Н.А. РЕЗНИК

Начальные представления о технике дифференцирования

Визуальный конспект-практикум

ИНСТИТУТ ПРОДУКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ
ЦПО «ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

Н.А. РЕЗНИК

Начальные представления о технике дифференцирования

Визуальный конспект-практикум

**Санкт-Петербург
2002**

УДК 512.83(07)
ББК 22.143. я7

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

Визуальный конспект-практикум ориентирован на формирование начальных представлений по разделу "Производная" курса высшей математики. Конспект разработан для студентов 1-го курса Мурманского государственного технического университета и Мурманского государственного педагогического института. В сборнике имеется более 300 задач и упражнений различного уровня сложности. Избыточность банка задач сформирована с целью помочь обучающимся вспомнить основные положения соответствующей темы "Алгебра и начала анализа", а также восстановить утраченные знания и навыки по другим разделам школьного курса математики. Большинство примеров пособия могут быть использованы в качестве дидактических материалов в 11-х классах с углубленным изучением математики.

Составление самостоятельных работ и зачета, а также ответов ко всем задачам практикума осуществлено Плотниковой С.В.

Наталия Александровна Резник,
Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум.

© Компьютерный набор, верстка и графика Н.А. Резник
Редакторы Энтина С.Б., Плотникова С.В., Неделько Н.С.

ISBN

Утверждено к печати Редакционно-издательским Советом
ЦПО "Информатизация образования" Института продуктивного обучения Российской академии образования
ЛР № 071477 от 25.07.97
Подписано к печати с оригинал-макета 1.03.02.
Тираж 200 экз.

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

1. Символ приращения и его расшифровка 4
Формула приращения функции в заданной точке 4
Формула приращения операции над функциями 4
2. Символ производной функции в заданной точке 6
Чтение формулы производной функции в заданной точке 6
Формула производной, удобная для доказательства теорем 6
Операция дифференцирования 7
Производная функции $f(x) = x$ 7
Производная функции $f(x) = \mathbf{k}\,x + \mathbf{p}$ 7
3. Полезные пределы 8
Теоремы о пределах 8
Производная функции $f(x) = x^{\mathbf{3}}$ 9
4. Производная функции $f(x) = \sqrt{x}$ 10
5. Общая формула производных степеней и радикалов 12
6. Независимая переменная и аргумент функции 14
Специальные формы записи производной 14
Информационная схема «Символ и формула производной» 16
Самостоятельная работа 1. 17
Ответы 18
Подсказки к задачам на доказательство 19

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

1

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

СИМВОЛ ПРИРАЩЕНИЯ И ЕГО РАСШИФРОВКА

x
аргумент

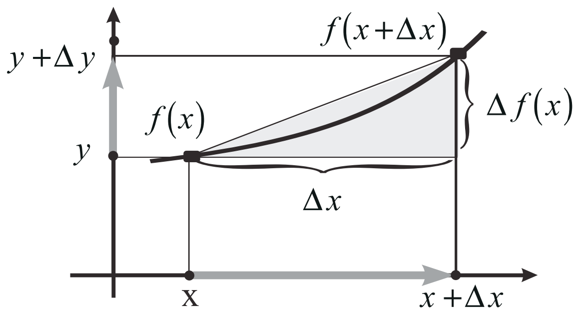
$f(x)$
функция

$\underbrace{\Delta}$
символ приращения

$$\underbrace{\Delta x}_{\text{дельта икс}} = \underbrace{(x+\Delta x) - x}_{\text{приращение аргумента}}$$

$$\underbrace{\Delta f(x)}_{\text{дельта эф от икс}} = \underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{\text{приращение функции}}$$

ФОРМУЛА ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИИ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ



$$y=f(x):\ x\in D(f)$$
$$\Delta x:\ x+\Delta x\in D(f)$$
$$\Downarrow$$
$$\overbrace{\Delta x = (x+\Delta x) - x}^{\textit{приращение аргумента } x}$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)}_{\textit{приращение функции } f(x)}$$

ФОРМУЛА ПРИРАЩЕНИЯ ОПЕРАЦИИ НАД ФУНКЦИЯМИ

Пусть $\boxed{\circ}$ → $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\cdot}$, $\boxed{:}$

$$\Delta\left[f(x)\circ g(x)\right]=\left[f(x+\Delta x)\circ g(x+\Delta x)\right]-\left[f(x)\circ g(x)\right]$$

Пример

$$\Delta\left[\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right]=\left[\frac{\sqrt{x+\Delta x}}{(x+\Delta x)^2}\right]-\left[\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right]$$

$$\Delta\left[\sin x\cdot\frac{1}{x}\right]=\left[\sin(x+\Delta x)\cdot\frac{1}{x+\Delta x}\right]-\left[\sin x\cdot\frac{1}{x}\right]$$

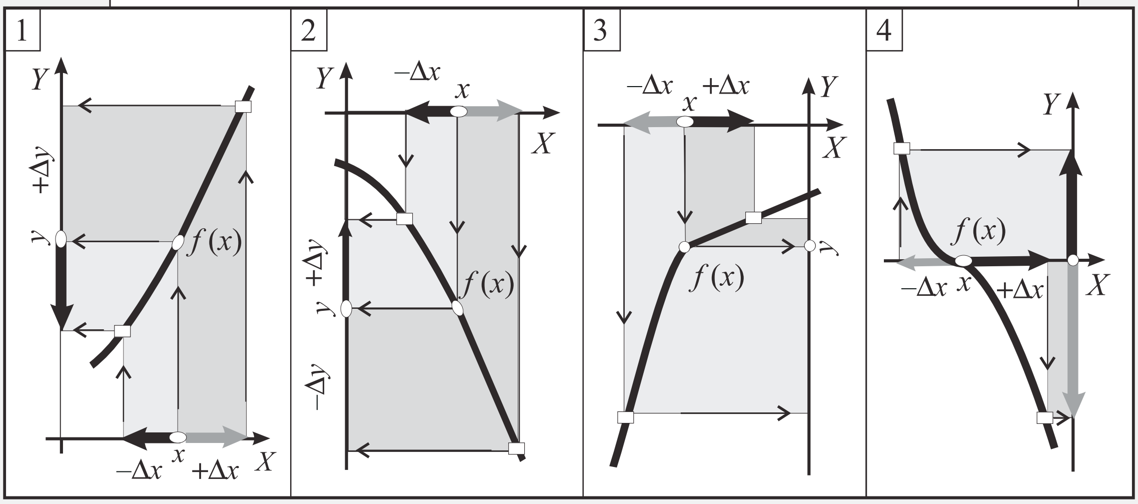
$\boxed{\circ}$ → $\boxed{:}$, $\boxed{\cdot}$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

1 Серия

Для каждого приращения аргумента $\pm\Delta x$ отметьте соответствующее приращение $\pm\Delta y$ функции $y = f(x)$



2 Докажите, что

$$\Delta\left[u(x)\cdot v(x)\right] \neq \Delta u(x)\cdot\Delta v(x) \quad \left(\begin{array}{c} \forall\ u(x),\ v(x) : x \in [a;b] \\ \Delta x : (x+\Delta x) \in [a;b] \\ \Delta u(x)\cdot\Delta v(x) \neq \mathbf{0} \end{array}\right)$$

3 Докажите, что

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \neq \Delta\frac{f(x)}{x}$$

4 Докажите, что

$$\frac{\Delta x^{\mathbf{2}}}{\Delta x} = \mathbf{2}x + \Delta x$$

5 Докажите, что

$$\frac{\Delta\sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

2

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

СИМВОЛ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ

$\Delta x = x - x_0$
приращение аргумента

$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$
приращение функции

$\underbrace{\mathbf{lim}}_{\text{символ предела}}$

Если

$$\boxed{\text{из } \Delta x \to \mathbf{0}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \to \underbrace{f'(x)}_{\text{производная функции } f(x) \text{ в } (\cdot)\, x}}$$

то пишут:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

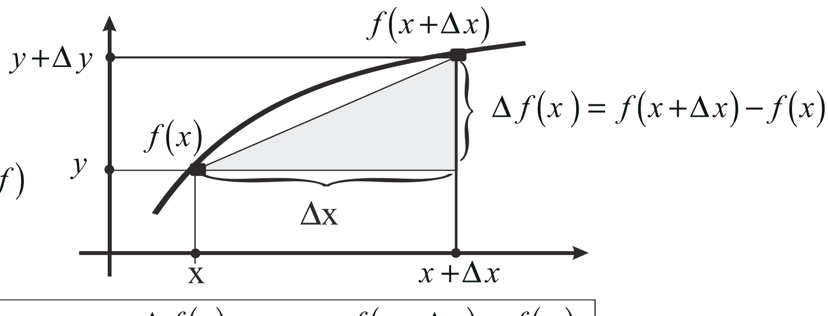
ЧТЕНИЕ ФОРМУЛЫ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ

$$\overbrace{f'(x)}^{\text{Производной функции } f \text{ в } (\cdot)\, x} \overset{\textbf{называется}}{=} \overbrace{\underset{\underbrace{\Delta x \to 0}_{\text{когда } \Delta x \text{ стремится к } \mathbf{0}}}{\mathbf{lim}}}^{\textbf{предел}} \overbrace{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}}^{\textbf{отношения} \text{ приращения функции } f \text{ в } (\cdot)\, x \text{ к приращению аргумента } \Delta x}$$

ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ, УДОБНАЯ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

$f(x):\ x \in D(f)$

$\Delta x:\ x + \Delta x \in D(f)$



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

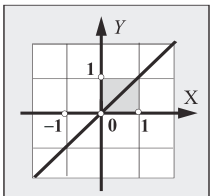
СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

ОПЕРАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Операция нахождения производной называется дифференцированием

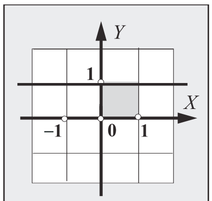
$$\underbrace{\left[f(x)\right]'}_{\textit{дифференцирование}} = \underbrace{f'(x)}_{\textit{нахождение производной}}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x) = x$



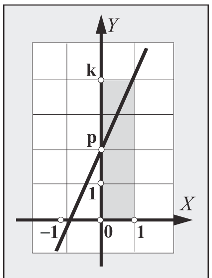
$y = x$

$$(x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 1 = 1$$



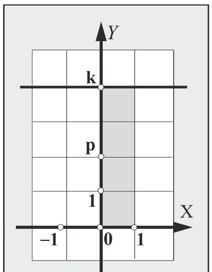
$y' = 1$

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x) = \mathbf{k}\,x + \mathbf{p}$



$y = \mathbf{k}\,x + \mathbf{p}$

$$(\mathbf{k}\,x+\mathbf{p})' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(\mathbf{k}\,x+\mathbf{p})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[\mathbf{k}(x+\Delta x)+\mathbf{p}\right]-\left[\mathbf{k}\,x+\mathbf{p}\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{k}x+\mathbf{k}\cdot\Delta x+\mathbf{p}-\mathbf{k}\,x-\mathbf{p}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{k}\cdot\Delta x}{\Delta x} = \mathbf{k}$$



$y' = \mathbf{k}$

1	Докажите, что	$(\mathbf{k})' = \mathbf{0}$

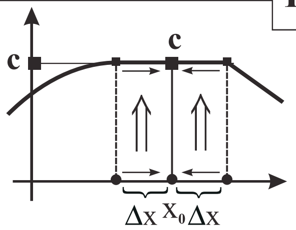
2	Докажите, что	$(\mathbf{k}\,x)' = \mathbf{k}$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

3

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

ПОЛЕЗНЫЕ ПРЕДЕЛЫ



$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0} \mathbf{c} = \underbrace{\mathbf{c}}_{\text{число}}}$$

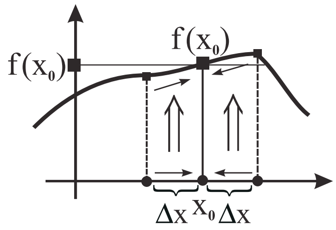
Предел числа равен числу

$$\Delta x = x - x_0 \to \mathbf{0}$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) \to f(x_0),$$

то пишут:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x) = f(x_0)$$

если существует предел!



$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0} f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{число}}}$$

Значение функции в заданной точке есть число

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Если существуют пределы, ... то существуют пределы!

$$\lim_{x\to x_0} \left[\mathbf{k} \cdot f(x)\right] = \mathbf{k} \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

число выносится за знак предела

$$\lim_{x\to x_0} \left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

предел суммы / разности равен сумме / разности пределов

$$\lim_{x\to x_0} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

предел произведения равен произведению пределов

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \qquad \boxed{\lim_{x\to x_0} g(x) \neq \mathbf{0}}$$

предел частного равен частному пределов при условии, что предел знаменателя не равен нулю

$$\lim_{x\to x_0} \left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^n$$

предел степени равен степени предела

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$$

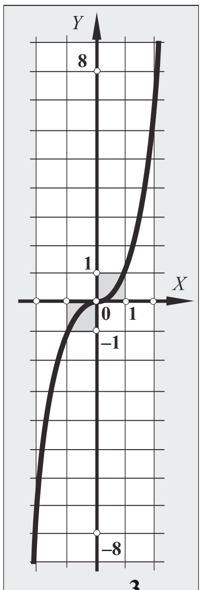
предел корня равен корню из предела

Если существуют пределы, ... то существуют пределы!

Если существуют пределы, ... то существуют пределы!

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x)=x^3$



$y=x^3$

$$\left(x^3\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=$$

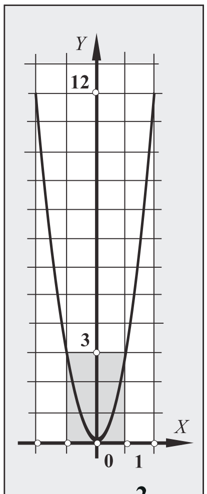
$$\boxed{=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}}_{\text{мысленное преобразование}}=}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{3x^2\cdot\Delta x}{\Delta x}+\frac{3x\cdot(\Delta x)^2}{\Delta x}+\frac{(\Delta x)^3}{\Delta x}\right]=$$

$$\boxed{=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right]}_{\text{мысленное преобразование}}=}$$

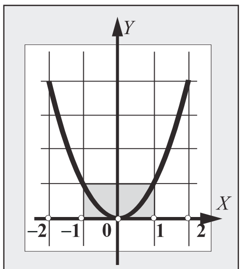
$$=\lim_{\Delta x\to 0}3x^2+\lim_{\Delta x\to 0}(3x\cdot\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2=$$

$$=3\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}x^2}_{\substack{x^2=const\\ в\,(\cdot)\,x}}+3\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}x}_{\substack{x=const\\ в\,(\cdot)\,x}}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x}_{0}+\Big(\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x}_{0}\Big)^2=3x^2$$



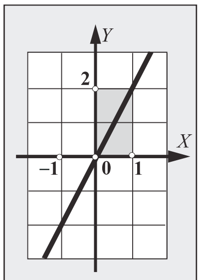
$y'=3x^2$

1 Докажите, что $\left(x^2\right)'=2x$



$y=x^2$

$$\left(x^2\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$



$y'=2x$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

4

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x)=\sqrt{x}$

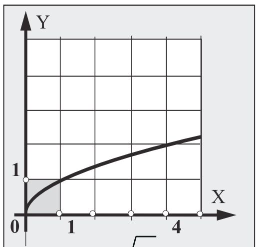
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\qquad\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} =$$

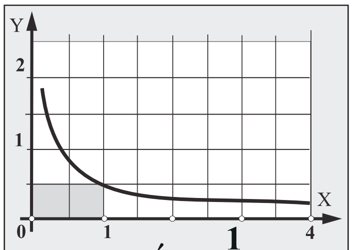
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\underbrace{\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}}_{1}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



$y=\sqrt{x}$



$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

1	Докажите, что	$\Delta\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-1}{x\cdot(x+\Delta x)}$

2	Докажите, что	$\Delta\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-2x\cdot\Delta x-(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2\cdot x^2}$

3	Докажите, что	$\Delta\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{-\Delta x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}\right)}$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

4	Докажите, что

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

5	Докажите, что

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

6	Докажите, что

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$$

5

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

ОБЩАЯ ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНЫХ СТЕПЕНЕЙ И РАДИКАЛОВ

$$(x)' = \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot x^{\mathbf{1-1}}$$

$$(x^2)' = \mathbf{2}x = \mathbf{2} \cdot x^{\mathbf{2-1}}$$

$$(x^3)' = \mathbf{3}x^2 = \mathbf{3} \cdot x^{\mathbf{3-1}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} = (-1) \cdot x^{-1-1}$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3} = (-2) \cdot x^{-2-1}$$

$$(\sqrt{x})' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1}$$

. . . .

$\Downarrow$

$$\underbrace{\text{Общая формула}}$$

$$(x^{\mathbf{n}})' = \mathbf{n} \cdot x^{\mathbf{n-1}}$$

$\Downarrow$

$$(x^{\mathbf{n}})' = \mathbf{n} \cdot x^{\mathbf{n}} \cdot \frac{1}{x}$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{(x^{\mathbf{n}})' = \mathbf{n} \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot x^{\mathbf{n}}}_{\text{формула, удобная для нахождения результата}}$$

формула, удобная для нахождения результата

1 Тренажер

Заполните пропуски в таблице производных степеней и радикалов, составленной по формуле, *удобной* для нахождения результата

	$f(x)$	$f'(x)$
	$x^{\mathbf{n}}$	$\mathbf{n} \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot x^{\mathbf{n}}$
	$\Downarrow$	$\Downarrow$
1	$\frac{1}{x^{\mathbf{n}}}$	$-\mathbf{n} \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^{\mathbf{n}}}$
2	$\sqrt[\mathbf{n}]{x}$	$\frac{1}{\mathbf{n}} \cdot \boxed{} \cdot \sqrt[\mathbf{n}]{x}$
3	$\frac{1}{\sqrt[\mathbf{n}]{x}}$	$-\frac{1}{\mathbf{n}} \cdot \boxed{} \cdot \frac{1}{\sqrt[\mathbf{n}]{x}}$
4	$\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}$	$\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}} \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}$
5	$\frac{1}{\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}$	$-\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}} \cdot \boxed{} \cdot \frac{1}{\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}$

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

Запишите результат дифференцирования по формуле, удобной для вычислений, и упростите его

2 Тренажер

1	$\left(\sqrt{x}\right)' =$
2	$\left(\sqrt[3]{x}\right)' =$
3	$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' =$
4	$\left(\sqrt[4]{x^3}\right)' =$
5	$\left(\sqrt[4]{x^5}\right)' =$

3 Тренажер

$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$	1
$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' =$	2
$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' =$	3
$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' =$	4
$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\right)' =$	5

4 Докажите, что

$$\frac{2}{3}\left(x\sqrt{x}\right)' = \sqrt{x}$$

5 Докажите, что

$$x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{x}$$

6 Докажите, что

$$\frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)' - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'} = 2x$$

7 Докажите, что

$$\frac{\frac{\left(x^2\right)'}{2} - 2\left(\sqrt{x}\right)'}{x - \frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

6

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

НЕЗАВИСИМАЯ ПЕРЕМЕННАЯ И АРГУМЕНТ ФУНКЦИИ

Договоримся отличать:

$$f(\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}}) = \underbrace{[\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}}]^{2n}}_{\text{функция от } x}$$

$$f\left(\overbrace{x^2}^{\text{аргумент}}\right) = \underbrace{[\overbrace{x^2}^{\text{аргумент}}]^{n}}_{\text{функция от } x^2}$$

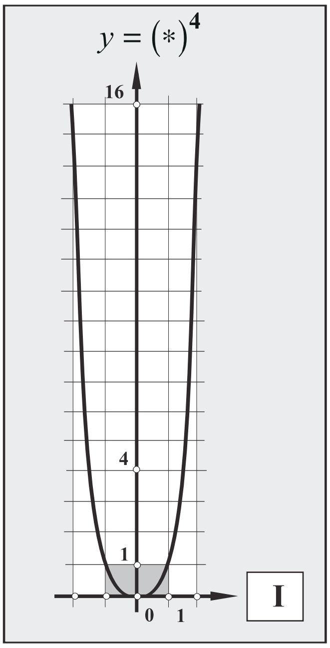
СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ ПРОИЗВОДНОЙ

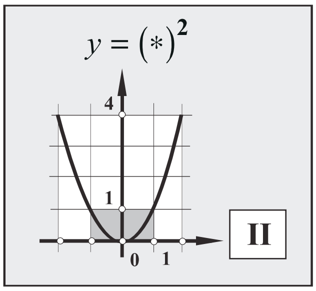
Если
дифференцирование
функции $f(x)$
ведется
по независимой переменной x,
то
вместо $[f(x)]'$ *пишут*
$f'_x(x)$ **или** $f'(x)$

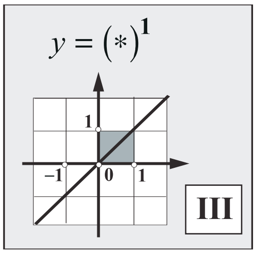
Если
дифференцирование
функции $f(*)$
ведется
по аргументу $*$,
то
вместо $[f(*)]'$ *пишут*
$f'_*(*)$ **или** $f'(*)$

Пример

Определите аргумент каждой из заданных функций







Р е ш е н и е

I $y = (\underbrace{x}_{\text{аргумент}})^4$

II $y = (\underbrace{x^2}_{\text{аргумент}})^2$

III $y = (\underbrace{x^4}_{\text{аргумент}})^1$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

Пример

$$x^4 = (x)^4 \Leftarrow \boxed{x = *}$$
$$\Downarrow$$
$$\left(x^4\right)'_{\boxed{x}} = \underbrace{\left(*^4\right)'_* = 4(*)^3}_{\text{мысленно}} = 4x^3$$

$$x^4 = \left(x^2\right)^2 \Leftarrow \boxed{x^2 = *}$$
$$\Downarrow$$
$$\left(x^4\right)'_{\boxed{x^2}} = \underbrace{\left[(*)^2\right]'_* = 2*}_{\text{мысленно}} = 2x^2$$

$$x^4 = \left(x^4\right)^1 \Leftarrow \boxed{x^4 = *}$$
$$\Downarrow$$
$$\left(x^4\right)'_{\boxed{x^4}} = \underbrace{\left[\,*\,\right]'_* = 1}_{\text{мысленно}} = 1$$

1 Серия Заполните пропуски в примерах нахождениях производных по заданным аргументам

1 $$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)'_{\frac{1}{x}} = \left[\left(\frac{1}{x}\right)^4\right]'_{\frac{1}{x}} = \boxed{\left(*^4\right)'_* = 4\cdot *^3} = 4\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3$$

2 $$\left(\frac{1}{x^2}\right)'_{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left[\left(\boxed{}\right)^4\right]'_{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \boxed{\left(*^4\right)'_* = 4\cdot *^3} = 4\cdot\left(\quad\right)^3 =$$

3 $$\left(\frac{1}{\sqrt[8]{x}}\right)'_{\sqrt[4]{x}} = \left[\frac{1}{\sqrt{\boxed{}}}\right]'_{\sqrt[4]{x}} = \boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{*}}\right)'_* = \quad}$$

4 $$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)'_{\sqrt[8]{x}} = \left[\frac{1}{\left(\sqrt[8]{x}\right)^{\square}}\right]'_{\sqrt[8]{x}} = \boxed{}$$

2 Докажите, что $$(x)'_{\sqrt{x}} = \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)'_x}$$

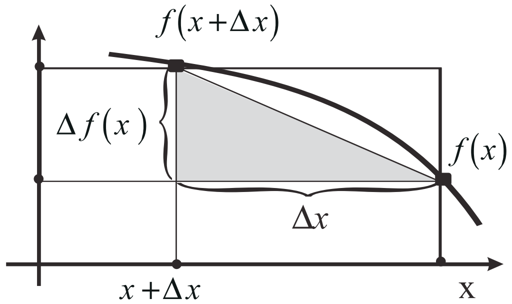
3 Докажите, что $$\frac{\left(x^2\right)'_x}{(x)'_{\sqrt{x}}} = \sqrt{x}$$

Информационная схема
«СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ»

Полезные пределы

$$\begin{matrix}\Delta x = x - x_0 \to \mathbf{0} \\ \Downarrow \\ f(x) \to f(x_0)\end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0)$$

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{c} = \underbrace{\mathbf{c}}_{\text{число}}} \qquad \boxed{\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{число}}}$$



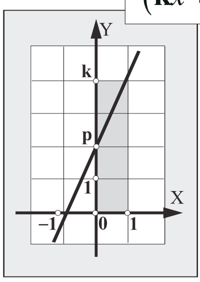
$$\overbrace{\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)}^{\textit{приращение функции } f(x)}$$

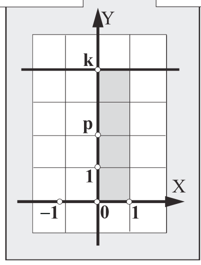
$$\Downarrow$$

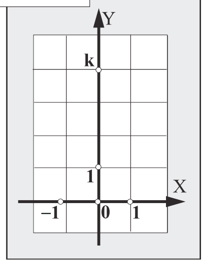
$$\underbrace{\Delta x = (x+\Delta x) - x}_{\textit{приращение аргумента } x}$$

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}}$$

$$\boxed{(\mathbf{k}x + \mathbf{p})' = \mathbf{k}} \qquad \boxed{(\mathbf{k})' = \mathbf{0}}$$







Общая формула производной степени

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\left(x^n\right)' = n \cdot \boxed{\frac{\mathbf{1}}{x}} \cdot x^n}_{\textit{формула, удобная для практики}}$$

Если дифференцирование $f(x)$ ведется по переменной x, то

$$\underbrace{[f(x)]'}_{\textit{пишем}} = \underbrace{f'_x(x)}_{\textit{дифференцируем}}$$

Если дифференцирование $f(*)$ ведется по аргументу $*$, то

$$\underbrace{f'(*)}_{\textit{пишем}} = \underbrace{f'_*(*)}_{\textit{дифференцируем}}$$

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

Самостоятельная работа 1

1. Докажите,что $\Delta\left(\frac{1}{x}+x\right)=\frac{\Delta x\left[x(x+\Delta x)-1\right]}{x(x+\Delta x)}$

$$\frac{\Delta\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\Delta x^2}=-\frac{1}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

2. Докажите,что $\frac{\left(x^{k}\right)'}{\left(x^{-k}\right)'}=-x^{2k}$ 3. Найдите: $\frac{\left(\sqrt[5]{x}\right)'}{\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)'}$ 4. Найдите: $\frac{\left(x^{-5}\right)'}{\left(x^{5}\right)'}$

5. Для функции $f(x)=\sqrt[5]{x^4}$ найдите $f'_*(*)$ при различных аргументах.

аргумент $*$	$f(*)$	$f'_*(*)$
$*=x$		
$*=\sqrt[5]{x}$		
$*=x^2$		
$*=x^4$		
$*=\sqrt[5]{x^4}$		
$*=\frac{1}{x}$		
$*=\frac{1}{x^2}$		
$*=\frac{1}{x^4}$		

ОТВЕТЫ

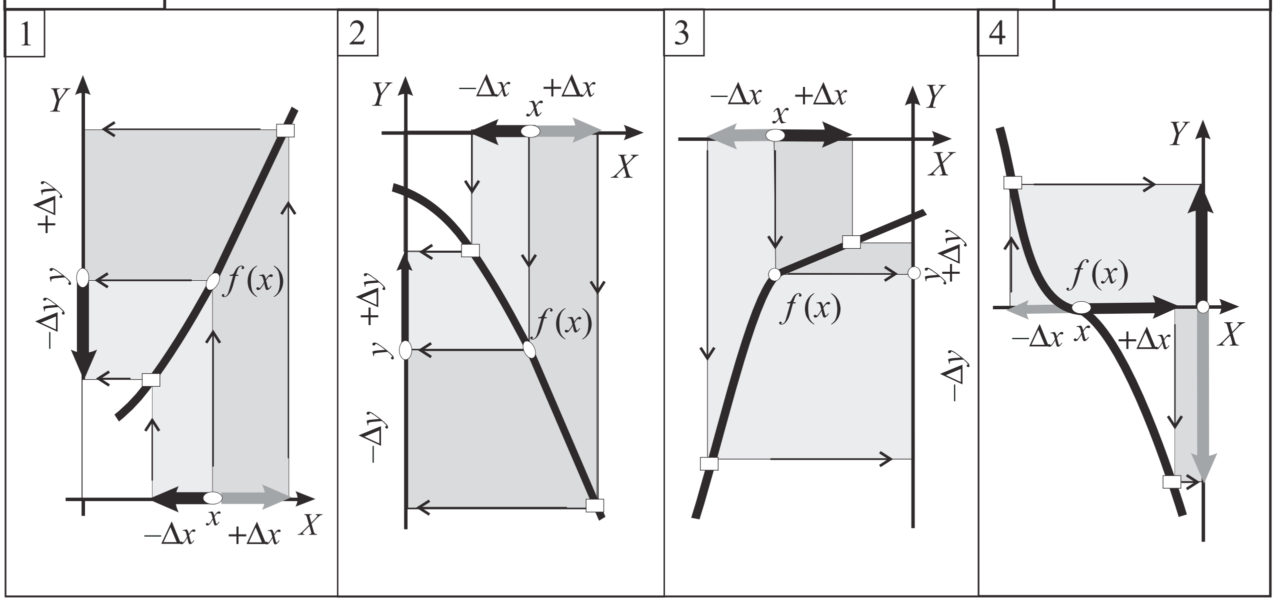
СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

Тренажер

С. 12, № 1		С. 13, № 2		С. 13, № 3	
1	$-\mathbf{n}\cdot\boxed{\frac{\mathbf{1}}{x}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x^{\mathbf{n}}}$	1	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}\cdot\sqrt{x}$	1	$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{x}}$
2	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\cdot\boxed{\frac{\mathbf{1}}{x}}\cdot\sqrt[\mathbf{n}]{x}$	2	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}\cdot\sqrt[3]{x}$	2	$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[3]{x}}$
3	$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\cdot\boxed{\frac{\mathbf{1}}{x}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{x}}$	3	$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}\cdot\sqrt[3]{x^{2}}$	3	$-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[3]{x^{2}}}$
4	$\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\cdot\boxed{\frac{\mathbf{1}}{x}}\cdot\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}$	4	$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}\cdot\sqrt[4]{x^{3}}$	4	$-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[4]{x^{3}}}$
5	$-\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\cdot\boxed{\frac{\mathbf{1}}{x}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}$	5	$\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}\cdot\sqrt[4]{x^{5}}$	5	$-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[4]{x^{5}}}$

Серия

С. 4, № 1



ОТВЕТЫ

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

Серия — С. 15, № 1

1
$$= \left[\left(\frac{1}{x}\right)^4 \right]'_{\frac{1}{x}} = \cdots = \frac{4}{x^3}$$

2
$$= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 \right]'_{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \cdots = \frac{4}{\sqrt{x^3}}$$

3
$$= \left[\frac{1}{\sqrt{\sqrt[4]{x}}} \right]'_{\sqrt[4]{x}} = \cdots = \frac{-1}{2\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{\sqrt[4]{x}}}$$

4
$$= \left[\frac{1}{\left(\sqrt[8]{x}\right)^2} \right]'_{\sqrt[8]{x}} = \cdots = \frac{-2}{\sqrt[8]{x^3}}$$

Задачи на доказательство

С. 5, № 2

$$\Delta\left[u(x)\cdot v(x)\right] = \left[u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)\right]$$

$$\Delta u(x)\cdot\Delta v(x) = \left[u(x+\Delta x) - u(x)\right]\cdot\left[v(x+\Delta x) - v(x)\right]$$

С. 5, № 3

$$\Delta\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x+\Delta x)}{x+\Delta x} - \frac{f(x)}{x}$$

С. 5, № 4

$$= \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

С. 5, № 5

$$= \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x \quad \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

С. 7, № 1

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta \mathbf{k}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{k}-\mathbf{k}}{\Delta x} =$$

С. 7, № 2

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{k}(x+\Delta x) - \mathbf{k}x}{\Delta x} =$$

ОТВЕТЫ

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

Задачи на доказательство

С. 9, № 1

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

С. 10, № 1

$$= \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} =$$

С. 10, № 2

$$= \frac{1}{(x + \Delta x)^2} - \frac{1}{x^2} =$$

С. 10, № 3

$$= \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x + \Delta x}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x}\right)}{\sqrt{x + \Delta x} \cdot \sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x}\right)} =$$

С. 11, № 4

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\Delta x} =$$

С. 11, № 5

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{x - x - \Delta x}{x \cdot (x + \Delta x)}}{\Delta x} =$$

С. 11, № 6

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{x^2 - (x + \Delta x)^2}{(x + \Delta x)^2 \cdot x^2}}{\Delta x} =$$

С. 13, № 4

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x^3}\right)' =$$

С. 13, № 6

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \cdots \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \cdots$$

С. 13, № 7

$$2\left(\sqrt{x}\right)' = \cdots \qquad \frac{\left(x^2\right)'}{2} = \cdots$$

С. 15, № 2

$$(x)'_{\sqrt{x}} = \left[\left(\sqrt{x}\right)^2\right]'_{\sqrt{x}}$$