Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

1

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ВЫНЕСЕНИЕ ЧИСЛА ЗА ЗНАК ПРОИЗВОДНОЙ

$$\left[\mathbf{c}\cdot f(x)\right]' = \mathbf{c}\cdot f'(x)$$

[*Если существует* $f'(x)$]

Доказательство

$$\left[\mathbf{c}\cdot f(x)\right]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left[\mathbf{c}\cdot f(x)\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{c}\cdot f(x+\Delta x)-\mathbf{c}\cdot f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \mathbf{c}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \mathbf{c}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \mathbf{c}\cdot f'(x)$$

Пример

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]' + \left[\frac{x^3}{3}\right]' + \ldots + \left[\frac{x^9}{9}\right]' + \left[\frac{x^{10}}{10}\right]' =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(x^2\right)' + \frac{1}{3}\left(x^3\right)' + \ldots + \frac{1}{9}\left(x^9\right)' + \frac{1}{10}\left(x^{10}\right)'}_{\textit{мысленно}} =$$

$$= x + x^2 + \ldots + x^8 + x^9$$

Пример

$$\left(\frac{6}{x\sqrt[3]{x^2}}\right)' = 6\cdot\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}\right)' =$$

определим **n:** $\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

$$= -\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = -\frac{5\sqrt[3]{x}}{3x^3}$$

1 Тест Определите, при каких значениях x

производная функции $f(x)=\dfrac{x^3}{3}$ равна	*нет решения*	-4	-2	$-\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4
$f'(x) = -1$												
$f'(x) = 0$												
$f'(x) = 2$												
$f'(x) = \frac{1}{4}$												
$f'(x) = 16$												

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

2 Тренажер

Найдите производную, выполнив все преобразования

1	$\left(-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)' =$
2	$\left(\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)' =$
3	$\left(\dfrac{4}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' =$
4	$\left(\dfrac{x}{2\sqrt[3]{x}}\right)' =$

3 Докажите, что **4**

$$\left(\frac{x^{n}}{n}\right)' + \left(\frac{1}{nx^{n}}\right)' = \frac{1}{x}\left(x^{n} - \frac{1}{x^{n}}\right)$$

$$\left(n\sqrt[n]{x}\right)' - \left(\frac{n}{\sqrt[n]{x}}\right)' = \frac{1}{x}\cdot\left[\sqrt[n]{x} + \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right]$$

5 Тест

Найдите производную	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x^3}$	$\dfrac{\sqrt{x}}{x}$	$\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$	$-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$	$-\dfrac{\sqrt{x}}{x}$	$-\dfrac{1}{x^3}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\left(-\dfrac{1}{x}\right)'$								
$\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)'$								
$\left(2\sqrt{x}\right)'$								
$\left(-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)'$								

2

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ПРОИЗВОДНАЯ СУММЫ

Если существуют производные u' и v' на заданном промежутке, то существует производная $(u+v)'$ на этом же промежутке:

$$\underbrace{\left[u(x)+v(x)\right]'}_{\text{Производная суммы разности}} \underbrace{=}_{\text{равна}} \underbrace{u'(x) + v'(x)}_{\text{сумме разности производных}}$$

Доказательство

$\boxed{1}$] $f(x)=u(x)\pm v(x) \Rightarrow \Delta f(x) = \Delta\left[u(x) \pm v(x)\right] =$

$$=\left[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)\right]-\left[u(x)\pm v(x)\right]=$$

$$=\underbrace{\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]}_{=\ \Delta u(x)} \pm \underbrace{\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]}_{\Delta v(x)} =$$

$\boxed{2}$ *при* $x\to 0$: $(u\pm v)' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} =$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\right]=$$

$$=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{=\ u'(x)} \pm \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'(x)} =$$

$$\boxed{(u\pm v)' = u' \pm v'}$$

Пример

$f(x)= 3x^2 - 1 + x$

$\Downarrow$

$$\left[f(x)\right]' = \left(3x^2 - 1 + x\right)' =$$

$$= \underbrace{\left(3x^2\right)' - (1)' + (x)'}_{мысленно} =$$

$$= \underbrace{3\cdot\left(x^2\right)' - 0 + 1}_{мысленно} = 6x+1$$

Пример

$f(x)= \sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\Downarrow$

$$\left[f(x)\right]' = \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$$

$$= \underbrace{\left(\sqrt{x}\right)' + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'}_{мысленно} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\cdot x} = \frac{1}{2x}\cdot\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

Пример Решите уравнение $\left(x^3 - x^2 + 5x\right)' = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + 1\right)'$

Р е ш е н и е

$$3x^2 - 2x + 5 \quad = \quad 2x^2 + 3x - 5$$

$$x^2 - 5x + 10 = 0$$

Так как $D = 25 - 40 < 0$, *то решений нет*

1 Серия

Решите уравнение

1. $\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 6x\right)' = 0$
2. $x^2 - 1 = (2x)'$
3. $\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 8x\right)' = 3x$
4. $\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 12x\right)' = \left(1 - x^2 - \frac{1}{6}x^3\right)'$

2 Тест

Вычислите значение производной функции

$f(x) = 2 + x - x^2$ в заданной точке	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$f'\left(-\frac{1}{2}\right)$													
$f'(-1)$													
$f'(0)$													
$f'(1)$													
$f'\left(\frac{1}{2}\right)$													

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

3

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О ЗАЖАТОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

$$\exists\; g(x) < \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{зажатая}\\ \text{переменная}\\ \text{при}\\ x \to a\\ \text{с любой стороны}}} < G(x):\quad \begin{matrix} \lim\limits_{x \to a} g(x) = M \\ \lim\limits_{x \to a} G(x) = M \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$g(x) \quad < \quad f(x) \quad < G(x)$$

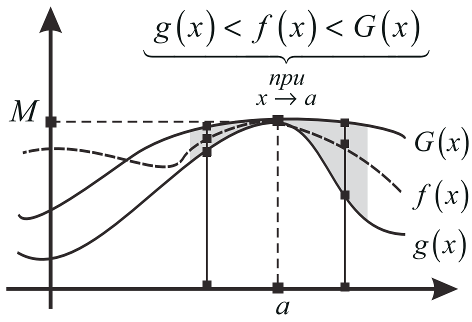
$$\downarrow$$

$$M$$

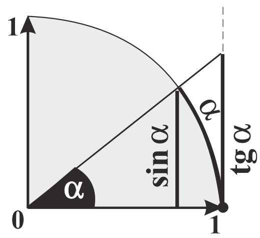
при $x \to a$ с любой стороны

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = M$$



ФОРМУЛА ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА



$$\exists\; \begin{matrix}\alpha \to 0\\ \alpha > 0\end{matrix} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\sin\alpha \quad < \quad \alpha \quad < \quad \operatorname{tg}\alpha \quad \Big|\; : \sin\alpha > 0$$

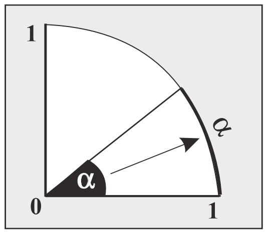
$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} \quad < \quad \frac{\alpha}{\sin\alpha} \quad < \quad \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$1 \quad < \quad \frac{\alpha}{\sin\alpha} \quad < \quad \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$



$$\boxed{\alpha \to 0}$$

$$\cos\alpha \quad < \quad \boxed{\frac{\sin\alpha}{\alpha}} \quad < \quad 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{\substack{\alpha \to 0\\ (\alpha > 0)}} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1}$$

$$\begin{matrix}\alpha \to 0\\ \alpha < 0\end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{\substack{\alpha \to 0\\ (\alpha < 0)}} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1}$$

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)}_{\text{мысленно}}=\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{1}=\frac{1}{2}$$

1 Докажите, что $\Delta\sin x=\sin x\cdot\cos\Delta x+\cos x\cdot\sin\Delta x-\sin x$

2 Докажите, что $\dfrac{\Delta\cos x}{\Delta x}=\cos x\cdot\dfrac{(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}-\sin x\cdot\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}$

3 Докажите, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\cos\Delta x-1)}{(\Delta x)^2}=1$

4

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ПРОИЗВОДНАЯ СИНУСА

$\left]\, f(x) = \sin x \ \forall\ x \in R\right.$

$$\boxed{(\sin x)'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boxed{\sin x \ \cdot \cos \Delta x} + \cos x \cdot \sin \Delta x - \boxed{\sin x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin x \cdot (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \cos x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\sin x \cdot \frac{2\sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} + \cos x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right] =$$

$$= -\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \sin x}_{\sin x} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{\Delta x}{2}}_{0} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \cos x}_{\cos x} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}_{1} =$$

$$= \boxed{\cos x}$$

1	Докажите, что	$(\cos x)' = -\sin x \quad \forall\ x \in R$

2	Докажите, что	$(2\sin x)' \cdot (\cos x)' = -\sin 2x$

3	Докажите, что	$2\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)' = \sin x$

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

$\left[(\sin x)'\right]' = -\sin x$	4	Докажите, что	5	$\left[(\cos x)'\right]' = -\cos x$

Пример Найдите значение производной функции $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x$ $\quad(\cdot)\ x = \dfrac{\pi}{3}$

Вместо слов
«значение производной функции $f(x)$ в заданной точке $x = \mathbf{a}$»
можно писать

$$\left[f(x)\right]'_{|x=\mathbf{a}} = f'(\mathbf{a})$$

Решение

$$\left(2\sqrt{3}\sin x\right)'_{|x=\pi/3} = \boxed{\underbrace{2\sqrt{3}(\sin x)'_{|x=\pi/3}}_{\text{мысленно}}} =$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\cos x_{|x=\pi/3}\right) = \boxed{\underbrace{2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)}_{\text{мысленно}}} = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

6 Тест

Вычислите значение производной функции

в заданной точке	-2	$-\sqrt{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	2
$(2\sin x)'_{\|x=\pi/4}$										
$\left(-\dfrac{\sin x}{\sqrt{2}}\right)'_{\|x=3\pi/4}$										
$\dfrac{(-\cos x)'_{\|x=5\pi/4}}{2\sqrt{2}}$										
$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)'_{\|x=-\pi/4}$										

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

5

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ПРОИЗВОДНАЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

$$\left]\ f(x) = u(x)\cdot v(x) = u\cdot v\right.$$

1

$$\Delta f(x) = \Delta\left[u(x)\cdot v(x)\right]$$

$$f(x+\Delta x)-f(x) = u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x) =$$

$$=\left[u(x)+\Delta u(x)\right]\cdot\left[v(x)+\Delta v(x)\right] - u(x)\cdot v(x) =$$

$$= \Delta u(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot\Delta v(x) + \Delta u(x)\cdot\Delta v(x) =$$

$$= \Delta u\cdot v + u\cdot\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v \ -$$

2

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v + u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}}\cdot v + u\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}} + \underbrace{\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v}_{\mathbf{0}}}_{\mathbf{0}} =$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$= u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$\boxed{\left[u\cdot v\right]' = u'\cdot v + u\cdot v'}$$

[Если существуют $u'(x)$ и $v'(x)$]

ПРОИЗВОДНАЯ ЧАСТНОГО

$$\left]\ h = \frac{u}{v} \Rightarrow u = v\cdot h\right.$$

$$\Downarrow$$

$$u' = (v\cdot h)' = v\cdot h' + v'\cdot h$$

$$\Downarrow$$

$$h' = \frac{u' - v'\cdot h}{v} = \frac{u' - v'\cdot\frac{u}{v}}{v} = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}}$$

[Если существуют $u'(x)$ и $v'(x)\neq \mathbf{0}$]

Пример

$$\boxed{(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'}$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}}$$

$$\left(\sin x\cdot x^2\right)' = \underbrace{\boxed{(\sin x)'\cdot x^2 + \sin x\cdot\left(x^2\right)'}}_{\text{мысленно}} = x^2\cos x + 2x\sin x$$

$$\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)' = \overbrace{\boxed{\frac{(\sin x)'\cdot x^2 - \sin x\cdot\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}}} = \frac{x^2\cos x - 2x\sin x}{x^4}$$

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

Пример

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \underbrace{\frac{\left(x^2\right)'\cdot(x-1) - x^2\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}}_{мысленно} =$$

$$= \frac{2x\cdot(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \underbrace{\frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}}_{мысленно} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

1 Серия

Найдите производную по теореме о производной произведения

1. $f(x) = x^3\,\dfrac{\cos x}{2} \Rightarrow f'(x) =$
2. $f(x) = \dfrac{3\sin x}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) =$
3. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) =$
4. $f(x) = (2x+1)\cdot\cos x \Rightarrow f'(x) =$

2 Серия

Найдите производную по теореме о производной частного

1. $y = \dfrac{x}{\cos x} \Rightarrow y' =$
2. $y = \dfrac{3\sin x}{x} \Rightarrow y' =$
3. $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x-1} \Rightarrow y' =$
4. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{2x}} \Rightarrow y' =$

6

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ПОЛЕЗНОЕ СЛЕДСТВИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЧАСТНОГО

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \boxed{\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}}$$

$$= \frac{(1)'\cdot f(x) - 1\cdot[f(x)]'}{[f(x)]^2} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Пример

$$\left(\frac{x^2}{\cos x}\right)' = \boxed{\underbrace{\frac{(x^2)'\cdot\cos x - x^2\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2}}_{\text{мысленно}}} =$$

$$= \frac{2x\cdot\cos x + x^2\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \boxed{\underbrace{\frac{2x}{\cos x} + \frac{x^2\sin x}{\cos^2 x}}_{\text{мысленно}}} = \frac{x}{\cos x}(2 + x\cdot\operatorname{tg} x)$$

Посмотрите и сравните

Пример

$$\left(\frac{x^2}{\cos x}\right)' = \boxed{\underbrace{(x^2)'\cdot\frac{1}{\cos x} + x^2\cdot\left(\frac{1}{\cos x}\right)'}_{\text{мысленно}}} =$$

$$= 2x\cdot\frac{1}{\cos x} + x^2\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{x}{\cos x}(2 + x\cdot\operatorname{tg} x)$$

Пример

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x} - x^2}\right)' = -\frac{\left(\sqrt{x} - x^2\right)'}{\left(\sqrt{x} - x^2\right)^2} = \boxed{\underbrace{-\frac{\left(\sqrt{x}\right)' - \left(x^2\right)'}{\left(\sqrt{x} - x^2\right)^2}}_{\text{мысленно}}} =$$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{x}}{2x} - 2x}{\left(\sqrt{x} - x^2\right)^2} = \frac{4x^2 - \sqrt{x}}{2x\left(\sqrt{x} - x^2\right)^2}$$

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

$\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)' = -\dfrac{\cos x}{1-\cos^2 x}$	1	Докажите, что	2	$\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{\sin x}{1-\sin^2 x}$

3 Тренажер

1	$\left(\dfrac{1}{3x-7}\right)' =$
2	$\left(\dfrac{1}{x^2-3x+1}\right)' =$
3	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot\sin x}\right)' =$
4	$\left(\dfrac{1}{\sin x+\cos x}\right)' =$

4 Тест

Определите функцию по результату ее дифференцирования	$y=x^2\cdot g(x)$	$y=[g(x)]^2$	$y=\dfrac{g(x)}{x^2}$	$y=\dfrac{x^2}{g(x)}$	$y=\dfrac{1}{g(x)}$
$y'=2x\cdot g(x)+x^2g'(x)$					
$y'=2g(x)\cdot g'(x)$					
$y'=\dfrac{x\cdot g'(x)-2g(x)}{x^3}$					
$y'=\dfrac{2x}{g(x)}-\dfrac{x^2g'(x)}{g^2(x)}$					
$y'=-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$					

7

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ПРОИЗВОДНАЯ ТАНГЕНСА

$$(\mathbf{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' =$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

$$= \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

или

$$(\mathbf{tg}\,x)' = \left(\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}\right)' =$$

$$\left(u\cdot\frac{1}{v}\right)' = u'\cdot\frac{1}{v} + u\cdot\left(\frac{1}{v}\right)'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$= (\sin x)'\cdot\frac{1}{\cos x} + \sin x\cdot\left(\frac{1}{\cos x}\right)' =$$

$$= \cos x\cdot\frac{1}{\cos x} + \sin x\cdot\left(-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}\right) =$$

$$= 1 + \mathbf{tg}^2 x =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{(\mathbf{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

1 Докажите, что $\Big(\underbrace{\mathbf{ctg}\,x}_{\cos x\cdot\frac{1}{\sin x}}\Big)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$\Big(\underbrace{\mathbf{ctg}\,x}_{\frac{1}{\mathbf{tg}\,x}}\Big)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ Докажите, что **2**

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

3 Докажите, что $(\mathbf{tg}\,x - x)' = \mathbf{tg}^2 x$

Тригонометрические тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \qquad \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$$

$$\mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \qquad 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

4 Докажите, что $\left(-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x}\right)' = 1 + \mathrm{ctg}^2 x$

5 Докажите, что $\left(\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{ctg}\,x}\right)' = 2\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$

6 Докажите, что $\left(\dfrac{x}{\mathrm{ctg}\,x}\right)' = x\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\,x + x$

9 Докажите, что $\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x}\right)' = \cos 2x$

7 Докажите, что $\left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\right)' = \mathrm{tg}\,x \cdot \left(\cos x + \dfrac{1}{\cos x}\right)$

8 Докажите, что $(\mathrm{tg}\,x)' - (\mathrm{ctg}\,x)' = \dfrac{4}{\sin^2 2x}$

8

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ВВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО АРГУМЕНТА

$$\underbrace{f\Big(\underbrace{\underbrace{\mathbf{k}}_{\text{множитель}}\cdot\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}}+\mathbf{p}}_{\text{линейный аргумент}}\Big)}_{\text{функция}}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= f(z) \\ z &= \mathbf{k}x+\mathbf{p} \end{aligned}\right\} \Downarrow \qquad y = f(\;z\;) \;\downarrow\; \boxed{\mathbf{k}x+\mathbf{p}} \qquad y = f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})$$

Пример По заданным функциям $f(x)=\mathbf{2}x+\mathbf{1}$ и $g(x)=x^2$ составьте функции $f[g(x)]$ и $g[f(x)]$

Анализ

Проанализируем структуры функций:

$f(\boxed{x}) = \mathbf{2}\boxed{x}+\mathbf{1}$

$g(\boxed{x}) = \boxed{x}^2$

Решение

$$f\left[g(x)\right] = \underbrace{f\left[x^{\mathbf{2}}\right]}_{\text{мысленно}} = \mathbf{2}\cdot\boxed{x^{\mathbf{2}}}+\mathbf{1}$$

$$g\left[f(x)\right] = \underbrace{g\left[\mathbf{2}x+\mathbf{1}\right]}_{\text{мысленно}} = \left(\boxed{\mathbf{2}x+\mathbf{1}}\right)^{\mathbf{2}}$$

Пример $f(x)$, $\quad f(x+\mathbf{1}) = x^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}x+\mathbf{2}$

Анализ

$$f\;(x+\mathbf{1}) = x^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\cdot x + \mathbf{2}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = f\left[(x+\mathbf{1})-\mathbf{1}\right] = (x-\mathbf{1})^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\cdot(x-\mathbf{1})+\mathbf{2}$$

Решение

$$f(x) = (x-\mathbf{1})^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\cdot(x-\mathbf{1})+\mathbf{2} =$$
$$= x^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}x+\mathbf{1}-\mathbf{3}x+\mathbf{3}+\mathbf{2} =$$
$$= x^{\mathbf{2}} - \mathbf{5}x+\mathbf{6}$$

1 Тест Для функции $f(x)=x^2$ определите

	$4x^2$	$2+x^2$	$2x^2$	$2x^2+1$	$2-x^2$	$(x-2)^2$	$2-4x+x^2$
$2f(x)$							
$f(2x)$							
$f(x)+2$							
$2-f(x)$							
$f(2-x)-2$							

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

2 Тренажер

Определите для функции	независимую переменную	линейный аргумент	множитель функции	множитель независимой переменной
$y = 2\sin(3x+4)$				
$y = \dfrac{\cos(3-4z)}{2}$				
$y = 4\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\varphi}{3}\right)+2$				
$y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2\alpha-3}{4}\right)$				

Определяя соответствующее ОДЗ, составьте функцию

$y=\sqrt{*}-1$ с аргументом $y=\sqrt{*}-1$

3 Тренажер / **4** Тренажер

№ (3)	$y=\sqrt{*}-1$	аргумент	$y=\sqrt{*}-1$	№ (4)
1		$x-4$		1
2		$1-x$		2
3		$4x$		3
4		$\dfrac{x}{4}$		4
5		$1-4x$		5

5 Тренажер

Для функции $y=f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ составьте

1	$f(x+1)=$
2	$f(2x)=$
3	$f\left(\dfrac{x}{4}\right)=$
4	$f(4x-3)=$

6 Докажите, что

$f(x)=x-\sqrt{x}$, $x\geq 0$,

$$f(x+2)+f(1-x)=3-\sqrt{x+2}-\sqrt{1-x}$$
$$-2\leq x\leq 1$$

9

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

МОДЕЛЬ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ АРГУМЕНТОМ

$$\left.\right] \; y = f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})$$

При $x \to \Delta x$

$$\Downarrow$$

$$(\mathbf{k}x+\mathbf{p}) \to \Delta(\mathbf{k}x+\mathbf{p})$$

$$\Downarrow$$

$$f(\mathbf{k}x+\mathbf{p}) \to \Delta f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})$$

заменим $\mathbf{k}x+\mathbf{p}$ на $*$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(*)}{\Delta x} = (*)'_x$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta(*) \to 0} \frac{\Delta f(*)}{\Delta(*)} = f'_*(*)$$

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ АРГУМЕНТОМ

$$\left.\right] \exists \; y' = f'_*(*) = f'_{\mathbf{k}x+\mathbf{p}}(\mathbf{k}x+\mathbf{p}),$$

где $(*)' = (\mathbf{k}x+\mathbf{p})' = \mathbf{k}$

Найдем $\left[f(*)\right]' = f'_x(*)$ **:**

$$f'_x(*) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(*)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta f(*)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta(*)}{\Delta(*)}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta f(*)}{\Delta(*)} \cdot \frac{\Delta(*)}{\Delta x}\right] =$$

$$\boxed{\begin{matrix}\Delta x \to 0 \\ \Downarrow \\ \Delta(*) \to 0\end{matrix}} \quad = \lim_{\Delta(*) \to 0} \frac{\Delta f(*)}{\Delta(*)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(*)}{\Delta x} =$$

$$= f'_*(*) \cdot (*)'_x =$$

$$= f'_*(*) \cdot \mathbf{k}$$

Если *дифференцирование функции* $f(*)$ $\left[\text{при } * \neq x\right]$ *ведется по независимой переменной x*, **то** *вместо* $\left[f(*)\right]'$ *пишут* $f'_x(*)$

Так как $f'_x(*) = f'_x(\mathbf{k}x+\mathbf{p}) = \left[f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\right]'$ *и* $\exists \; f'_{\mathbf{k}x+\mathbf{p}}(\mathbf{k}x+\mathbf{p}),$

$$f'_*(*) = f'_{\mathbf{k}x+\mathbf{p}}(\mathbf{k}x+\mathbf{p}) = f'(\mathbf{k}x+\mathbf{p})$$

то

$$\left[f(\boxed{\mathbf{k}}x+\mathbf{p})\right]' = \boxed{\mathbf{k}} \cdot f'(\boxed{\mathbf{k}}x+\mathbf{p})$$

Пример

$$\left[\mathbf{tg}\;(5x+3)\right]' =$$

$$= 5 \cdot \underbrace{\frac{1}{\mathbf{cos}^2 \underbrace{(5x+3)}_{\text{при сохранении аргумента}}}}_{\text{сразу результат}}$$

$$\left[f\;(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\right]' =$$

$$= \mathbf{k} \cdot \underbrace{f' \underbrace{(\mathbf{k}x+\mathbf{p})}_{\text{при заданном аргументе}}}_{\text{производная функции}}$$

Пример

$$\left[\mathbf{sin}\;(3x-5)\right]' =$$

$$= 3 \cdot \underbrace{\mathbf{cos}\; \underbrace{(3x-5)}_{\text{при сохранении аргумента}}}_{\text{сразу результат}}$$

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

1 Тест Определите

производную	$3\cos 3x$	$\cos 3x$	$3\cos x$	$\frac{1}{3}\cos x$	$\cos\frac{x}{3}$	$3\cos\frac{x}{3}$	$\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}$
$(\sin 3x)'$							
$\left(\frac{\sin 3x}{3}\right)'$							
$\left(3\sin\frac{x}{3}\right)'$							
$\left(\sin\frac{x}{3}\right)'$							

2 Тренажер

Определите переменную, по которой ведется дифференцирование

1	$\sin'(\mathbf{k}x) = (\cdots)'_{\square}$
2	$[\sin(\mathbf{k}x)]' = (\cdots)'_{\square}$
3	$[\sin(\mathbf{k}x+\mathbf{p})]' = (\cdots)'_{\square}$
4	$\sin'(\mathbf{k}x+\mathbf{p}) = (\cdots)'_{\square}$

3 Тренажер

Найдите производную по x

1	$\left[(2x+5)^3\right]' =$
2	$[\cos(7-2x)]' =$
3	$\left(\sqrt{3x+2}\right)' =$
4	$[\operatorname{ctg}(1-x)]' =$

4 Докажите, что $\dfrac{\left[2\sqrt{\mathbf{k}x}\right]'}{\mathbf{k}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{k}x}}$

5 Докажите, что $\dfrac{[f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})]'}{f'(\mathbf{k}x+\mathbf{p})} = \mathbf{k}$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

Информационная схема
«ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ»

$$(\mathbf{c})' = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{k}x+\mathbf{p})' = \mathbf{k}$$

$$\left[\mathbf{c}\cdot f(x)\right]' = \mathbf{c}\cdot f'(x)$$

$$\left[u \pm v\right]' = u' \pm v'$$

$$(\mathbf{sin}\,x)' = \mathbf{cos}\,x$$
$$(\mathbf{cos}\,x)' = -\,\mathbf{sin}\,x$$
$$(\mathbf{tg}x)' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^2 x}$$
$$(\mathbf{ctg}x)' = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin}^2 x}$$

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$
$$\left(\frac{\mathbf{1}}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$\underbrace{f(\overbrace{x}^{\textit{независимая переменная}})}_{\textit{функция от } x}$$

Вместо
$[f(x)]'$
пишут
$f'_x(x)$ *или* $f'(x)$

Вместо
$[f(*)]'$
пишут
$f'_*(*)$ *или* $f'(*)$

$$\underbrace{f(\overbrace{*}^{\textit{аргумент}})}_{\textit{функция от } *}$$

$$\underbrace{f\left(\underbrace{\underbrace{\mathbf{k}}_{\textit{множитель}}\cdot\overbrace{x}^{\textit{независимая переменная}}+\mathbf{p}}_{\textit{линейный аргумент}}\right)}_{\textit{функция}}$$

$$\left[f(\boxed{\mathbf{k}}\,x+\mathbf{p})\right]' = \boxed{\mathbf{k}}\cdot f'(\boxed{\mathbf{k}}\,x+\mathbf{p})$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. $\left(-\frac{x^{-2}}{2\sqrt{2}}\right)' =$
2. $\left[\left(x^2+2\right)^3\right]' =$
3. $2\left[\cos^2\frac{x}{2}\right]' =$
4. $\left[\sqrt[5]{x^2}\cdot\frac{3\sin x}{2}\right]' =$
5. $\left[\frac{1}{x-2x^2-6}\right]' =$
6. $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}$
   $f(x)=$
7. $\left[(\mathbf{m}x-\mathbf{p})^{\mathbf{n}}\right]' =$
8. $\left[(\sin x)'\right]^2+\left[(\cos x)'\right]^2=1$

Вариант 2

1. $\left(\frac{1}{4\sqrt[8]{x^2}}\right)' =$
2. $\left[\frac{4}{5}x^5-2\left(\frac{x^2}{2}\right)'+1\right]' =$
3. $\left[\sin\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\cdot 2\cos\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}\right]' =$
4. $\left[\frac{x^3+3x}{\cos x}-2\right]' =$
5. $\left[\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}\right]' =$
6. $f'(x)=2\left(x-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$
   $f(x)=$
7. $\left[\frac{\sqrt{2x+5}}{(2x+5)^2}\right]' =$
8. $\sin 2x=-2\cdot(\sin x)'(\cos x)'$

Вариант 3

1. $\left(\frac{2\sqrt[5]{x^3}}{5x}\right)' =$
2. $\left[\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}\right)\cdot\left(\frac{(2x)^2}{16}+\frac{4}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)\right]' =$
3. $\left[(\cos x+\sin x)^2\right]'_{2x} =$
4. $\left[\frac{x}{6\sqrt[3]{x}}+\frac{\sin x}{2x}-3x\cos x\right]' =$
5. $\left[\frac{1}{\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x}\right]'_{3x} =$
6. $f'(x)=\cos x\cdot\mathrm{tg}x+\frac{\mathrm{tg}x}{\cos x}$
   $f(x)=$
7. $\left[\cos(5-x)\cdot\sin(3x+2)\right]' =$
8. $(\mathrm{tg}x)'=\mathrm{tg}^2x+1$

ОТВЕТЫ

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

Тренажер

С. 23, № 2		С. 33, № 3		С. 37, № 2				
1	$\frac{\sqrt{x}}{x^2}$	1	$-\frac{3}{(3x-7)^2}$	1	x	$3x+4$	2	3
2	$\frac{-2\sqrt[3]{x^2}}{x^2}$	2	$-\frac{2x-3}{\left(x^2-3x+1\right)^2}$	2	z	$3-4z$	$\frac{1}{2}$	4
3	$-\frac{3\sqrt[4]{x}}{x^2}$	3	$\frac{-1}{\sqrt{x}\sin x}\left(\operatorname{ctg}x+\frac{1}{2x}\right)$	3	φ	$\frac{\varphi}{3}$	4	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}$	4	$\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}$	4	α	$\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$

Тренажер

С. 37, № 3		С. 37, № 4		С. 37, № 5		С. 39, № 2		С. 39, № 3	
1	$y=\sqrt{x-4}-1$ $x\ge 4$	1	$y=\sqrt{x-5}$ $x\ge 5$	1	$y=\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$	1	$\mathbf{k}x$	1	$6(2x+5)^2$
2	$y=\sqrt{1-x}-1$ $x\le 1$	2	$y=\sqrt{-x}$ $x\le 0$	2	$y=\frac{2x+1}{\sqrt{2x}}$	2	x	2	$2\sin(7-2x)$
3	$y=\sqrt{4x}-1$ $x\ge 0$	3	$y=\sqrt{4x-1}$ $x\ge\frac{1}{4}$	3	$y=\frac{x+4}{2\sqrt{x}}$	3	x	3	$\frac{3\sqrt{3x+2}}{2(3x+2)}$
4	$y=\frac{\sqrt{x}}{2}-1$ $x\ge 0$	4	$y=\frac{\sqrt{x-4}}{2}$ $x\ge 4$	4	$y=\frac{4x-2}{\sqrt{4x-3}}$	4	$\mathbf{k}x+\mathbf{p}$	4	$\frac{1}{\sin^2(1-x)}$
5	$y=\sqrt{1-4x}-1$ $x\le\frac{1}{4}$	5	$y=2\sqrt{-x}$ $x\le 0$						

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

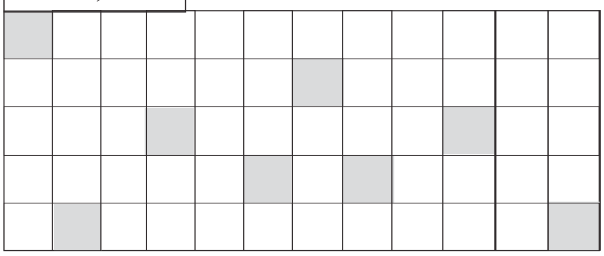
ОТВЕТЫ

Серия

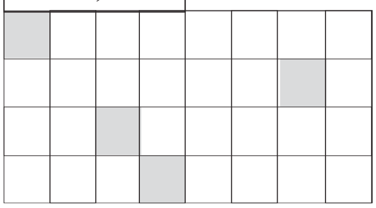
С. 25, № 1	С. 31, № 1	С. 31, № 2
1 $x=-1;-6$	1 $\frac{x^2}{2}(3\cos x - x\sin x)$	1 $\frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$
2 $x=\pm\sqrt{3}$	2 $\frac{3}{2\sqrt{x}}\left(\cos x - \frac{\sin x}{2x}\right)$	2 $\frac{3(x\cos x - \sin x)}{x^2}$
3 $x=2$	3 $\frac{1}{\cos^2 x}$	3 $\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$
4 *решений нет*	4 $2(\cos x - x\sin x) - \sin x$	4 $\frac{3\sqrt{2x}}{4}$

Тест

С. 22, № 1



С. 23, № 5



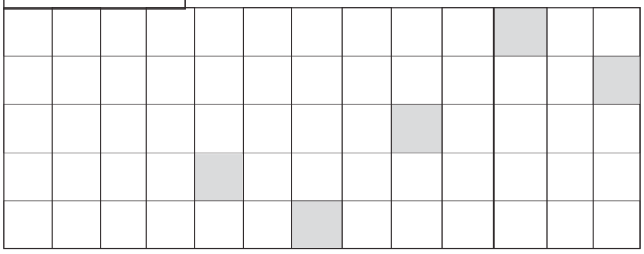
Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

ОТВЕТЫ

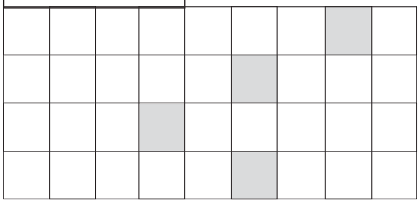
ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

Тест

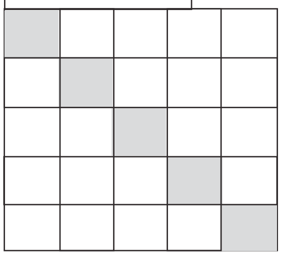
С. 25, № 2



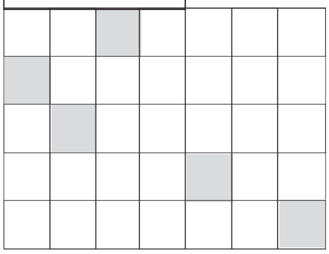
С. 29, № 6



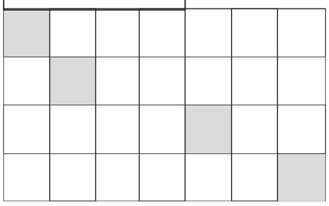
С. 33, № 4



С. 36, № 1



С. 39, № 1



Задачи на доказательство

С. 23, № 3

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\left(x^{\mathbf{n}}\right)' + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\cdot\left(\frac{\mathbf{1}}{x^{\mathbf{n}}}\right)' =$$

С. 23, № 4

$$= \mathbf{n}\cdot\left(\sqrt[\mathbf{n}]{x}\right)' - \mathbf{n}\cdot\left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{x}}\right)' =$$

С. 27, № 1

$$= \sin\left(x+\Delta x\right) - \sin x =$$

С. 27. № 2

$$= \frac{\cos\left(x+\Delta x\right) - \cos x}{\Delta x} =$$

С. 27, № 3

$$\cos * - 1 = -2\sin^2\frac{*}{2}$$

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ОТВЕТЫ

Задачи на доказательство

С. 28, № 1

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cdot \cos \Delta x - \sin x \cdot \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} =$$

С. 28, № 2

$$= 2 \cdot (\sin x)' \cdot (\cos x)' =$$

С. 28, № 3

$$2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

С. 29, № 4

$$= [\cos x]' =$$

С. 29, № 5

$$= [-\sin x]' =$$

С. 33, № 1

$$= \underbrace{-\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}}_{\text{мысленно}} =$$

С. 33, № 2

$$= \underbrace{-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}}_{\text{мысленно}} =$$

С. 34, № 1

$$\left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} - u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

С. 34, № 2

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

С. 35, № 3

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - 1 =$$

С. 35, № 4

$$= (-\mathrm{ctg}\, x)' =$$

С. 35, № 5

$$= (\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, x)' =$$

С. 35, № 6

$$= (x \cdot \mathrm{tg}\, x)' =$$

С. 35, № 7

$$= (\sin x \cdot \mathrm{tg}\, x)' =$$

ОТВЕТЫ

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

Задачи на доказательство

С. 35, № 8

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{(\cos x\cdot\sin x)^2}=$$

С. 35, № 9

$$=\left(\frac{1}{\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\cdot\sin x}}\right)'=$$

С. 37, № 6

$$f(x+2)=x+2-\sqrt{x+2}\qquad x\geq -2$$
$$f(1-x)=1-x-\sqrt{1-x}\qquad x\leq 1$$

С. 39, № 4

$$=\left[2\sqrt{k\,x}\right]'=2\sqrt{k}\left(\sqrt{x}\right)'=$$

С. 39, № 5

$$\left[f(k\,x+p)\right]'=\left[f(k\,x+p)\right]'_x$$
$$f'(k\,x+p)=f'_{kx+p}(k\,x+p)$$