ИНСТИТУТ ПРОДУКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МГПУ

Н. Резник, Л. Негодяева

Начальные представления о дифференциальном исчислении

Визуальный конспект-практикум

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2005

Основные обозначения

$\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел
$\mathbf{Z}$ – множество целых чисел
$\mathbf{Q}$ – множество рациональных чисел
$\mathbf{R}$ – множество действительных чисел
$\langle a;b\rangle$ – произвольный промежуток
$[a;b]$ – замкнутый промежуток (отрезок)
$(a;b)$ – открытый промежуток (интервал)
$(a;b]$ – полуоткрытый промежуток (полуинтервал)
$[a;b)$ – полуоткрытый промежуток (полуинтервал)
$\in$ – знак принадлежности множеству
$\notin$ – знак непринадлежности множеству
$\Rightarrow$ – знак логического следования
$\Leftrightarrow$ – знак равносильности
$\forall$ – квантор всеобщности
(соответствует словам "для любого", "для каждого","для всех")
$\overline{\forall}$ – отрицание квантора всеобщности
(соответствует слову "некоторый")
$\exists$ – квантор существования
(соответствует словам "существует", "найдется", "имеется")
$\overline{\exists}$ – отрицание квантора существования
(соответствует словам "нет", "не существует")
$\exists!$ – соответствует словам "существует и единственно"
$\sum$ – знак суммы
$\mathbf{lim}$ – знак предела
$]$ – знак, соответствующий словам "пусть", "дано"
Δ – символ приращения
$\dfrac{dy}{dx}$ или $f'(x)$ – символ производной
C – символ непрерывности
C' – символ непрерывности и дифференцируемости
$\to$ – соответствует слову "стремится"
$\mapsto$ – соответствует (выбран)
$\equiv$ – символ тождественного равенства

Н. Резник, Л. Негодяева

Начальные представления о дифференциальном исчислении

МУРМАНСК
2005

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

УДК 517.518.153
ББК 22.161.1

Рецензенты

С.В. Зотиков, заведующий кафедрой МА и МПМ МГПУ, кандидат физико-математических наук, доцент.
Н.В. Иванчук, кандидат педагогических наук, учитель математики лицея №1 г. Мурманска.

Научные редакторы

Н.М. Ежова, кандидат педагогических наук, доцент кафедры общественных и естественных наук МИЭП.
И.С. Темникова, аспирант МГПУ, преподаватель кафедры общенаучных дисциплин филиала БИЭПП в г. Мурманске.

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. - СПб, ЛОИРО, 2005. - 76 с.

Визуальный конспект-практикум "Начальные представления о дифференциальном исчислении" разработан для студентов 1-го курса высших учебных заведений с целью помочь им адаптироваться к учебному процессу.

В сборнике представлены некоторые теоретические положения и их практическая реализация по разделу курса математического анализа "Производная", причем основной упор сделан на формирование техники дифференцирования.

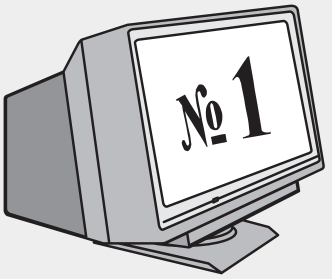
В сборнике имеется более 300 задач и упражнений различного уровня сложности. Избыточность банка задач сформирована с целью помочь обучающимся вспомнить основные положения соответствующего раздела "Алгебры и начала анализа" школьного курса математики и усвоить основные положения вузавского курса.

Конспект-практикум может оказать помощь в самостоятельных занятиях студентам дневных, вечерних и заочных отделений высших учебных заведений. Отдельные страницы и примеры пособия могут быть использованы в качестве дополнительных дидактических материалов в 10-11-х классах средних общеобразовательных школ с углубленным и расширенным изучением математики, а также в группах технических специализаций техникумов и колледжей.

Печатается в авторской редакции.

ISBN 5-88476-692-0

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.



Символ и формула производной

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

1

Символ и формула производной

СИМВОЛ ПРИРАЩЕНИЯ И ЕГО РАСШИФРОВКА

x
аргумент

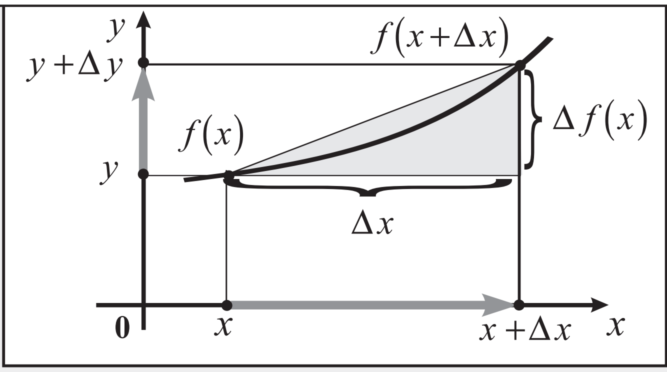
$f(x)$
функция

$\underbrace{\Delta}_{}$ *символ приращения*

$\Longrightarrow$ $\underbrace{\Delta x}_{\text{дельта } \textit{икс}} = \underbrace{(x+\Delta x) - x}_{\text{приращение } \textit{аргумента}}$

$\Longrightarrow$ $\underbrace{\Delta f(x)}_{\text{дельта } \textit{эф от икс}} = \underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{\text{приращение } \textit{функции}}$

ФОРМУЛА ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИИ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ



$$y=f(x):\ x\in D(f)$$

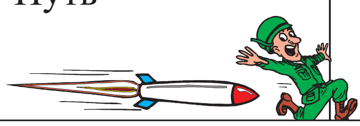
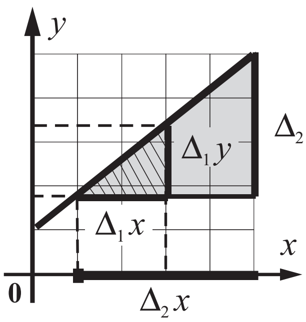
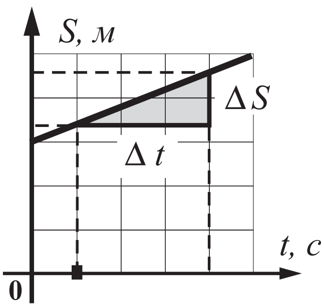
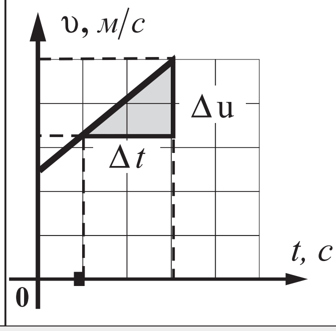
$$\Delta x:\ x+\Delta x\in D(f)$$

$$\Downarrow$$

$$\overbrace{\Delta x = (x+\Delta x) - x}^{\text{приращение аргумента } x}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)}_{\text{приращение функции } f(x)}$$

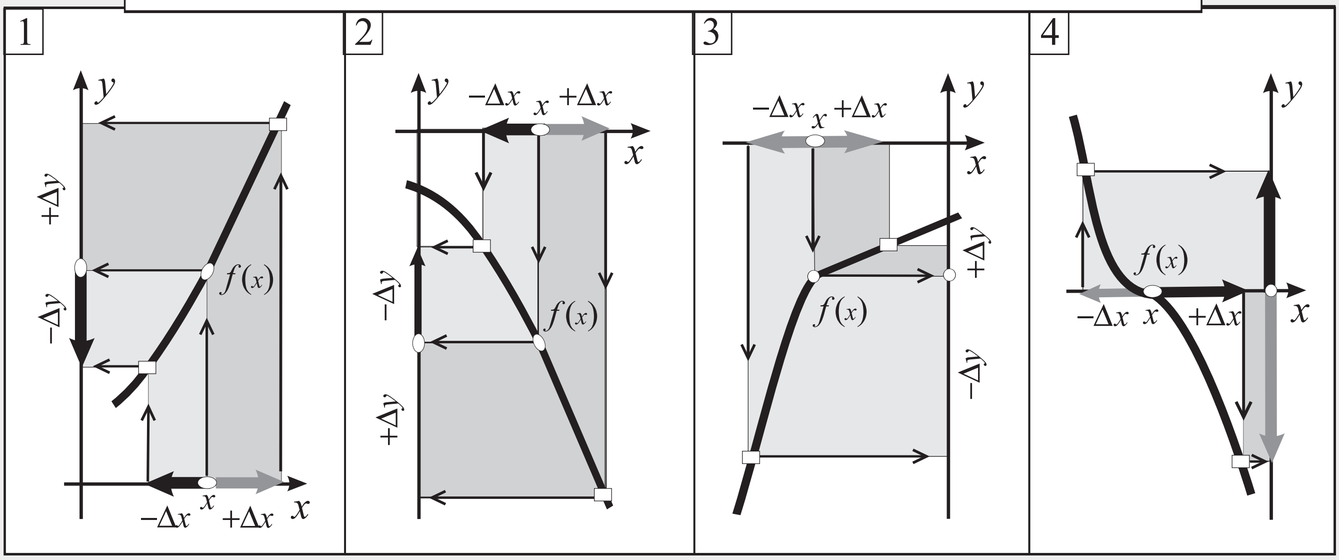
<table>
<tr><td>Математика</td><td colspan="2">Механика
(кинематика прямолинейного движения)</td></tr>
<tr><td> Линейная функция</td><td>Путь </td><td>Скорость равноускоренного движения</td></tr>
<tr><td colspan="3">Приращения функции и приращения аргумента</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

Символ и формула производной

1 Серия

Для каждого приращения аргумента $\pm\Delta x$ в точке x отметьте отсутствующие изображения или обозначения в соответствующей точке y приращения $\pm\Delta y$ функции $y = f(x)$



2 Тренажер

Для каждой заданной $y = f(x)$ составьте $f(x + \Delta x)$

1	2	3	4
$y = \cos x$	$y = 3x - 1$	$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$

3 Тренажер

По заданному приращению аргумента найдите приращение заданной функции в указанной точке

1	2	3	4
$y = x$ $x = -2$ $\Delta x = -1$	$y = x^2$ $x = -2$ $\Delta x = 2$	$y = 1/x$ $x = 2$ $\Delta x = 1$	$y = \sqrt{x}$ $x = 1$ $\Delta x = 2$

4 Докажите, что

$$\Delta\left(x^3\right) = \left(x + \Delta x\right) \cdot 3x \cdot \Delta x + \left(\Delta x\right)^3$$

5 Докажите, что

$$\Delta\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\Delta x}{x \cdot \left(x + \Delta x\right)}$$

6 Докажите, что

$$\Delta \sin x = \sin x \cdot \cos\Delta x + \cos x \cdot \sin\Delta x - \sin x$$

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

2

Символ и формула производной

Быстроту изменения положения тела в пространстве характеризует ***скорость движения***.

СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ

Формула $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ задает среднюю скорость (*быстроту изменения*) функции $f(x)$ на отрезке Δx

Читается:

отношение *приращения функции к приращению аргумента*

1 Докажите, что

$$\frac{\Delta\left(x^2\right)}{\Delta x} = \mathbf{2}x + \Delta x$$

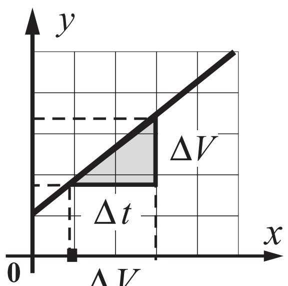
2 Докажите, что

$$\frac{\Delta\left(x^3\right)}{\Delta x} = x^2 + (x+\Delta x)\cdot(\mathbf{2}x+\Delta x)$$

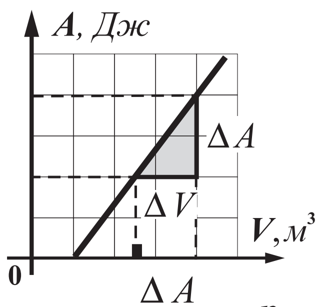
СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ (БЫСТРОТА ИЗМЕНЕНИЯ) ПАРАМЕТРА ФИЗИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Математика	Термодинамика	
Линейная функция	Работа газа	Количество теплоты

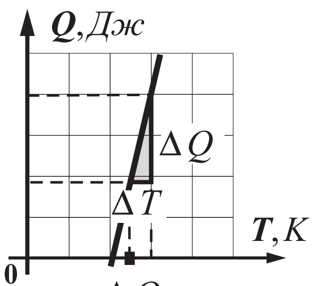
Отношение приращения функции к приращению аргумента



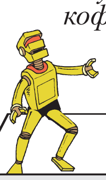
$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \underbrace{k}_{\text{угловой коффициент}}$$

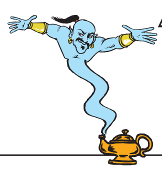


$$\frac{\Delta A}{\Delta V} = \underbrace{p}_{\text{давление газа}}$$



$$\frac{\Delta Q}{\Delta T} = \underbrace{C}_{\text{теплоемкость}}$$





Средняя скорость изменения

функции V	работы газа A	количества теплоты Q
Постоянная $k = const$	Постоянная $p = const$	Постоянная $C = const$

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

Символ и формула производной

3 Тест. Определите запись отношения	$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x}$	$\frac{\Delta \sin x}{x}$	$\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$	$\frac{\sin x}{\Delta x}$	$\frac{\sin \Delta x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$
синуса от x к аргументу x						
приращения синуса от x к аргументу x						
приращения синуса от x к приращению аргумента x						
синуса от приращения x к аргументу x						
синуса от x к приращению аргумента x						

4 Докажите, что

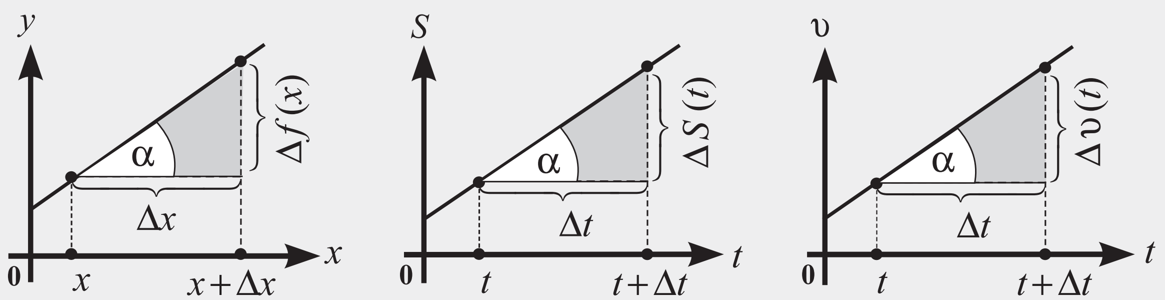
$$\frac{\Delta \cos x}{\Delta x} = \cos x \cdot \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \sin x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$

5 Докажите, что

$$\frac{\Delta \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

6 **ПОСМОТРИТЕ И** ***определите*** для заданного отношения соответствующий математический или физический термин

1	2	3
$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = k$	$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \upsilon$	$\frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = a$



1	2	3
$k = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$	$\upsilon = \frac{\Delta S(t)}{\Delta t}$	$a = \frac{\Delta \upsilon(t)}{\Delta t}$

7 **ПОСМОТРИТЕ И** ***составьте*** полную словесную интерпретацию (математическую или физическую) заданного соотношения

3

Символ и формула производной

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ

приращение аргумента

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$$

приращение функции

Если

$$\text{из } \Delta x \to \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \to \underbrace{f'(x)}_{\substack{\text{производная}\\ \text{функции } f(x)\\ \text{в } (\cdot)\, x}}$$

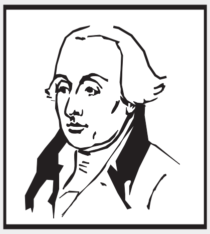
то пишут: $$\lim_{\Delta x \to \mathbf{0}} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

и говорят:

$$\overbrace{f'(x)}^{\substack{\text{Производной}\\ \text{функции } f\\ \text{в } (\cdot)\, x}} \overset{\textbf{называется}}{=} \overbrace{\lim_{\underbrace{\Delta x \to \mathbf{0}}_{\substack{\text{когда}\\ \Delta x \text{ стремится к } \mathbf{0}}}}}^{\text{предел}} \overbrace{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}}^{\substack{\text{отношения}\\ \text{приращения}\\ \text{функции } f \text{ в } (\cdot)\, x\\ \text{к приращению}\\ \text{аргумента } \Delta x}}$$

Физики трактуют понятие производной как мгновенную скорость тела, характеризующую быстроту его движения в заданной точке в данный момент времени.

ОБОЗНАЧЕНИЕ И ЧТЕНИЕ СИМВОЛА ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ

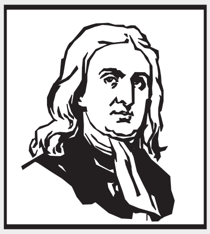


Лагранж

$$\underbrace{y'}_{y\ \text{штрих}} = \underbrace{f'(x)}_{f\ \text{штрих от}\ x}$$

Лейбниц

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\substack{\text{дэ } y\\ \text{по дэ } x}} = \underbrace{\frac{d}{dx} f(x)}_{\substack{\text{дэ } f(x)\\ \text{по дэ } x}}$$



Ньютон

$$\dot{y} = \dot{f}(x)$$

используется в механике

употребляются повсеместно

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

Символ и формула производной

1 ПОСМОТРИТЕ И ***определите*** от чего зависит		
1 скорость изменения функции $y(t)$	2 сила $F(x)$	3 мощность $N(t)$

Математика	Механика
Нелинейная функция	Механическая работа

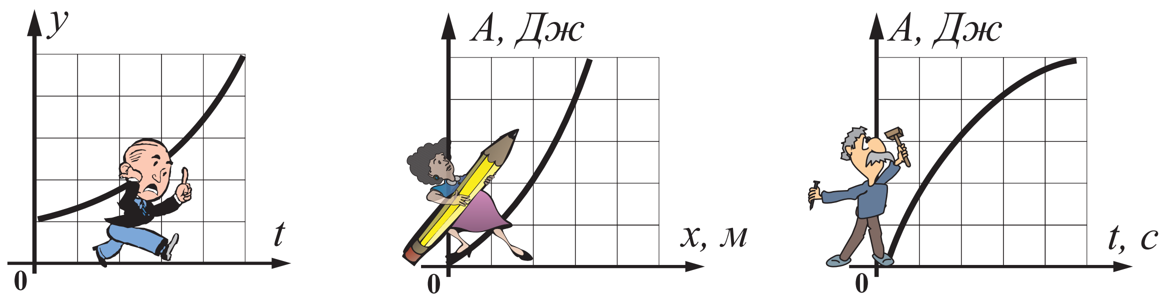


График нелинейного физического процесса

2 Тренажер Вставьте пропущенные слова для завершения определения		
1 *Производная функции y по аргументу t –* это быстрота изменения ______ с изменением аргумента	2 *Сила – это производная работы по координате* (быстрота изменения ______ с изменением координаты)	3 *Мощность – это производная работы* ______ (быстрота изменения совершенной работы с изменением времени)

3 Тренажер Запишите в обозначениях Лагранжа и Лейбница формулу мгновенной скорости изменения в заданной точке		
1 функции $y(x)$	2 силы $F(t)$	3 мощности $N(t)$

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

4

Символ и формула производной

ОПЕРАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

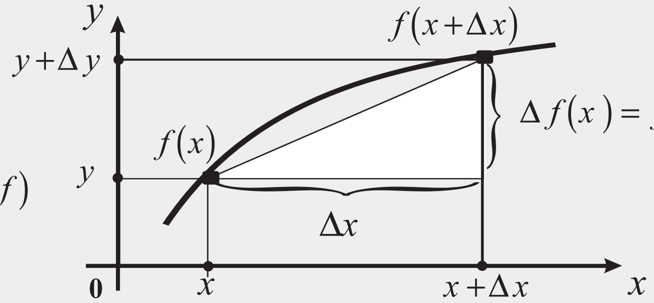
Операция нахождения производной называется дифференцированием

$$\underbrace{\left[f(x)\right]'}_{\text{дифференцирование}} = \underbrace{f'(x)}_{\text{нахождение производной}}$$

ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ, УДОБНАЯ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

$f(x):\ x \in D(f)$

$\Delta x:\ x + \Delta x \in D(f)$



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ПОСТОЯННОЙ

$$\left]\ f(x) = \underbrace{\mathbf{c}}_{const}\ \forall x \in \langle a; b\rangle \Rightarrow f'(x) = \mathbf{c}' = \mathbf{0}\ \forall x \in \langle a; b\rangle\right.$$

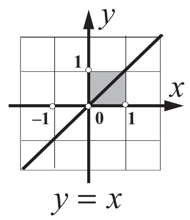
Производная числа равна нулю

Д о к а з а т е л ь с т в о

$$\left]\ f(x) = \mathbf{c}\ \forall x \in \langle a; b\rangle \Rightarrow \boxed{\mathbf{c}'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{\Delta \mathbf{c}}^{\Delta f(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{\mathbf{c}}^{f(x+\Delta x)} - \overbrace{\mathbf{c}}^{f(x)}}{\Delta x} =\right.$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{0} = \boxed{\mathbf{0}}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x) = x$

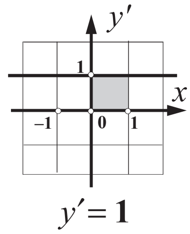


$y = x$

$$\boxed{(x)'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} =$$

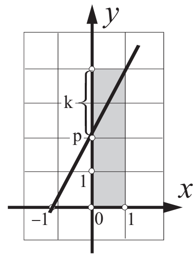
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = \boxed{1}$$



$y' = \mathbf{1}$

Символ и формула производной

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x) = \mathbf{k}x + \mathbf{p}$



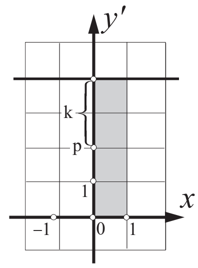
$y = \mathbf{k}x + \mathbf{p}$

$$\boxed{(\mathbf{k}x+\mathbf{p})'} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(\mathbf{k}x+\mathbf{p})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[\mathbf{k}(x+\Delta x)+\mathbf{p}]-[\boxed{}]}{\Delta x} =$$

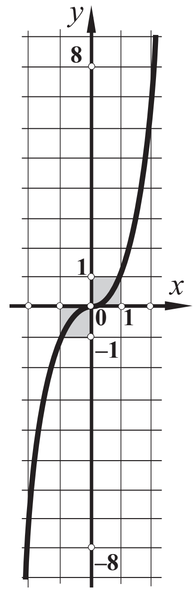
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{}+\mathbf{p}-\boxed{}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{k}\cdot\Delta x}{\Delta x} = \boxed{\mathbf{k}}$$



$y' = \mathbf{k}$

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x) = x^3$



$y = x^3$

$$\boxed{(x^3)'} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\boxed{})^3 - x^3}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \textit{необходимы преобразования}$$

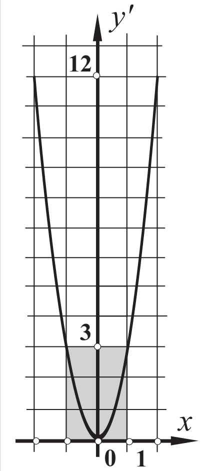
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{} - x^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\boxed{}}{\Delta x}+\frac{\boxed{}}{\Delta x}+\frac{\boxed{}}{\Delta x}\right] = \boxed{}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} 3x^2 + \lim_{\Delta x\to 0}(3x\cdot\Delta x) + \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2 =$$

$$= 3\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} x^2}_{\substack{x^2=const\\ (\cdot)\,x}} + 3\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} x}_{\substack{x=const\\ (\cdot)\,x}}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x}_{\boxed{}} + (\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x}_{\boxed{}})^2 =$$

$$= \boxed{3\cdot x^2}$$

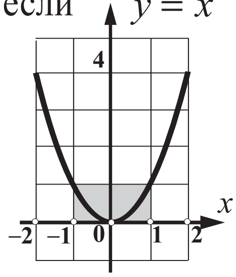


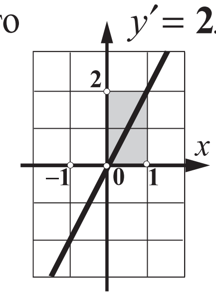
$y' = 3x^2$

1 Тренажер		
Найдите производную	1	$(1)'$
	2	$(2x)'$
	3	$(x-3)'$
	4	$(4x-5)'$

2 Докажите, что

если $y = x^2$, то $y' = 2x$

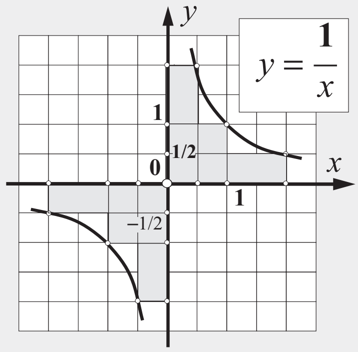




5

Символ и формула производной

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x)=\frac{1}{x}$

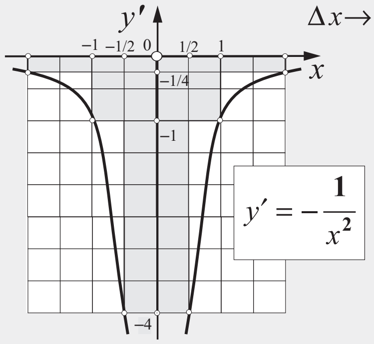


$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\text{необходимы преобразования}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\boxed{\quad}}{x\cdot(x+\Delta x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\quad}}{\Delta x\cdot x\cdot(x+\Delta x)}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\quad}}{x\cdot(x+\Delta x)}=$$

$$=-\frac{1}{\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}x}_{x}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}(x+\Delta x)}_{\boxed{\quad}}}=\boxed{-\frac{1}{x^2}}$$



ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x)=\frac{1}{x^2}$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2}-\frac{1}{x^2}}{\Delta x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\text{необходимы преобразования}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{x^2-\left[\boxed{\quad}\right]}{(x+\Delta x)^2\cdot x^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\quad}}{\Delta x\cdot(x+\Delta x)^2\cdot x^2}=$$

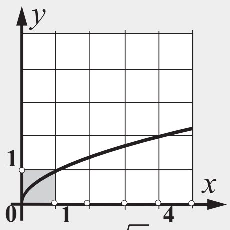
$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\left(\boxed{\quad}\right)}{\Delta x\cdot(x+\Delta x)^2\cdot x^2}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\quad}}{(x+\Delta x)^2\cdot x^2}=$$

$$=-\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(x+\Delta x)^2\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}x^2}=$$

$$=-\frac{\boxed{\quad}}{x^2\cdot x^2}=\boxed{-\frac{2}{x^3}}$$

Символ и формула производной

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x)=\sqrt{x}$



$y=\sqrt{x}$

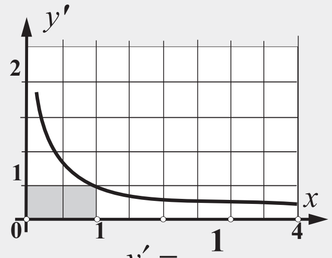
$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)'}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\text{\textit{необходимы преобразования}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\quad\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{}}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\underbrace{\frac{\boxed{}}{\Delta x}}_{\boxed{}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$



$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\Delta x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\text{\textit{необходимы преобразования}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\boxed{}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\Delta x}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{}}{\Delta x\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\Delta x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\text{\textit{необходимы преобразования}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\boxed{}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}\right)}{\Delta x\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{}}{\Delta x\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}\right)}=$$

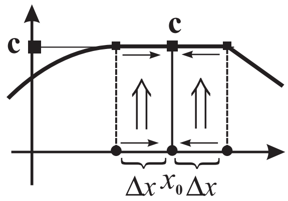
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}\right)}=$$

$$=\frac{\boxed{}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)}=\boxed{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}}$$

6

Символ и формула производной

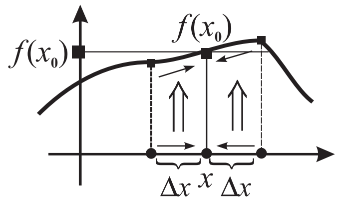
ПОЛЕЗНЫЕ ПРЕДЕЛЫ



$$\lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{c} = \underbrace{\mathbf{c}}_{\text{число}}$$

Предел числа
равен
числу

*если
существует
предел!*



$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{число}}$$

Значение функции
в заданной точке
есть число

ПРОИЗВОДНАЯ СИНУСА

$$\rceil\, f(x) = \sin x \ \forall\ x \in R$$

$$\boxed{(\sin x)'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \text{необходимы преобразования}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos \Delta x + \cos x \cdot \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin x \cdot \boxed{}}{\Delta x} + \cos x \cdot \frac{\boxed{}}{\Delta x} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\sin x \cdot \frac{2\sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} + \cos x \cdot \frac{\boxed{}}{\Delta x} \right] =$$

$$= -\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \sin x}_{\sin x} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}_{\boxed{}} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \boxed{}}_{0} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \cos x}_{\cos x} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boxed{}}{\Delta x}}_{\boxed{}} =$$

$$= \boxed{\cos x}$$

Символ и формула производной

1 Докажите, что

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

2 Докажите, что

$$2 \cdot \frac{d(\sin x)}{dx} \cdot \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin 2x$$

Вместо слов
«значение производной функции $f(x)$ в заданной точке $x = a$»
можно писать

$$[f(x)]'_{|x=\mathbf{a}} = f'(\mathbf{a})$$

Пример

Найдем значение производной функции $2\sqrt{3}(\sin x)'$ в $(\cdot)$ $x = \frac{\pi}{3}$

Р е ш е н и е

$$2\sqrt{3}(\sin x)'_{|x=\pi/3} = \underbrace{2\sqrt{3}(\sin x)'_{|x=\pi/3}}_{\text{мысленно}} = 2\sqrt{3}\left(\cos x_{|x=\pi/3}\right) =$$

$$= \underbrace{2\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}}_{\text{мысленно}} = 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

3 Тест. Вычислите значение производной функции

в заданной точке	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	2
$2\cdot(\sin x)'_{\lvert x=\pi/4}$										
$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x)'_{\lvert x=3\pi/4}$										
$-\frac{(\cos x)'_{\lvert x=5\pi/4}}{2\sqrt{2}}$										
$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x)'_{\lvert x=-\pi/4}$										

4 Докажите, что

$$\left[(\sin x)'\right]' = -\sin x$$

5 Докажите, что

$$\left[(\cos x)'\right]' = -\cos x$$

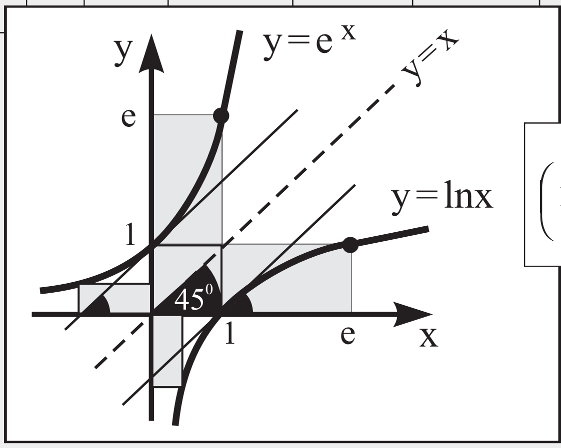
7

Символ и формула производной

НАТУРАЛЬНЫЕ ЭКСПОНЕНТА И ЛОГАРИФМ

Число	x	1	2	10	100	1000	10000	100000	…
Вычисления с помощью калькулятора	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2	2,25	2,5937	2,7048	2,7169	2,7181	2,71825	…

⇓ Число e



$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \underset{x\to\infty}{\to} \mathbf{e}: \ 2<\mathbf{e}<3$$

ПРОИЗВОДНАЯ ЭКСПОНЕНТЫ

С НАТУРАЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ		С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ
$\Delta\left(\mathbf{e}^x\right)=\mathbf{e}^{x+\Delta x}-\mathbf{e}^x=$ $=\mathbf{e}^x\cdot\mathbf{e}^{\Delta x}-\boxed{}=$ $=\mathbf{e}^x\cdot\left(\mathbf{e}^{\Delta x}-1\right)$	1	$\Delta\left(\mathbf{a}^x\right)=\mathbf{a}^{x+\Delta x}-\mathbf{a}^x=$ $=\boxed{}-\mathbf{a}^x=$ $=\mathbf{a}^x\cdot\left(\mathbf{a}^{\Delta x}-1\right)$
$\frac{\Delta\left(\mathbf{e}^x\right)}{\Delta x}=\frac{\mathbf{e}^x\cdot\left(\mathbf{e}^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=$ $=\boxed{}\cdot\frac{\left(\mathbf{e}^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}$	2	$\frac{\Delta\left(\mathbf{a}^x\right)}{\Delta x}=\frac{\mathbf{a}^x\cdot\left(\mathbf{a}^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=$ $=\boxed{}\cdot\frac{\left(\mathbf{a}^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}$
$\boxed{\left(\mathbf{e}^x\right)'}=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\mathbf{e}^x}_{\mathbf{e}^x}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{\ln\mathbf{e}=1}=$ $=\boxed{\mathbf{e}^x}$	3	$\boxed{\left(\mathbf{a}^x\right)'}=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\mathbf{a}^x}_{\mathbf{a}^x}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{a}^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{\ln\mathbf{a}}=$ $=\boxed{\mathbf{a}^x\cdot\ln\mathbf{a}}$

Символ и формула производной

1 Тренажер — Найдите производную

1	2	3	4
$\dfrac{d\left(\mathbf{2}^x\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\mathbf{4}^x\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\mathbf{27}^x\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\mathbf{625}^x\right)}{dx}$

2 Серия — Упростите выражение

1	2	3	4
$\left(\mathbf{e}^x\right)'+\left(\mathbf{e}\right)'$	$\left(\mathbf{2}^x\right)'\cdot\left(x^2\right)'$	$\dfrac{\left(\mathbf{e}^4\right)'}{\left(\mathbf{4}^x\right)'}$	$\left(\sqrt{\mathbf{2}}^x\right)'-\left(\sqrt{x}\right)'$

3 Докажите, что

$$\frac{\mathbf{e}^x}{\left(\mathbf{e}^x\right)'}=\frac{\left(\mathbf{e}^x\right)'}{\mathbf{e}^x}$$

4 Докажите, что

$$\frac{\left(\mathbf{a}^x\right)'}{\mathbf{a}^x}\neq\frac{\mathbf{a}^x}{\left(\mathbf{a}^x\right)'}$$

5 Тест — Определите значение

выражения	0	1	$\mathbf{a}$	$\dfrac{1}{\mathbf{a}}$	$\mathbf{a}^x$	$\dfrac{1}{\mathbf{a}^x}$	$\ln\mathbf{a}$	$\dfrac{1}{\ln\mathbf{a}}$	$\dfrac{\mathbf{a}^x}{\ln\mathbf{a}}$	$\dfrac{\ln\mathbf{a}}{\mathbf{a}^x}$
$\dfrac{\left(\mathbf{a}^x\right)'}{\ln\mathbf{a}}$										
$\dfrac{\mathbf{a}^x\ln\mathbf{a}}{\left(\mathbf{a}^x\right)'}$										
$\dfrac{\ln\mathbf{a}}{\left(\mathbf{a}^x\right)'}$										
$\dfrac{\left(\mathbf{a}^x\right)'}{\mathbf{a}^x}$										
$\dfrac{\left(\mathbf{a}\right)'}{\left(\mathbf{a}^x\right)'}$										

8

Символ и формула производной

СПИСОК ПРОСТЕЙШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

$$(\mathbf{c})' = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{k}x + \mathbf{p})' = \mathbf{k}$$

$$(x)' = \mathbf{1}$$
$$(x^2)' = \mathbf{2}x$$
$$(x^3)' = \mathbf{3}x^2$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$
$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$(\mathbf{e}^x)' = \mathbf{e}^x$$
$$(\mathbf{a}^x)' = \mathbf{a}^x \cdot \mathbf{lna}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

Пример Найдем действительные решения уравнения

$$(x^3)' - (x^2)' + (5x)' = \frac{2}{3}(x^3)' + \frac{3}{2}(x^2)' - (5x+1)'$$

Р е ш е н и е

$$\frac{1}{3}(x^3)' - \frac{5}{2}(x^2)' + (5x)' + (5x+1)' = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{3}\cdot 3x^2 - \frac{5}{2}\cdot 2x + 5 + 5}_{\text{мысленно}} = 0$$

$$x^2 - 5x + 10 = 0$$

Так как $D = 25 - 40 < 0$, то действительных решений нет

1 Тест Решите уравнение

	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$2\cdot(x^2)' - (x)' = (1)'$							
$(x^2)' = (2x-1)'$							
$2\cdot(x^2)' = (x+1)'$							
$(2x+2)' = -2\cdot(x^2)'$							
$(-x^2)' = (2-x)'$							

2 Докажите, что

$$x\cdot\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

3 Докажите, что

$$x\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Символ и формула производной

4 Тренажер **5**

Составьте таблицу, позволяющую

по заданной функции найти ее производную	по предложенной производной восстановить исходную функцию

$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbf{c}$	$\mathbf{0}$
x	
x^3	
$\mathbf{a}^x$	
$\sqrt{x}$	
$\dfrac{1}{x}$	
$\cos x$	

$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbf{k}x+\mathbf{p}$	$\mathbf{k}$
	$2x$
	$\mathbf{e}^x$
	$-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
	$-\dfrac{2}{x^3}$
	$-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$
	$\cos x$

6 Докажите, что

$$\frac{(3^x)'}{(e^x)'}=\left(\frac{3}{e}\right)^x\cdot\ln 3$$

7 Докажите, что

$$\left\langle\left\{\left[\left(x^3\right)'\right]'\right\}'\right\rangle'=0$$

9 Докажите, что

$$4x\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'}{\sqrt{x}}$$

10 Докажите, что

$$\frac{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)'-\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'}=2x$$

8 Докажите, что

если $f(x)=\dfrac{1}{x}$, то $f'(-2)=f'(2)$

9

Символ и формула производной

ВЫНЕСЕНИЕ ЧИСЛА ЗА ЗНАК ПРОИЗВОДНОЙ

$$\left] \begin{array}{c} \exists f'(x)\ \forall x \in \langle a;b\rangle \\ \mathbf{c} - \forall\, const \end{array} \right. \Rightarrow \left[c\cdot f(x)\right]' = c\cdot f'(x)\ \forall x\in\langle a;b\rangle$$

Число выносится за знак производной

Доказательство

$$\left] \begin{array}{c} \exists f'(x)\ \forall x \in \langle a;b\rangle \\ \mathbf{c} - \forall\, const \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\left[\mathbf{c}\cdot f(x)\right]'} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left[\mathbf{c}\cdot f(x)\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{c}\cdot f(x+\Delta x) - \mathbf{c}\cdot f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\mathbf{c}\cdot\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\mathbf{c}}_{\mathbf{c}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \mathbf{c}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \boxed{\mathbf{c}\cdot f'(x)}$$

Пример

$$\left[\mathbf{1}\right]' + \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right]' + \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right]' + \left[x\right]' + \left[\frac{x^2}{\mathbf{2}}\right]' + \left[\frac{x^3}{\mathbf{3}}\right]' =$$

$$= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \underbrace{(x)' + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(x^2\right)' + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\left(x^3\right)'}_{\text{мысленно}} =$$

$$= \mathbf{1} + x + x^{\mathbf{2}}$$

1 Докажите, что

если

$$\left. \begin{array}{c} \exists f'(x)\ \forall x \in \langle a;b\rangle \\ \mathbf{c} - \forall\, const \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{c}\cdot f'(x) = \left[\mathbf{c}\cdot f(x)\right]'\ \forall x\in\langle a;b\rangle$$

Число можно вносить под знак производной

Символ и формула производной

2 Тест

Найдите производную	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{\sqrt{x}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x\sqrt{x}}$	$-\frac{\sqrt{x}}{x}$	$-\frac{1}{x^3}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\left(-\frac{1}{x}\right)'$								
$\left(\frac{1}{2x^2}\right)'$								
$\left(2\sqrt{x}\right)'$								
$\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)'$								

3 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$(50\cos x)'$	$\left(\frac{x^3}{3}\right)'$	$\left(\frac{3^x}{\ln 3}\right)'$	$\left(\frac{\sin x}{4\sqrt{3}}\right)'$

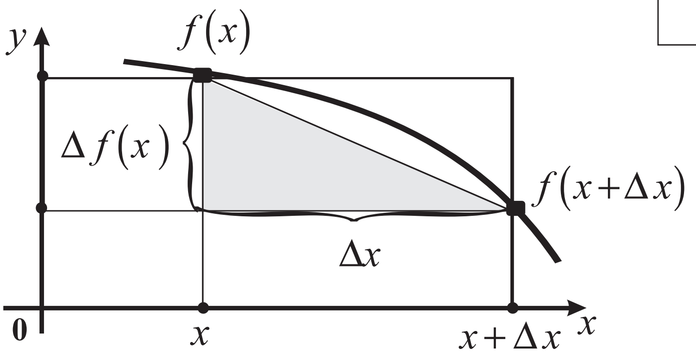
4 Тест Определите, при каких значениях x

производная функции $f(x)=\frac{x^3}{3}$ равна	*нет решения*	-4	-2	$-\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4
$f'(x)=-1$												
$f'(x)=0$												
$f'(x)=2$												
$f'(x)=\frac{1}{4}$												
$f'(x)=16$												

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

Информационная схема
«СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ»

$$\overbrace{\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)}^{\text{приращение функции } f(x)}$$



$$\underbrace{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}}_{\substack{\text{средняя скорость} \\ \text{изменения} \\ \text{функции } f(x) \\ \text{на промежутке } \Delta x}}$$

$$\underbrace{\Delta x = (x+\Delta x) - x}_{\text{приращение аргумента } x}$$

$$f'(x) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{\substack{\text{производная функции } f(x) \\ \text{в точке } x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$\underbrace{\left[f(x)\right]'_{|x=\mathbf{a}} = f'(\mathbf{a})}_{\substack{\text{значение производной } f(x) \\ \text{в точке } \mathbf{a}}}$$

$$(\mathbf{k})' = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{k}x)' = \mathbf{k}$$
$$(\mathbf{k}x + \mathbf{p})' = \mathbf{k}$$

$$\left(\mathbf{e}^x\right)' = \mathbf{e}^x$$
$$\left(\mathbf{a}^x\right)' = \mathbf{a}^x \cdot \ln \mathbf{a}$$

$$(x)' = x$$
$$\left(x^2\right)' = \mathbf{2}x$$
$$\left(x^3\right)' = \mathbf{3}x^2$$

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{x}\right)' = -\frac{\mathbf{1}}{x^2}$$
$$\left(\frac{\mathbf{1}}{x^2}\right)' = -\frac{\mathbf{2}}{x^3}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{x}}$$
$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}x\sqrt{x}}$$

$$\left[\mathbf{c} \cdot f(x)\right]' = \mathbf{c} \cdot f'(x)$$

Символ и формула производной

Разные задачи

1 Тренажер. Составьте для заданной функции формулу $f(x+\Delta x)-f(x)$

1	2	3	4
$y=\frac{x}{2}$	$y=\sqrt{2}\cos x$	$y=\frac{e}{x}$	$y=\frac{2^x}{\ln 2}$

2 Тест. Вычислите приращение функции в точке $x=2$, соответствующее приращению аргумента

$\Delta x=-\frac{1}{2}$, если	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{7}{36}$	$-\frac{7}{36}$	$\frac{37}{8}$	$-\frac{37}{8}$	$\frac{32}{9}$	$-\frac{32}{9}$
$f(x)=x$												
$f(x)=x^2$												
$f(x)=x^3$												
$f(x)=\frac{1}{x}$												
$f(x)=\frac{1}{x^2}$												

3 Тренажер. Упростите задание функции и составьте формулу $f(x+\Delta x)-f(x)$

1	2	3	4
$y=\frac{x}{\sqrt{x^3}}$	$y=\frac{\sin x}{\cos 2\pi}$	$y=\frac{e^x\log_2 4}{2}$	$y=\frac{2^x\log_2 8}{2}$

4 Тренажер. Упростите и найдите сумму производных

1	2	3	4
$(e^x)'+(2^e)'$	$(e^3)'+(3^x)'$	$\left(\frac{4^{-1}}{4^{-x-1}}\right)'-\left(\frac{e^{x+1}}{e}\right)'$	$\left(\frac{5^x}{\ln 5}\right)'-\left(\frac{e^x}{5}\right)'$

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

Символ и формула производной

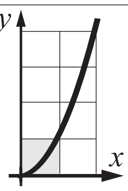
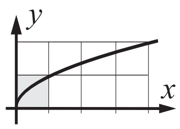
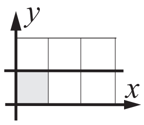
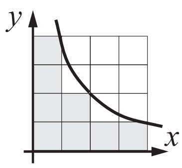
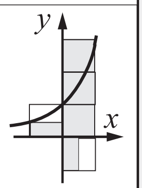
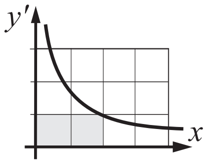
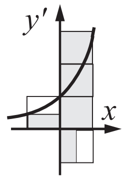
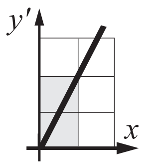
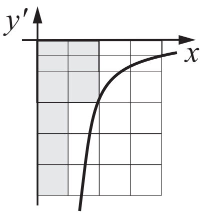
5 Докажите, что

$$\left[(\sin x)'\right]^2+\left[(\cos x)'\right]^2=1$$

6 Докажите, что

$$1-\cos 2x=2\cdot\left[(\cos x)'\right]^2$$

7 Тест. Определите эскиз графика функции

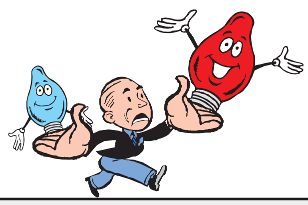
по эскизу графика ее производной					
					
					
					
					

8 Решите задачу

9 Решите задачу

Допустим, что величина заряда I, протекающего через сечение проводника, меняется со временем по закону $q=3t^2$.

Найдите $I(t)$.



Определите, моменты времени в которых $I(t)=0$.