}{(x+2)^2+1} =$
2	$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-1}} =$
3	$\int \frac{dx}{(x-1)^2-1} =$
4	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-\pi)^2}} =$
5	$\int \frac{dx}{1-(x-1)^2} =$
	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2e)^2}} =$
	$\int \frac{dx}{1+(x-e^2)^2} =$
	$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+1}} =$

		Серия 5	Серия 6
		Осуществите корректировку переменной интегрирования	
1	$\int \frac{dx}{(2x)^2+1} =$		
2	$\int \frac{dx}{9x^2-1} =$		
3	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}} =$		
4	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{e^2}}} =$		
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-1}} =$		
Найдите интеграл			

7

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

РАСШИРЕНИЕ ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛОВ

a – «свободный» параметр

Список интегралов
со «свободными параметрами»

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

«СВОБОДНЫЙ» ПАРАМЕТР В ИНТЕГРАЛЕ ВИДА

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$$

Табличный интеграл

$$\int \frac{d*}{1+*^2} = \operatorname{arctg} * + C$$

Поиск

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(\underbrace{a}_{\text{«Свободный»}})^2 + x^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\frac{a^2 + x^2}{a^2}} = \\ \text{параметр} &= \frac{1}{a^2} \cdot a \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} d \frac{x}{a} = \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

Проверка

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \right)' &= \frac{1}{a} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right)' = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{x}{a} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\frac{a^2 + x^2}{a^2}} = \\ &= \frac{a^2}{a^2(a^2 + x^2)} = \frac{1}{a^2 + x^2} \end{aligned}$$

1	$\int \frac{dx}{5^2 + x^2}$	
2	$\int \frac{dx}{4 - x^2}$	
3	$\int \frac{dx}{3 - x^2}$	
4	$\int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}}$	

Определите
«свободный»
параметр
подынтегральной
функции

1	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - e^2}}$	1
2	$\int \frac{dx}{\sqrt{e^4 + x^2}}$	2
3	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + e}}$	3
4	$\int \frac{dx}{\sqrt{\ln 2 - x^2}}$	4

2
тренажер

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

«СВОБОДНЫЙ» ПАРАМЕТР

В ИНТЕГРАЛЕ ВИДА $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$

Табличный интеграл

$$\int \frac{1}{*^2 - 1} d * = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{* - 1}{* + 1} \right| + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\frac{x^2 - a^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2} \cdot a \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} d \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\frac{x}{a} - 1}{\frac{x}{a} + 1} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{\frac{x-a}{a}}{\frac{x+a}{a}} \right| + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - *^2}} = \arcsin \frac{*}{a} + C$$

3

Докажите,
что

4

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + *^2}} = \ln \left| x + \sqrt{a^2 + *^2} \right| + C$$

Табличный интеграл

$$\int \frac{d *}{\sqrt{1 - *^2}} = \arcsin * + C$$

(Рассмотрите при $a < 0$)

Табличный интеграл

$$\int \frac{d *}{\sqrt{1 + *^2}} = \ln \left| * + \sqrt{1 + *^2} \right| + C$$

(Рассмотрите при $a > 0$)

8

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

СТРУКТУРА ТАБЛИЧНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Структура

Заполните пропуски в таблице

Структура

1

Трениажер

$$f(*) = \frac{1}{(*)^2 + a^2}$$

$$f(x) \longrightarrow \int f(x) dx$$

$$+ C$$

$$\int f(*) dx$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \operatorname{arc tg} \frac{*}{a} \\ & - \frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{*}{a} \end{aligned}$$

2

Трениажер

$$\frac{1}{x^2 - a^2}$$

$$\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - (*)^2}}$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{arc sin} \frac{*}{a} \\ & - \operatorname{arc cos} \frac{*}{a} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$\ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|$$

ПРИМЕР

$$\int \frac{dx}{5+x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{5})^2 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

3

Докажите,
что

$$\int \frac{dx}{a^2 + \left(\frac{x}{a} \right)^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

Восстановите подынтегральную функцию
по ее первообразной

4 <small>Трениажер</small>	1 $\int (\quad) dx = \ln x + \sqrt{x^2 + 1} + C$	1 $\int (\quad) dx = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + C$
	2 $\int (\quad) dx = \ln x + \sqrt{x^2 - 9} + C$	2 $\int (\quad) dx = \frac{1}{4} \ln \left \frac{2+x}{2-x} \right + C$
	3 $\int (\quad) dx = \ln x + \sqrt{x^2 + 2} + C$	3 $\int (\quad) dx = \frac{1}{6} \ln \left \frac{3+x}{3-x} \right + C$
	4 $\int (\quad) dx = \ln x + \sqrt{x^2 - 3} + C$	4 $\int (\quad) dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x} \right + C$
	5 $\int (\quad) dx = \ln x + \sqrt{x^2 - \sqrt{2}} + C$	5 $\int (\quad) dx = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} \ln \left \frac{x - \sqrt[4]{3}}{x + \sqrt[4]{3}} \right + C$

5
Трениажер

Серия 6 Найдите интеграл

1 $\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{7}\right)^2} =$

2 $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 25}} =$

3 $\int \left(-\frac{1}{\sqrt{4-s^2}} \right) ds =$

4 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \sqrt{7}}} =$

5 $\int \frac{dr}{r^2 - 3} =$

9

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

ВАЖНОЕ СВОЙСТВО ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

$$\int f(kx+p) dx = \frac{1}{k} \int f(kx+p) d(kx+p) = \frac{1}{k} F(kx+p) + C$$

$$\int f(*) d(*) = F(*) + C$$

При использовании таблицы интегралов переменную интегрирования необходимо корректировать так, чтобы **составали** аргумент подынтегральной функции и переменная интегрирования

ПРИМЕР

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}(1-5x) dx &= -\frac{1}{5} \int \operatorname{tg}(1-5x) d(-5x) = \\ &= -\frac{1}{5} \int \operatorname{tg}(1-5x) d(1-5x) = \\ &= \frac{1}{5} \ln |\cos(1-5x)| + C \end{aligned}$$

Заполните пропуски в решении примера	
1 тре- наже- п	1 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \boxed{} \int \frac{d \boxed{}}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \boxed{} \arcsin \boxed{} + C$
	2 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \boxed{} \int \frac{d \boxed{}}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \boxed{} \arcsin \boxed{} + C$
	3 $\int \frac{d 2x}{\sqrt{1-2x^2}} = \boxed{} \int \frac{d \boxed{}}{\sqrt{1-(\boxed{})^2}} = \boxed{} \arcsin \boxed{} + C$
	4 $\int \frac{dz}{\sqrt{1-(z-1)^2}} = \boxed{} \int \frac{d(\boxed{})}{\sqrt{1-(z-1)^2}} = \boxed{} \arcsin \boxed{} + C$
	5 $\int \frac{dy}{\sqrt{1-(2y-1)^2}} = \boxed{} \int \frac{d(\boxed{})}{\sqrt{1-(2y-1)^2}} = \boxed{} \arcsin \boxed{} + C$

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

1	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+2)^2}} =$
2	$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 - 1}} =$
3	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+(\pi-x)^2}} =$
4	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2e-x)^2}} =$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{(1-\sqrt{2}x)^2}{2}}} =$

Для каждого интеграла	определите аргумент подынтегральной функции		осуществите корректировку переменной интегрирования		найдите интеграл
3	4	5			
$\int \frac{dx}{(x-1)^2}$	1	1			1
$\int \frac{dx}{(1-x)^3}$	2	2			2
$\int \frac{dx}{(2x+1)^4}$	3	3			3
$\int \frac{dx}{(1-3x)^5}$	4	4			4
$\int \frac{dx}{\left(5-\frac{x}{4}\right)^{10}}$	5	5			5

10

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

КОРРЕКТИРОВКА ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ИНТЕГРАЛЕ СО «СВОБОДНЫМ» ПАРАМЕТРОМ

$$\int f(\mathbf{a}, x \pm \mathbf{p}) dx = \int f(\mathbf{a}, x \pm \mathbf{p}) d(x \pm \mathbf{p})$$

Корректировка переменной интегрирования

$$\int f(\mathbf{a}, \mathbf{k}x) dx = \frac{1}{\mathbf{k}} \int f(\mathbf{a}, \mathbf{k}x) d(\mathbf{k}x)$$

Параметры линейного аргумента

$$\int f(\underbrace{\mathbf{a}}_{\text{«Свободный» параметр}}; \underbrace{\mathbf{k}}_{\text{параметр}} \cdot x + \underbrace{\mathbf{p}}_{\text{параметр}}) dx$$

«Свободный» параметр

ПРИМЕР

$$\int \frac{dx}{\underbrace{9}_{\mathbf{a}^2} + (3x)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{\underbrace{3^2}_{\mathbf{a}^2} + (3x)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \arctg \frac{3x}{\underbrace{3}_{\mathbf{a}}} + C = \frac{1}{9} \arctg \frac{x}{\underbrace{3}_{\mathbf{a}}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\underbrace{\sqrt[4]{7}}_{\mathbf{a}^2} + (x + \sqrt[3]{7})^2} = \int \frac{d(x + \sqrt[3]{7})}{\underbrace{(\sqrt[4]{7})^2}_{\mathbf{a}^2} + (x + \sqrt[3]{7})^2} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt[4]{7}}_{\mathbf{a}}} \arctg \frac{x + \sqrt[3]{7}}{\underbrace{\sqrt[4]{7}}_{\mathbf{a}}} + C$$

ПРИМЕР

МАТРИЦА 1

ПАРАМЕТРЫ ПОДИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ЛИНЕЙНОГО АРГУМЕНТА

Для каждой подынтегральной функции определите параметр

«свободный» аргумента

Восстановите данные в оформлении корректировки переменной интегрирования

Найдите интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2 - 1}}$$

$$\boxed{\quad} \int \frac{d \boxed{\quad}}{\sqrt{(4x)^2 - 1}}$$

$$\int \frac{dx}{25 - 4x^2}$$

$$\boxed{\quad} \int \frac{d \boxed{\quad}}{(5)^2 - (\quad)^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 9x^2}}$$

$$\boxed{\quad} \int \frac{d \boxed{\quad}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\quad)^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 5x^2}}$$

$$\boxed{\quad} \int \frac{d \boxed{\quad}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\quad)^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\frac{1}{7} - 7x^2}$$

$$\boxed{\quad} \int \frac{d \boxed{\quad}}{\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 - (\quad)^2}$$

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

Тест 2 Восстановите интеграл	$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2}$	$2 \int \frac{dx}{4+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+4x^2}$	$\int \frac{dx}{4+16x^2}$	$\int \frac{dx}{16+4x^2}$	$\int \frac{dx}{1+16x^2}$	$4 \int \frac{dx}{1+16x^2}$
$\frac{\operatorname{arctg} 4x}{4} + C$							
$\frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C$							
$\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$							
$\frac{\operatorname{arctg} 2x}{2} + C$							
$\operatorname{arctg} 4x + C$							

Серия 3	Восстановите подынтегральную функцию
1	$\int [] dx =$ $= \frac{(kx+p)^3}{3k} + a^2 x + C$
2	$\int [] dx =$ $= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{(kx+p)}{a} + C$
3	$\int [] dx =$ $= \frac{1}{2ak} \ln \left \frac{kx+p-a}{kx+p+a} \right + C$
4	$\int [] dx =$ $= \ln \left x + \frac{\sqrt{(kx+p)^2 \pm a^2}}{k} \right + C$
5	$\int [] dx =$ $= \frac{1}{k} \operatorname{arcsin} \frac{kx+p}{a} + C$

Серия 4	Найдите интеграл
1	$\int \frac{dx}{(2x+1)^2 + 4} =$
2	$\int \frac{dx}{(5x-3)^2 - 9} =$
3	$\int \frac{dx}{\sqrt{2 + \left(3x + \frac{1}{7}\right)^2}} =$
4	$\int \frac{dx}{\sqrt{2 - (7x + \sqrt{3})^2}} =$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{(7-6x)^2 - 2}} =$

**Информационная схема
«АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА»**

$$\int \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{Аргумент интегрирования} \\ \text{Подынтегральная} \\ \text{функция}}} dx$$

Подынтегральное выражение

$$\int f(*) dx = F(*) + C$$

↑
[...]'



ОБРАТИМОСТЬ ОПЕРАЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$d \int f(x) dx = f(x) dx$$

$$\left[\int f(x) dx \right]' = [f(x)]$$

$$\int d F(x) = F(x) + C$$

КОРРЕКТИРОВКА ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int f(kx+p) dx = \frac{1}{k} \int f(kx+p) d(kx+p) = \frac{1}{k} F(kx+p) + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

Параметры линейного аргумента

$\int f(\underbrace{a}_{\text{«Свободный» параметр}}; \underbrace{k \cdot x + p}_{\text{}}) dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc sin} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

$$1 \quad \int \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) d\varphi =$$

$$2 \quad \int (2x - 5)^{10} dx =$$

$$3 \quad \int \frac{d(a+1)}{4+a^2} =$$

$$4 \quad \int \frac{d2x^2}{\sqrt{x^4 - 5}} =$$

$$5 \quad \int \frac{dy}{9-(y+4)^2} =$$

$$6 \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ctg}3x} =$$

$$7 \quad \int \sqrt[5]{5 \cdot 4^x + 10} d(4^x) =$$

Вариант 2

$$1 \quad \int \cos(2x+3)d(x-1) =$$

$$2 \quad \int (\operatorname{tgn}n+4)d(\operatorname{tgn}) =$$

$$3 \quad \int e^{5x} \cdot e^2 d3x =$$

$$4 \quad \int \frac{d \ln x}{1+(2 \ln x)^2} =$$

$$5 \quad \int \frac{dy}{\sqrt{5y+\ln 3}} =$$

$$6 \quad \int \frac{d(\sqrt{2} \sin x)}{\sqrt{8-2(3 \sin x+1)^2}} =$$

$$7 \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\pi^2 + e^2 x^2}} =$$

Самостоятельная работа 1

Вариант 3

1 $\int (\pi + x + e) d(ex) =$

2 $\int \frac{dx}{\ln 3^x} =$

3 $\int \frac{d \sin z}{(\operatorname{ctg} z)} =$

4 $\int \frac{d(y+1)}{4y^2 + \sin^2 4} =$

5 $\int \frac{d(3x-4)}{\sqrt{(2x+1)^2 + \pi}} =$

6 $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - (x^2 + 2x + 1)}} =$

7 $\int [\operatorname{tg}(\sqrt{2} \sin x)] d \sin x =$