Н. Резник,
Н.Неделько, Н.Ежова

# *Начальные представления о матрицах и определителях*

МУРМАНСК
2003

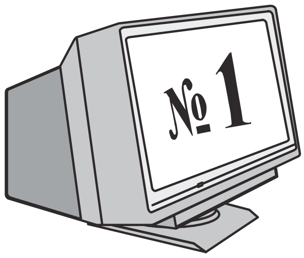
УДК 512.83(07)
ББК 22.143. я7

**Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. - Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. - 44 с.**

Наталия Александровна Резник,
Наталья Станиславовна Неделько,
Наталия Михайловна Ежова
**Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект.**

ISBN 5-94245-017-X

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах
и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.




# *Система 2-х линейных уравнений с 2-мя неизвестными*

1. Система уравнений и ее матрица . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
2. Система уравнений и ее определитель . . . . . . . . . . . . . . . 3
3. Ряды матрицы и определителя . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
4. Диагонали матрицы и определителя . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
5. Раскрытие главного определителя . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
6. Нахождение значения определителя . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
7. Определители системы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
8. Решение системы с помощью определителей . . . . . . . . . 9
9. Геометрическая интерпретация системы . . . . . . . . . . . . . 10
10. Условие единственности решения системы . . . . . . . . . . . 11
Информационная схема
«ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА» . . . . . . . . . . . . . . 12
Разные задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

# 1 *Система уравнений и ее матрица*

## *Система 2-х линейных уравнений с 2-мя неизвестными*

$$S_2: \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Система
2-х линейных уравнений с 2-мя неизвестными

$\left.\begin{matrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{matrix}\right\}$ Коэффициенты (*постоянные*)

$\underbrace{x,\ y}$ Неизвестные (*переменные*)

$\left\{\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}\right.$ Свободные члены (*постоянные*)

## *Матрица системы 2-х линейных уравнений с 2-мя неизвестными*

Из коэффициентов системы при ее неизвестных

$$\begin{matrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{matrix}$$

и ее свободных членов

$$\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}$$

можно составить

***квадратную матрицу***

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

***матрицу-столбец***

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

***расширенную матрицу***

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right)$$

**1 ПОСМОТРИТЕ И**

***восстановите*** систему по ее расширенной матрице

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{array}\right)$$

**2 ПОСМОТРИТЕ И 3**

$$\begin{cases} \mathbf{3}x + y = \mathbf{2} \\ -x + \mathbf{3}y = \mathbf{-1} \end{cases}$$

***составьте*** расширенную матрицу системы

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{-5} + y = \mathbf{3}x \\ x - \mathbf{2} = \mathbf{0} \end{matrix}\right\}$$

## *Система уравнений и ее определитель*

**2**

$$S_2: \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Если для пары чисел $\begin{cases} x^* \\ y^* \end{cases}$ выполняется: $\begin{cases} a_1x^* + b_1y^* = c_1 \\ a_2x^* + b_2y^* = c_2 \end{cases}$, то $\left.\begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix}\right\}$ – решения системы $S_2$

Например, для системы $\begin{cases} x - y = \mathbf{9} \\ \mathbf{2}x + \mathbf{3}y = \mathbf{38} \end{cases}$

находят ее решения и записывают:

$$\begin{cases} x - y = \mathbf{9} \\ \mathbf{2}\cdot(\underbrace{x - y}_{\mathbf{9}}) + \mathbf{5}y = \mathbf{38} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \mathbf{9} \\ \mathbf{5}y = \mathbf{20} \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = \mathbf{13} \\ y = \mathbf{4} \end{matrix}\right\} - \text{решения системы}$$

### ***Главный определитель системы 2-х линейных уравнений с 2-мя неизвестными***

Из коэффициентов системы при ее неизвестных $\begin{matrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{matrix}$ можно составить ***главный*** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ***определитель системы***

Например, для системы $\begin{cases} x - y = \mathbf{9} \\ \mathbf{2}x + \mathbf{3}y = \mathbf{38} \end{cases}$ ее главный определитель выглядит так: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$

Точно также можно составить главный определитель системы по ее матрицам:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-4} & \mathbf{1} \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-4} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-4} \end{vmatrix}$$

расширенная матрица системы; квадратная матрица системы; главный определитель системы

**ПОСМОТРИТЕ И** ***составьте*** главный определитель системы

**1** $\left.\begin{matrix} -\mathbf{3}x + \mathbf{2}y = \mathbf{5} \\ \mathbf{2}x - \mathbf{3}y = \mathbf{-4} \end{matrix}\right\}$

**2** $\begin{cases} y = \mathbf{2} \\ y - x = \mathbf{0} \end{cases}$

**3**

## *Ряды матрицы и определителя*

Каждый элемент матрицы имеет в ее структуре, определителя имеет в его структуре строго определенное место

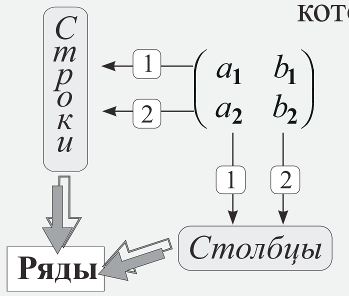
Например: $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

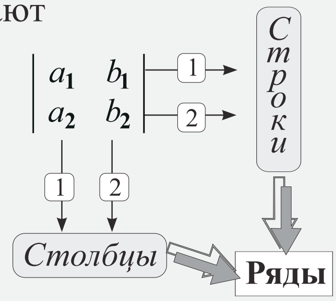
Например: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{vmatrix}$

Из одинаковых чисел можно составлять разные определители и матрицы

Например: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

У матриц и у определителей различают столбцы и строки, которые называют рядами




Матрицу / Определитель системы 2-х уравнений с 2-мя неизвестными обозначают символом $M^{2\times 2}$ / $\mathrm{D}_2$

**1** Тренажер

В определителе вида $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ найдите значение элемента

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$ | $\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & t \end{vmatrix}$ | $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ | $\Delta_2 = \begin{vmatrix} s & t \\ z & y \end{vmatrix}$ |
| $b_2 =$ | $a_1 =$ | $b_1 =$ | $a_2 =$ |

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах
и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

# *Диагонали матрицы и определителя* **4**

У матриц и у определителей различают диагонали

$$M^{2\times2}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

побочную главную | побочную главную

**1** Тренажер Из данных фигурок

☹ 😐 😮 ☺

составьте квадратную матрицу,
если известно, что
у нее равны только элементы

| 1 все | 2 главной диагонали | 3 первого столбца | 4 второй строки |
|---|---|---|---|
| $M^{2\times2}=\begin{pmatrix} \text{😶} & \text{😶} \\ \text{😶} & \text{😶} \end{pmatrix}$ | $M^{2\times2}=\begin{pmatrix} \text{😶} & \text{😶} \\ \text{😶} & \text{😶} \end{pmatrix}$ | $M^{2\times2}=\begin{pmatrix} \text{😶} & \text{😶} \\ \text{😶} & \text{😶} \end{pmatrix}$ | $M^{2\times2}=\begin{pmatrix} \text{😶} & \text{😶} \\ \text{😶} & \text{😶} \end{pmatrix}$ |

У определителя
разрешается перемножать
элементы
побочной диагонали главной диагонали

Найдите
значение произведения элементов
побочной диагонали определителя | главной диагонали определителя

**2** Тренажер | **3** Тренажер

| | побочной диагонали определителя | | главной диагонали определителя | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | $\begin{vmatrix} y & x \\ x & y \end{vmatrix}$ | | 1 |
| 2 | | $\begin{vmatrix} a^3 & \mathbf{1} \\ b^3 & \mathbf{1} \end{vmatrix}$ | | 2 |
| 3 | | $\begin{vmatrix} -a & a^2 \\ -b & b^2 \end{vmatrix}$ | | 3 |
| 4 | | $\begin{vmatrix} y-x & x+y \\ x-y & x+y \end{vmatrix}$ | | 4 |

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах
и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

# 5 *Раскрытие главного определителя*

Раскрыть определитель – значит
записать его в виде алгебраического выражения

Раскрывают определитель по правилу:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \underbrace{\boxed{-}\, b_1 \cdot a_2}_{\text{Побочная диагональ}} \; \underbrace{\boxed{+}\, a_1 \cdot b_2}_{\text{Главная диагональ}}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \quad \boxed{-} \text{ так видим } \boxed{+}$$

$$= \underbrace{a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2}_{\text{так пишем}}$$

| 1 Тест дите представление выражения | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| в виде определителя | $\mathbf{5}\cdot c - b\cdot \mathbf{7}$ | $c\cdot \mathbf{7} - \mathbf{5}\cdot b$ | $\mathbf{5}\cdot \mathbf{7} - b\cdot c$ | $b\cdot c - \mathbf{5}\cdot \mathbf{7}$ | $\mathbf{5}\cdot b - \mathbf{7}\cdot c$ |
| $\begin{vmatrix} \mathbf{5} & b \\ c & \mathbf{7} \end{vmatrix}$ | | | | | |
| $\begin{vmatrix} \mathbf{5} & b \\ \mathbf{7} & c \end{vmatrix}$ | | | | | |
| $\begin{vmatrix} b & c \\ \mathbf{7} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$ | | | | | |
| $\begin{vmatrix} c & b \\ \mathbf{5} & \mathbf{7} \end{vmatrix}$ | | | | | |
| $\begin{vmatrix} b & \mathbf{7} \\ \mathbf{5} & c \end{vmatrix}$ | | | | | |

Алгебраическое выражение вида $a \cdot b - c \cdot d$ можно представить определителем $\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}$

| 2 Тест Найдите определитель, представленный | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| в виде выражения | $\begin{vmatrix} a & b \\ \mathbf{2} & d \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} a & b \\ d & \mathbf{2} \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} b & \mathbf{2} \\ d & a \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & b \\ a & d \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} b & d \\ a & \mathbf{2} \end{vmatrix}$ |
| $a\cdot \mathbf{2} - b\cdot d$ | | | | | |
| $\mathbf{2}\cdot d - a\cdot b$ | | | | | |
| $a\cdot d - b\cdot \mathbf{2}$ | | | | | |
| $b\cdot \mathbf{2} - a\cdot d$ | | | | | |

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

## *Нахождение значения определителя* **6**

При раскрытии определителя, все элементы которого являются числами, получают число

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \qquad - \qquad +$$

$$= 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} =$$

***Решите сами***

При раскрытии определителя обязательно учитываются знаки всех его элементов

$$\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5) \cdot 2 - 6 \cdot (-2) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} =$$

**1** Тренажер — Найдите и упростите значение определителя

1 $$\begin{vmatrix} -x_1 & z_1 \\ x_2 & -z_2 \end{vmatrix} =$$

2 $$\begin{vmatrix} x_1 & -z_1 \\ x_2 & -z_2 \end{vmatrix} =$$

3 $$\begin{vmatrix} x_1 & -z_1 \\ -x_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

4 $$\begin{vmatrix} x_1 & -z_1 \\ -x_2 & -z_2 \end{vmatrix} =$$

**2** Тест — Найдите значение выражения

| выражения | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ | | | | | | | |
| $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ | | | | | | | |
| $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ | | | | | | | |
| $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ | | | | | | | |

**3** Докажите, что

$$\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = 1$$

# 7 *Определители системы*

Из столбцов коэффициентов и столбца свободных членов

системы $S_2$: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

можно составлять разные определители,
заменяя
столбцом свободных членов

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix} \end{vmatrix} \Leftarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}} \end{vmatrix}$$

| столбец при $x$ | | столбец при $y$ |
|---|---|---|
| дополнительный определитель $\Delta_x$ | главный определитель $\Delta$ | дополнительный определитель $\Delta_y$ |

**ПОСМОТРИТЕ И**

***составьте***
по расширенной матрице
системы

$$\left(\begin{array}{rr|r} \mathbf{1} & \mathbf{-5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{9} & \mathbf{4} \end{array}\right)$$

1 — дополнительный определитель $\Delta_x$

2 — дополнительный определитель $\Delta_y$

При составлении определителей системы
нужно учитывать, что
в ее уравнениях может быть изменен порядок слагаемых:

$$\left.\begin{matrix} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{matrix}\right\} \Leftarrow S_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1y+a_1x=c_1 \\ b_2y+a_2x=c_2 \end{cases}$$

| Составьте и вычислите определители | | из коэффициентов системы | из коэффициентов при $x$ и свободных членов системы | из коэффициентов при $y$ и свободных членов системы |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{cases} \mathbf{3}x-y=\mathbf{0} \\ -x+\mathbf{3}y=\mathbf{12} \end{cases}$ | 3 Тренажер | 4 Тренажер | 5 Тренажер |
| 2 | $\begin{cases} x-\mathbf{3}y=\mathbf{-12} \\ -x+\mathbf{3}y=\mathbf{12} \end{cases}$ | | | |
| 3 | $\begin{cases} y-x=\mathbf{0} \\ x+\mathbf{3}y=\mathbf{12} \end{cases}$ | | | |
| 4 | $\begin{cases} \mathbf{3}-y=x \\ y=\mathbf{1}-\mathbf{3}x \end{cases}$ | | | |

## *Решение системы с помощью определителей* **8**

$$S_2: \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

а) Найдем ***x***:

$$\begin{cases} b_1y = c_1 - a_1x \\ b_2y = c_2 - a_2x \end{cases}$$

$$\frac{c_1 - a_1x}{b_1} = \frac{c_2 - a_2x}{b_2}$$

$$b_2c_1 - a_1b_2x = b_1c_2 - a_2b_1x$$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2} = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

б) Найдем ***y***:

$$\begin{cases} a_1x = c_1 - b_1y \\ a_2x = c_2 - b_2y \end{cases}$$

$$\frac{c_1 - b_1y}{a_1} = \frac{c_2 - b_2y}{a_2}$$

$$a_2c_1 - a_2b_1y = a_1c_2 - a_1b_2y$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Решения системы можно находить с помощью определителей

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{c_1} & b_1 \\ \boxed{c_2} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{c_1} \\ a_2 & \boxed{c_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = y$$

Дополнительные определители системы $S_2$

Главный определитель системы $S_2$

### ПОСМОТРИТЕ И

**1** ***решите*** систему методом подстановки

$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 57x + 13y = 153 \end{cases}$$

$\Downarrow$

**2** ***решите*** систему с помощью определителей

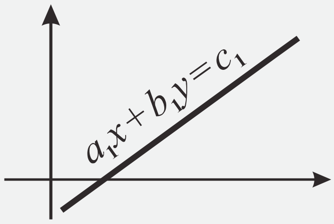
$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 57x + 13y = 153 \end{cases}$$

$\Downarrow$

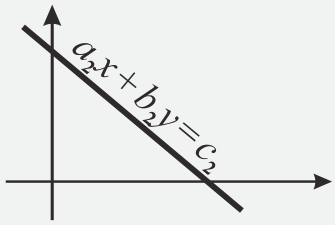
$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}} = \\[2em] y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}} = \end{cases}$$

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

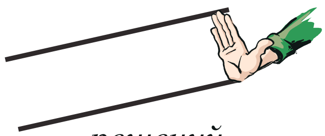
# 9 *Геометрическая интерпретация системы*



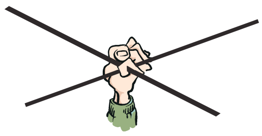

Каждое линейное уравнение с 2-мя неизвестными можно изобразить прямой в системе декартовых координат



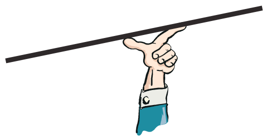

Систему уравнений $S_2$: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ можно решить графически.



*решений нет*

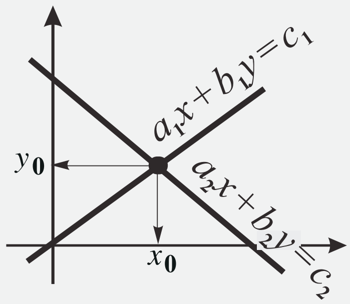


*единственное решение*



*множество решений*

Если эти прямые ***пересекаются***, то есть ***имеют одну общую точку***,

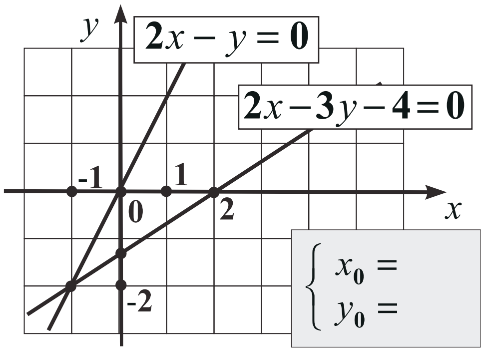



то координаты этой точки $(x_0, y_0)$ являются решением данной системы.

$\Downarrow$ Единственная общая точка $\Longrightarrow$ Только одна пара координат (чисел) $\Longrightarrow$ $\Downarrow$ $\exists!$ (*существует и единственно*) решение системы $S_2$

**1** **ПОСМОТРИТЕ И**

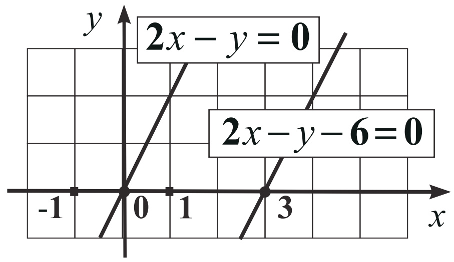
***найдите*** решение системы




$\begin{cases} x_0 = \\ y_0 = \end{cases}$

**ПОСМОТРИТЕ И** **2**

***найдите*** существует ли решение системы



## *Условие единственности решения системы* **10**

Если система $S_2: \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

имеет единственное решение то его можно записать в виде пары отношений определителей 2-го порядка

$$S_2: \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases}$$

где $\Delta \neq \mathbf{0}$

Следовательно,

если

| $\Delta_x$ и $\Delta_y$ | $\Delta$ | $\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$ и $\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ | то система *имеет единственное решение* |
|---|---|---|---|
| *любые числа* | $\neq \mathbf{0}$ | $\dfrac{\textit{любые числа}}{\Delta}$ | |

Например $\left.\begin{matrix} x - y = \mathbf{3} \\ \mathbf{2}x + y = \mathbf{5} \end{matrix}\right\}$

$\Downarrow$

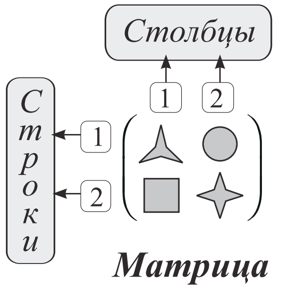
$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \exists! \ \textit{решение}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{5} \end{matrix}} & \begin{matrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{matrix} \end{vmatrix}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$$

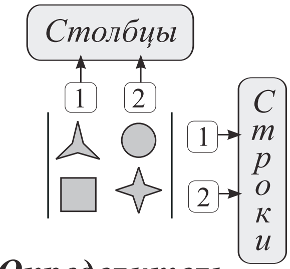
$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{5} \end{matrix}} \end{vmatrix}}{\mathbf{3}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

| **1** МАТРИЦА | Для каждой системы уравнений | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Анализ решений системы*** | составьте и вычислите $\Delta$ | определите, имеет ли система единственное решение | составьте и вычислите | | найдите значение | |
| | | | $\Delta_x$ | $\Delta_y$ | $x$ | $y$ |
| $\begin{cases} \mathbf{3}x + \mathbf{2}y = \mathbf{7} \\ \mathbf{2}x - \mathbf{3}y = -\mathbf{4} \end{cases}$ | | | | | | |
| $\begin{cases} \mathbf{5}x - \mathbf{3}y = -\mathbf{13} \\ \mathbf{7}x + \mathbf{4}y + \mathbf{10} = \mathbf{0} \end{cases}$ | | | | | | |
| $\begin{cases} x - y = -\mathbf{2} \\ \mathbf{4} = -\mathbf{2}x + \mathbf{2}y \end{cases}$ | | | | | | |
| $\begin{cases} \mathbf{3}x - \mathbf{3}y - \mathbf{6} = \mathbf{0} \\ \mathbf{5}y + \mathbf{6}x + \mathbf{10} = \mathbf{0} \end{cases}$ | | | | | | |

# Информационная схема «ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА»




***Матрица размерности* 2 × 2**


***Определитель 2-го порядка***

$$S_2\colon \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

***Главный определитель системы***

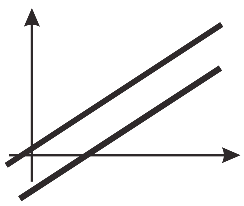
$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}_{\Delta}$$

***Дополнительный определитель системы***

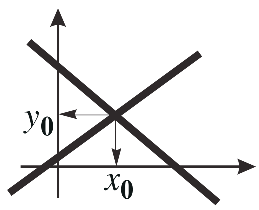
$$\underbrace{\begin{vmatrix} \boxed{c_1} & b_1 \\ \boxed{c_2} & b_2 \end{vmatrix}}_{\Delta x}$$

***Дополнительный определитель системы***

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{c_1} \\ a_2 & \boxed{c_2} \end{vmatrix}}_{\Delta y}$$



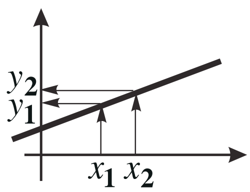
система *не имеет решений*




система имеет *единственное решение* $(x_0; y_0)$

$\Updownarrow$

$\boxed{\Delta \neq 0}$




система имеет *множество решений.*

**1** **ПОСМОТРИТЕ И** ***найдите*** значение элемента матрицы

$$\begin{pmatrix} m & d \\ s & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

$s =$

$m =$

$z =$

$d =$

**2** Докажите, что $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$

**3** **ПОСМОТРИТЕ И** ***составьте*** определитель вида **4**

$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ $\quad$ $\begin{vmatrix} m & s \\ p & o \end{vmatrix}$

$a = \mathbf{2}b = \mathbf{2}c = d = \mathbf{2}$ если $m = o - \mathbf{1} = s + \mathbf{1} = p = \mathbf{2}$

**5** Докажите, что $\begin{vmatrix} x-y & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & x-y \end{vmatrix}$

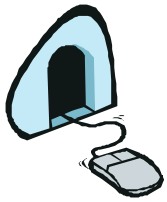
**6** Тест. Найдите значение определителя

| матрицы | **0** | **–1** | **–2** | **–3** | **–4** | **–5** | **–6** | **–7** | **–8** | **–9** | **–10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ | | | | | | | | | | | |
| $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ | | | | | | | | | | | |
| $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ | | | | | | | | | | | |
| $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ | | | | | | | | | | | |
| $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | | | | | | | | | | | |

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

**7** **Решите задачу**

Для компьютеров института приобрели новые мышки:



для 22 ПК учебных аудиторий:

4 упаковки беспроводных
и 2 упаковки с проводом;

для 39 ПК сотрудников:

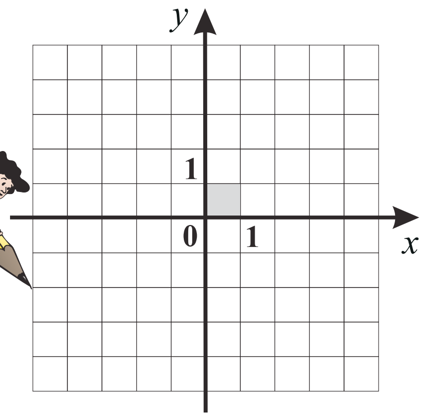
3 упаковки беспроводных
и 6 упаковок с проводом.

Сколько мышек в каждой упаковке?

**8** Тренажер

Постройте прямые, проходящие через пары заданных точек

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(1; -3)$ | $(2; 3)$ |
| 2 | $(0; 3)$ | $(-3; 2)$ |
| 3 | $(-3; -4)$ | $(-2; 2)$ |
| 4 | $(-3; -2)$ | $(0; -1)$ |




***укажите***, система каких уравнений будет иметь

| | |
|---|---|
| единственное решение | |
| не иметь решений | |

**9** **ПОСМОТРИТЕ И**

**10** Тест

| Найдите решения системы | $x =$ 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $y =$ 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| $\begin{cases} 3x+2y=11 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$ | | | | | | | | | | |
| $\begin{cases} 3x+2y=13 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$ | | | | | | | | | | |
| $\begin{cases} 3x+2y=15 \\ 2x+3y=15 \end{cases}$ | | | | | | | | | | |
| $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$ | | | | | | | | | | |