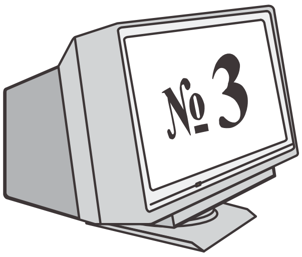
Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

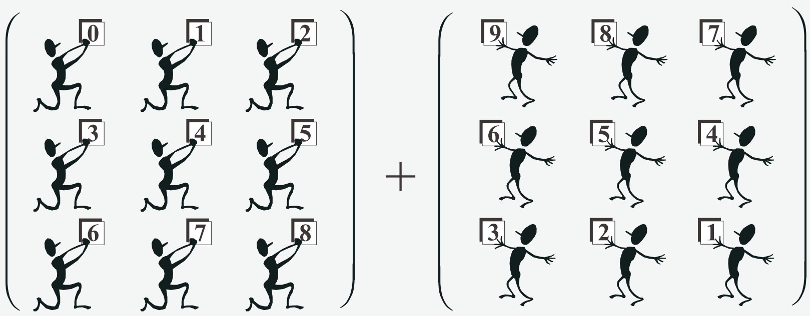


Свойства матриц и определителей

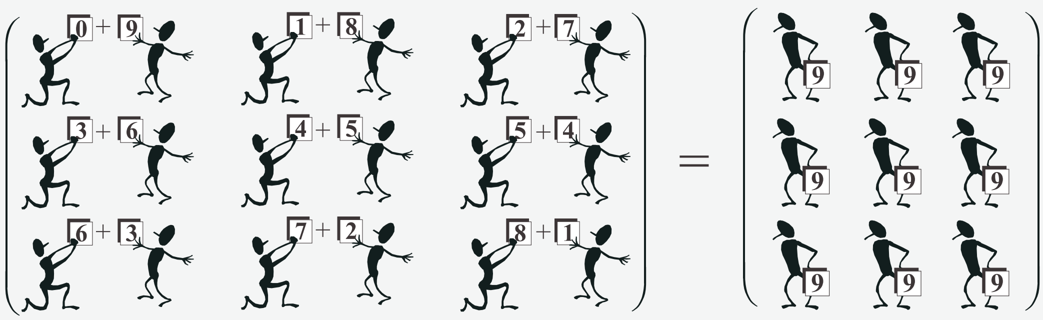
Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

1 *Сложение матриц одинаковой структуры*

$A^{2\times2} + B^{2\times2}$ Операция сложения осуществляется над матрицами одинаковой размерности $A^{3\times3} + B^{3\times3}$



При этом складываются соответствующие элементы матриц



ПОСМОТРИТЕ И

1 ***сложите*** соответствующие элементы матриц

$$\begin{pmatrix} a & o \\ x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & x \\ a & o \end{pmatrix}$$

найдите результат сложения матриц 2

По такому же принципу для матриц одинаковой размерности осуществляется операция вычитания

ПОСМОТРИТЕ И

3 ***заполните*** пропуски в решении

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} =$$

заполните пропуски в результате 4

$$= \begin{pmatrix} \square - 1 & \square - 2 & \square - 3 \\ 6 - \square & 5 - \square & 4 - \square \\ \square - 7 & \square - & 1 - \square \end{pmatrix}$$

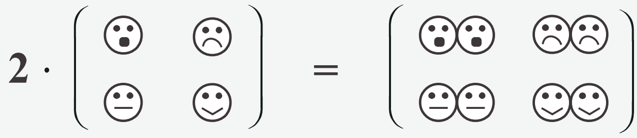
$$= \begin{pmatrix} \square & 6 & \square \\ 2 & \square & -2 \\ \square & -6 & \square \end{pmatrix}$$

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах
и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

2

Умножение матрицы на число

При умножении числа на матрицу
это число умножается
на каждый элемент матрицы



1 Тренажер

	По матрице	найдите значения элементов новой матрицы
1	$A=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$	$\Rightarrow \quad \mathbf{2}A=$
2	$B=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{9} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$	$\Rightarrow \quad \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}B=$
3	$C=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$	$\Rightarrow \quad -\mathbf{3}C=$
4	$D=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-6} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$	$\Rightarrow \quad -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}D=$

Операции сложения и умножения на число
называют
линейными операциями

ПОСМОТРИТЕ И

осуществите
указанные
линейные операции
над матрицам

2 $A-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}B$

3 $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}B-\mathbf{2}A$

$$A=\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

3 *Общий множитель в определителе 2-го порядка*

Выражение вида $a_1\cdot\lambda b_2-\lambda b_1\cdot a_2$ можно записать в виде определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda b_1 \\ a_2 & \lambda b_2 \end{vmatrix}$$

в котором элементы одного его ряда имеют общий множитель

Выражение вида $\lambda\cdot(a_1\cdot b_2-b_1\cdot a_2)$

$$\lambda\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

за который выносится общий множитель

Отсюда правило: общий множитель ряда

$$\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{\lambda} b_1 \\ a_2 & \boxed{\lambda} b_2 \end{vmatrix}=a_1\cdot\lambda b_2-\lambda b_1\cdot a_2=\lambda\cdot(a_1b_2-b_1a_2)=\boxed{\lambda}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

можно вносить в определитель, можно выносить за определитель

Например, вместо того, чтобы считать:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-111} & \mathbf{49} \\ \mathbf{-222} & \mathbf{98} \end{vmatrix}=\mathbf{-111\cdot 99+49\cdot 222=-10989+10878=-111}$$

гораздо удобнее писать и быстрее считать так:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-111} & \mathbf{49} \\ \mathbf{-222} & \mathbf{98} \end{vmatrix}=\mathbf{-111}\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{49} \\ \mathbf{2} & \mathbf{98} \end{vmatrix}=\mathbf{-111\cdot(99-98)=-111}$$

1 Тренажер | Найдите (*устно!*) значение определителя

1. $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-5} \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} \mathbf{-22} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-44} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-28} & \mathbf{-35} \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} \mathbf{-24} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{48} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$

Иногда удобно выносить за определитель сразу по множителю

из двух его столбцов:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{48} \\ \mathbf{3} & \mathbf{24} \end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix} \mathbf{3\cdot 5} & \boxed{\mathbf{24}}\mathbf{\cdot 2} \\ \mathbf{3\cdot 1} & \boxed{\mathbf{24}}\mathbf{\cdot 1} \end{vmatrix}}_{\textit{мысленно}}=$$

$$=\mathbf{3}\cdot\boxed{\mathbf{24}}\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix}=\mathbf{72}$$

из двух его строк:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-36} & \mathbf{-72} \\ \mathbf{4} & \mathbf{10} \end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix} \boxed{\mathbf{-36}}\mathbf{\cdot 1} & \boxed{\mathbf{-36}}\mathbf{\cdot 2} \\ \mathbf{2\cdot 2} & \mathbf{2\cdot 5} \end{vmatrix}}_{\textit{мысленно}}=$$

$$=\boxed{\mathbf{-36}}\cdot\mathbf{2}\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{vmatrix}=\mathbf{-72}$$

2 **ПОСМОТРИТЕ И** ***определите,***

имеет ли система $\begin{cases} \mathbf{11111}\,x-\mathbf{777}\,y=\mathbf{5} \\ \mathbf{33333}\,x+\mathbf{444}\,y=\mathbf{2} \end{cases}$ единственное решение

Общий множитель в определителе 3-го порядка 4

Любой определитель 3-го порядка
можно записать в виде выражения:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{\lambda b_1} & c_1 \\ a_2 & \lambda b_2 & c_2 \\ a_3 & \lambda b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\lambda b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \lambda b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - \lambda b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Любое выражение вида можно записать как определитель

$$\lambda \cdot \left(-b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \right) = \boxed{\lambda} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Отсюда правило:

общий множитель
любого ряда
можно выносить
за знак определителя
3-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \boxed{\lambda} a_2 & \boxed{\lambda} b_2 & \boxed{\lambda} c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \boxed{\lambda} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Например:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{-9} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} (-3)\cdot 3 & 0 & 1 \\ (-3)\cdot 2 & 1 & 0 \\ (-3)\cdot 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{мысленно}} = (-3) \cdot \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot \left[3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= (-3) \cdot [3 + 2 - 1] = -12$$

Иногда удобно применять свойство нуля:
любое число, умноженное на **0**, дает **0**.

Например:

$$\begin{vmatrix} 27 & 54 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -6 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 27\cdot 1 & 27\cdot 2 & 27\cdot 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\cdot 1 & -2\cdot 2 & -2\cdot 3 \end{vmatrix}}_{\text{мысленно}} = -27 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -54 \cdot 3 = -162$$

1 **ПОСМОТРИТЕ И**

найдите значение определителя

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 15 \\ 15 & 5 & 0 \\ 0 & 15 & 5 \end{vmatrix}$$

2 **ПОСМОТРИТЕ И**

решите уравнение

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x \\ 1 & x & 1 \\ x^2 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

5 *Пропорциональность рядов определителя*

Определитель с одинаковыми рядами равен **0**

$$\begin{array}{r} \textit{1-й ряд} \\ \textit{2-й ряд} \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} \boxed{a_1 \quad b_1 \quad c_1} \\ \boxed{a_1 \quad b_1 \quad c_1} \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 \end{vmatrix} = a_3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}_{0} - b_3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}_{0} + c_3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}_{0} = \mathbf{0}$$

$$\begin{array}{ccc} & \textit{1-й ряд} & \textit{2-й ряд} \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda c_1 & c_1 \\ a_2 & \lambda c_2 & c_2 \\ a_3 & \lambda c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{0} = \mathbf{0}$$

Определитель с пропорциональными рядами также равен **0**

С помощью этих правил иногда можно устно вычислить значение выражений с определителями

$$\begin{vmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{0} & \mathbf{26} \\ \mathbf{26} & \mathbf{13} & \mathbf{52} \\ \mathbf{39} & \mathbf{26} & \mathbf{78} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{17} & \mathbf{19} \\ \mathbf{76} & \mathbf{77} & \mathbf{78} \\ \mathbf{76} & \mathbf{77} & \mathbf{78} \end{vmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{vmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{0} & \mathbf{13 \cdot 1} \\ \mathbf{26} & \mathbf{7} & \mathbf{26 \cdot 2} \\ \mathbf{39} & \mathbf{5} & \mathbf{39 \cdot 3} \end{vmatrix}}_{\substack{\textbf{1}\text{ и }\textbf{3}\text{ столбцы} \\ \text{пропорциональны}}} + \underbrace{\begin{vmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{17} & \mathbf{19} \\ \mathbf{76} & \mathbf{77} & \mathbf{78} \\ \mathbf{76} & \mathbf{77} & \mathbf{78} \end{vmatrix}}_{\substack{\textbf{2}\text{ и }\textbf{3}\text{ строки} \\ \text{равны}}}}_{\textit{мысленно}} = \mathbf{0}$$

1 Тест Найдите пропорциональные ряды определителя	столбцы				строки			
	1 и 2	1 и 3	2 и 3	все	1 и 2	1 и 3	2 и 3	все
$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 3 \end{vmatrix}$								
$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 8 & -8 & 3 \end{vmatrix}$								
$\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ a & 3a & a \\ a & 9 & 3 \end{vmatrix}$								
$\begin{vmatrix} c & 2c & 4c \\ 2c & 8c & 16 \\ 4c & 16 & 32 \end{vmatrix}$								
$\begin{vmatrix} x^3 & 2x^2 & 4x \\ 4x^2 & 2x & 0 \\ 1 & x & 2x \end{vmatrix}$								

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

Перестановка соседних рядов определителя

6

Иногда для удобства вычислений полезно переставлять местами соседние ряды определителя 2-го порядка:

$$\begin{array}{cc} \textit{1-й ряд} & \textit{2-й ряд} \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \textit{2-й ряд} & \textit{1-й ряд} \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2 = -\left(a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 \right) = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

При этом исходный определитель меняет знак

Это же правило действует и для определителей 3-го порядка:

$$\begin{array}{ccc} & \textit{2-й ряд} & \textit{3-й ряд} \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{b_1} & \boxed{c_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} & \textit{3-й ряд} & \textit{2-й ряд} \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{ccc} & \textit{2-й ряд} & \textit{3-й ряд} \end{array}$$
$$= -\left(a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right) = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Это правило можно употреблять для доказательства равенств определителей.

Например, чтобы выяснить справедливо ли равенство

$$\begin{vmatrix} a & \mathbf{35} & \mathbf{14} \\ \mathbf{52} & \mathbf{51} & a^3 \\ \mathbf{21} & a^2 & \mathbf{15} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{52} & \mathbf{51} & a^3 \\ \mathbf{21} & a^2 & \mathbf{15} \\ a & \mathbf{35} & \mathbf{14} \end{vmatrix}$$

можно не раскрывать оба определителя, а последовательно поменять местами соседние ряды одного из них:

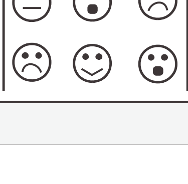
$$\begin{vmatrix} a & \mathbf{35} & \mathbf{14} \\ \mathbf{52} & \mathbf{51} & a^3 \\ \mathbf{21} & a^2 & \mathbf{15} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{52} & \mathbf{51} & a^3 \\ a & \mathbf{35} & \mathbf{14} \\ \mathbf{21} & a^2 & \mathbf{15} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{52} & \mathbf{51} & a^3 \\ \mathbf{21} & a^2 & \mathbf{15} \\ a & \mathbf{35} & \mathbf{14} \end{vmatrix}$$

ПОСМОТРИТЕ И

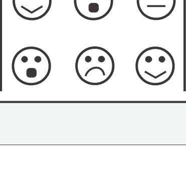
1 **2**

найдите,

равны или нет



эти определители



эти определители

7

Сумма элементов ряда определителя

Для упрощения вычислений используется прием разложения определителя

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ \boxed{a_3+\lambda \quad b_3+\beta \quad c_3+\gamma} \end{vmatrix} =$$

по сумме элементов какого-либо его ряда.

Это возможно, так как

$$= \boxed{(a_3+\lambda)} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \boxed{(b_3+\beta)} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \boxed{(c_3+\gamma)} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

при разложении определителя

и раскрытии скобок в соответствущем порядке

$$= a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \beta \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \gamma \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

получется сумма более простых определителей

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda & \beta & \gamma \end{vmatrix} =$$

Например:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{123} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{234} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{345} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{100} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{200} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{300} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{20} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{30} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{40} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{100} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{vmatrix}}_{\mathbf{0}} + \mathbf{10} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{vmatrix} =$$

$$= -\mathbf{10} \cdot \mathbf{5} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{vmatrix} - \mathbf{5} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} \end{vmatrix} =$$

$$= -\mathbf{50} \cdot \mathbf{2} - \mathbf{5} \cdot \mathbf{4} = \mathbf{-120}$$

1 ПОСМОТРИТЕ И

вычислите,
заполняя пропуски в разложении определителя на слагаемые элементов ряда

$$\begin{vmatrix} \boxed{\mathbf{78}} & \mathbf{65} \\ \boxed{\mathbf{22}} & \mathbf{19} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{00} & \mathbf{65} \\ \mathbf{00} & \mathbf{19} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{80} & \square \\ \mathbf{20} & \square \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{65} \\ \mathbf{2} & \mathbf{19} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{00} & \mathbf{60} \\ \mathbf{00} & \mathbf{10} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \square & \mathbf{5} \\ \square & \mathbf{9} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \square & \mathbf{60} \\ \square & \mathbf{10} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{80} & \square \\ \mathbf{20} & \square \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{7} & \square \\ \mathbf{2} & \square \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{9} \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{1000} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{vmatrix} + \mathbf{100} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} \end{vmatrix} + \mathbf{100} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix} + \mathbf{10} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{9} \end{vmatrix} + \mathbf{10} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{9} \end{vmatrix}$$

Специфика операций над определителями

8

Числовой множитель можно вносить
в разные ряды определителя:

$$\boxed{\lambda}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & \lambda b_3 & \lambda c_3 \end{vmatrix}$$

Внимание! На число λ умножаются элементы только одного ряда

Например:

$$105\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{17/105} & \mathbf{7} & \mathbf{0} \\ \mathbf{13/5} & \mathbf{15} & \mathbf{13} \\ \mathbf{17/15} & \mathbf{49} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{105\cdot 17/105} & \mathbf{7} & \mathbf{0} \\ \mathbf{105\cdot 13/5} & \mathbf{15} & \mathbf{13} \\ \mathbf{105\cdot 17/15} & \mathbf{13} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \mathbf{17} & \mathbf{7} & \mathbf{7\cdot 0} \\ \mathbf{13\cdot 21} & \mathbf{15} & \mathbf{13} \\ \mathbf{7\cdot 17} & \mathbf{7\cdot 7} & \mathbf{7\cdot 1} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{пропорциональность} \\ \mathbf{1}\text{ и }\mathbf{3}\text{ строк}}} = \mathbf{0}$$

Определители, отличающиеся только одним рядом,
можно складывать:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & b_1 & c_1 \\ \beta & b_2 & c_2 \\ \gamma & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+\alpha & b_1 & c_1 \\ a_2+\beta & b_2 & c_2 \\ a_3+\gamma & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Внимание! Складываются только элементы разных рядов, стоящие на соответствующих местах

$$\begin{vmatrix} \mathbf{200} & \mathbf{600} & \mathbf{800} \\ \mathbf{12} & \mathbf{23} & \mathbf{34} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{200} & \mathbf{600} & \mathbf{800} \\ \mathbf{8} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \mathbf{200} & \mathbf{600} & \mathbf{800} \\ \mathbf{20} & \mathbf{30} & \mathbf{40} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{пропорциональны} \\ \mathbf{1}\text{ и }\mathbf{2}\text{ строки}}} = \mathbf{0}$$

1 Докажите, что

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & k \\ x & y & z \end{vmatrix} + \mathbf{k}\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & r & s \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m+\mathbf{k}\cdot p & n+\mathbf{k}\cdot r & k+\mathbf{k}\cdot s \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

9 *Формулы Крамера*

$$S_2: \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad S_3: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta};\ y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \qquad \left(x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta};\ y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta};\ z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta} \right)$$

Формулы нахожения решения системы линейных уравнений с помощью определителей называют **формулами Крамера**

Для того, чтобы правильно решить вопрос о существовании и количестве решений системы необходимо учитывать значения отношений дополнительных определителей системы к его главному определителю:

ОТНОШЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

<table>
<tr><th>Δ</th><th>Δ_i</th><th>$\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$</th><th colspan="2">Логический смысл значения отношения</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\neq 0$</td><td>$\neq 0$</td><td>$\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$</td><td rowspan="2">Решение есть и только одно</td><td rowspan="2">$\exists!$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$\dfrac{0}{\Delta}$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>$\dfrac{0}{0}$</td><td>Решение есть, но не единственно</td><td>$\exists$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$\neq 0$</td><td>$\dfrac{\Delta_i}{0}$</td><td>Решения нет вообще</td><td>$\overline{\exists}$</td></tr>
</table>

1 Тест

Определите условия, при которых система S_3										
	Δ	$=0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$	$=0$	$=0$	$\neq 0$
	Δ_x	$=0$	$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$=0$	$=0$	$\neq 0$	$\neq 0$
	Δ_y	$=0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$
	Δ_z	$=0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$	$=0$	$=0$	$=0$
имеет единственное решение										
имеет бесконечно много решений										
не имеет решений										

Следствия правила Крамера

10

Для S_2, имеющей решение:

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta};\; y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Для S_3, имеющей решение:

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta};\; y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta};\; z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

если

$\Delta \neq \mathbf{0}$

$\Downarrow$

Правило Крамера

$\Downarrow$

$\exists!$ решение

$\Delta =$ –

Все $\Delta_i = \mathbf{0}$ $\Downarrow$ $\exists$ решения

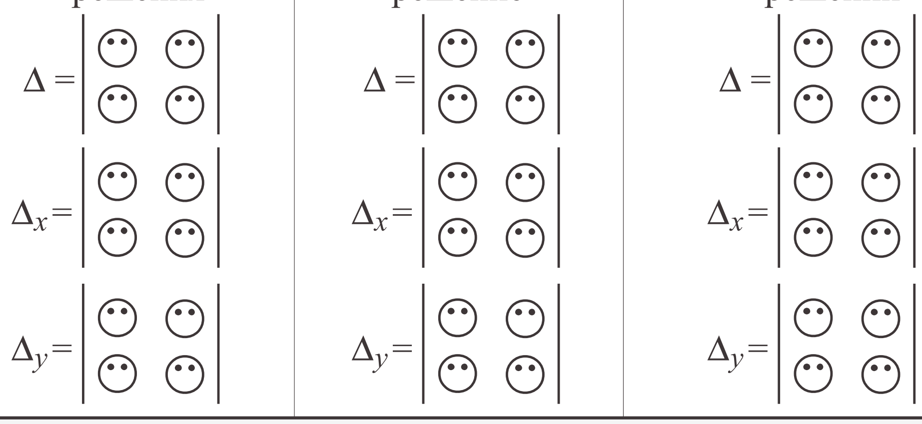
Хотя бы один $\Delta_i \neq \mathbf{0}$ $\Downarrow$ $\overline{\exists}$ решений

Следствия

1 Тренажер

Из фигурок ☹ 😐 😮 ☺ составьте главный и дополнительные определители системы 2-х линейных уравнений с 2-я неизвестными так, чтобы эта система

1	2	3
не имела решения	имела единственное решение	имела бесконечно много решений



ПОСМОТРИТЕ И

2

$$\begin{cases} 9x + 2y - 5z = -3 \\ -2x + 3y + 4z = 2 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

определите, сколько определителей системы

3

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 5 \\ -x + y - z = -5 \end{cases}$$

равно нулю

не равно нулю

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах
и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

Информационная схема «СВОЙСТВА МАТРИЦ И ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ»

Линейные операции над матрицами

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+x_1 & b_1+y_1 & c_1+z_1 \\ a_2+x_2 & b_2+y_2 & c_2+z_2 \\ a_3+x_3 & b_3+y_3 & c_3+z_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cdot a_1 & \lambda\cdot b_1 & \lambda\cdot b_1 \\ \lambda\cdot a_2 & \lambda\cdot b_2 & \lambda\cdot b_2 \\ \lambda\cdot a_3 & \lambda\cdot b_3 & \lambda\cdot b_3 \end{pmatrix}$$

Свойства определителей

Перестановка соседних рядов

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \boxed{-} \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Пропорциональность соседних рядов

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \lambda b_1 \\ a_2 & b_2 & \lambda b_2 \\ a_3 & b_3 & \lambda b_3 \end{vmatrix}}_{0} \qquad \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \lambda a_1 & \lambda b_1 \end{vmatrix}}_{0}$$

Линейные операции над определителями

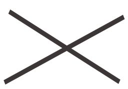
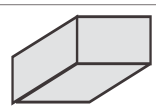
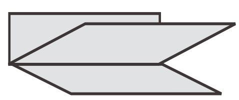
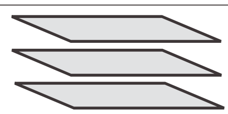
Вынесение общего множителя элементов ряда

$$\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{\lambda}\, b_1 & c_1 \\ a_2 & \boxed{\lambda}\, b_2 & c_2 \\ a_3 & \boxed{\lambda}\, b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \boxed{\lambda} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \boxed{\lambda}\, a_2 & \boxed{\lambda}\, b_2 \end{vmatrix} = \boxed{\lambda} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Разложение на слагаемые по сумме элементов ряда

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 + \beta_1 & c_1 + \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Прямые	Формулы Крамера в решениях системы			Плоскости
	$\exists!$	$\dfrac{\Delta_i}{\Delta \neq 0}$	$\exists!$	
	$\exists$	для всех i: $\dfrac{\Delta_i = 0}{\Delta = 0}$	$\exists$	
	$\overline{\exists}$	хотя бы для одного i: $\dfrac{\Delta_i \neq 0}{\Delta = 0}$	$\overline{\exists}$	

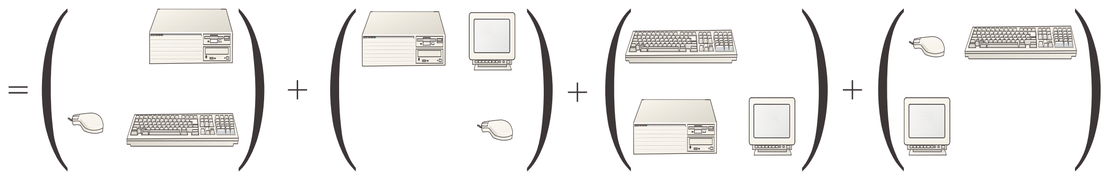
1 Тест

Найдите определитель, у которого

можно вынести множитель	$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \mathbf{1} \\ \alpha & \alpha & \gamma \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \beta \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \mathbf{1} \\ \gamma & \gamma & \gamma \\ \alpha & \alpha^2 & \beta \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \mathbf{0} & \gamma \\ \alpha^3 & \beta^2 & \mathbf{1} \\ \alpha^4 & \beta^3 & \mathbf{0} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \alpha\beta & \alpha\gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \alpha\beta & \gamma \\ \beta\gamma & \alpha\beta & \alpha\gamma \end{vmatrix}$
α				
α^2				
β				
β^2				
γ				

2 **ПОСМОТРИТЕ И**

завершите
выполнение заказов
четырех пользователей так,
чтобы получилось
четыре укомплектованных ПК



3 Докажите, что

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & x & \mathbf{0} \\ x & \mathbf{1} & x \\ \mathbf{0} & x & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

4 Докажите, что

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x \\ \mathbf{1} & x & \mathbf{1} \\ x^2 & x & x^2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

5 Докажите, что

$$\begin{vmatrix} 2x & 2x & 0 \\ 4x^2 & 0 & 4x^2 \\ 0 & 8x^3 & 8x^3 \end{vmatrix} \neq 0$$

6

ПОСМОТРИТЕ И

впишите
пропущенные слова

$$\begin{vmatrix} \text{смекалка} & \text{незнание} \\ \text{лень} & \text{труд} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{упорство} & \text{невнимание} \\ \text{лень} & \text{труд} \end{vmatrix} =$$

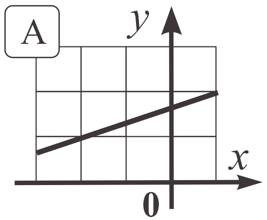
$$= \begin{vmatrix} \boxed{} + \text{смекалка} & \text{незнание} + \boxed{} \\ \boxed{} & \text{труд} \end{vmatrix}$$

$$= (\boxed{} + \boxed{}) \cdot \text{труд} - (\boxed{} + \boxed{}) \cdot \text{лень} = \mathbf{5}$$

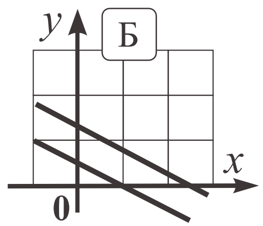
7 **8**

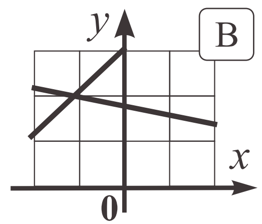
ПОСМОТРИТЕ И

укажите
геометрическую интерпретацию системы.



главный определитель которой равен **0**





все дополнительные определители которой равны **0**

9 Докажите, что

$$\begin{vmatrix} a & x_1+y_1 & c \\ b & x_2+y_2 & n \\ m & x_3+y_3 & p \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ m & n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

10 Матрица

Для каждой системы уравнений составьте

	расширенную матрицу системы	главный определитель системы	дополнительные определители системы			найдите решение системы
			D_X	D_Y	D_Z	
$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 5x-7y=-9 \end{cases}$						
$\begin{cases} x+3y=11 \\ 8x-10y=22 \end{cases}$						
$\begin{cases} 2x-y+7z=-13 \\ 7x-3y+2z=-1 \\ x+y-3z=5 \end{cases}$						
$\begin{cases} x-y+4z=-27 \\ 5x+z=-20 \\ 9y+6x=6 \end{cases}$						
$\begin{cases} 4x-y-3z=11 \\ 2x-7y+3z=-7 \\ -y-z=1 \end{cases}$						

Использованная литература

1. Резник Н.А., Дымская А.П. Определители и матрицы: Визуальный конспект студента-технолога (учеб пособие) – Мурманск, МГТУ, 1997. – 56 с.

2. Резник Н.А. Начальные представления об определителях и матрицах: Визуальный конспект-практикум (учеб. пособие) – СПб.: "Информатизация образования", 2002. – 88 с.

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

Компьютерный набор Н.А. Резник, Н.С. Неделько

Утверждено к печати Редакционно-издательским Советом
Мурманского гуманитарного института Института
Лицензия ИД № 01684 от 05.05.2000г.
Подписано к печати с оригинал-макета 22.09.2003 г.
Тираж 60 экз.