

§2. Способы представления учебной математической информации

Исходным толчком для начала мыслительной деятельности учащегося является предъявление ему некоторой информации. Это может быть объяснение или вопрос учителя, напечатанный учебный текст, чертеж или рисунок и т.д. Разумеется, каждый раз все это предлагается, для того чтобы ученик осмыслил данные, обнаружил связи между ними, осуществил необходимые преобразования и, в конечном итоге, получил искомый результат. Составляющие подобного процесса отчетливо отражает определение, данное А.К. Тихомировым в книге «Информационные и психологические теории мышления»: «Информация – это... система знаков или символов; переработка информации – различного рода преобразования этих знаков по определенным правилам... Информационная модель... – сведения о задаче, представленные или накапливаемые (в виде нового описания) в памяти решающей системы» [183, с. 329]. Здесь мы ориентируемся на строго определенный вид информации – учебную знаковую информацию, предназначенную и направленную на усвоение содержания учебной теории и ее практических приложений. Учебная знаковая информация, которая также есть система знаков (слов, формул, иллюстраций), призвана помочь учащимся воспринять материал, побудить их к поискам решений возникающих проблем. Это особенно важно – мы должны ориентироваться на значительные усилия самого ученика и не столько снабжать его запасом сведений, сколько организовывать, представлять возможности для их получения. Обсудим те “элементарные” средства, с помощью которых передаются и воспринимаются учебные знания.

Доминирующим способом введения учебной информации является вербальный. При этом способе учащийся слушает или читает описание, включающее математические, химические, музыкальные или иные термины и их обозначения. Законченный фрагмент информации, предъявленной вербальным об-

разом, мы для краткости будем называть ТЕКСТОМ. Сам способ такого введения данных здесь будет именоваться также словесным или описательным.

Другим способом представления учебной знаковой информации является так называемый визуальный или образный, наглядный, геометрический способ. При данном виде информационного сообщения его главная часть сосредоточена на рисунке, графике, наглядном пособии, экране. Это может быть один кадр, последовательность изображений или сложно организованная модель. Основной упор во всех случаях делается на зрительно воспринимаемый образ. Для краткости фрагмент информации, предъявляемый визуально, будем называть РИСУНКОМ (изображением, картинкой, иллюстрацией).

Многие науки имеют еще один специфический способ записи своего содержания, который мы называем формульным (синонимы – символный, аналитический, знаковый). Он отличается от геометрического тем, что использует лишь стандартные обозначения из некоторого алфавита (списка) и имеет четкие правила организации. Ввиду особой важности различных формул для всех предметов естественно-научного цикла, а также для ряда гуманитарных дисциплин, мы выделяем этот вид записи особо. Совокупность символов, фиксирующую связи между отдельными объектами предлагаемой информации с помощью общепринятых или специально введенных (например, стенографических) знаков, будем называть ФОРМУЛОЙ.

В процессе обучения все три способа подачи информации рассматриваются нами как относительно равноправные, взаимозаменяемые и постоянно действующие. Их можно назвать также языками предъявления (задания, введения) учебной информации. Приведем пример введения одной и той же математической информации на всех трех языках. Развернутые наименования теорем представляют собой пример вербального способа. Так, теорему “Признак скрещивающихся прямых” можно предложить в развернутом виде: «Теорема о двух прямых, одна из которых лежит в заданной плоскости, а вторая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой».

Данную информацию можно представить в виде формулы (цепочки формул), используя принятые обозначения: $a \subset \alpha$, $b \cap \alpha = M$, $M \notin a$. Те же самые сведения можно представить с помощью рисунка (рис. 4).

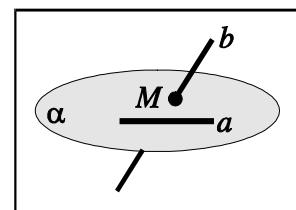


Рис. 4

2.1. Геометрический способ

Геометрический способ предъявления учебной информации обладает богатыми возможностями, поскольку, как констатирует Колерс, «... восприятие не является результатом простой поточечной передачи изображения из рецепторов в мозг. При восприятии некоторой картины человек группирует одни ее части с другими частями, так что вся картина в целом воспринимается как нечто определенным образом организованное» [82, с. 26].

С помощью рисунка можно:

- ввести понятие, опираясь на визуальное восприятие;
- интерпретировать определение понятия;
- визуально представить термин;
- сопоставить слово и образ;
- вывести наружу скрытые закономерности;

Недаром многие преподаватели используют на уроках различные мнемонические процедуры и конструкции. Например, многие учащиеся со слабой математической подготовкой плохо помнят значения функций углов 0° , 30° , 45° , 60° , 90° . Специально оформленная таблица поможет им (рис. 5).

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Рис. 5

- представить понятие с помощью специального образа;
- изложить наглядно трудно воспринимаемые положения учебной теории;
- показать связи между понятиями;
- проследить ход рассуждений, приводящих к искомому заключению.

На рис. 134 (см. приложение, с. 384, слева) ход рассуждений представлен различными средствами: оттенком (цветом), акцентом на симметрию (указателями, стрелками), рядом чисел (столбиком цифр). Анализируя этот рисунок, учащиеся вполне могут самостоятельно сделать вывод: для острых углов $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.

- заменить абстрактные выкладки наглядным представлением факта;
- объединить факты учебной теории в единый зрительный образ;
- выявить подсказку к решению задачи;

Например: “Сравнить объемы пирамид, при условии равенства их оснований”. Подсказка здесь дается в тексте и на иллюстрациях (рис. 6).

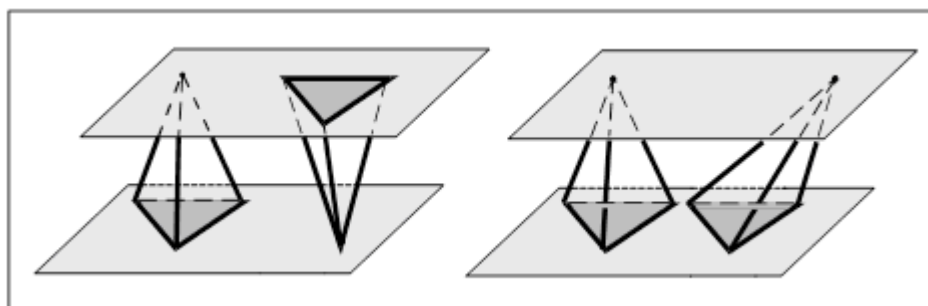


Рис. 6

- наглядно проиллюстрировать формулу.

Широко известна геометрическая интерпретация одной из формул сокращенного умножения (квадрата суммы двух чисел): $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Подобные визуальные идеи (модели) можно распространить и на большее число составляющих (рис. 7, внизу).

Одним из главных отличий рисунка (как средства предъявления учебной информации) является неопределенность поставленной задачи. «Ни само техническое умение создавать изображения, ни достоверная реальность образов не дают гарантий, что материал передает именно то, что нужно» [4, с. 168]. Рисунок нуждается в комментариях. Это может быть и описание (заголовок к предлагаемой иллюстрации), и формула, фиксирующая существенные моменты содержания.

Рисунок, несомненно, есть один из важнейших способов передачи знаний. Можно сказать, что хорошо составленные иллюстрации удачно “кодируют” знания, визуальные доводы служат “сигналами”. В таком случае рисунки приобретают значение, равное символическим и описательным способам изложения. Л.С. Выготский в статье «История развития высших психических функций» пишет: «Мы видим, ... что рисование является графической речью, возникающей на основе словесной речи. Схемы, отличающие первые детские рисунки, в этом смысле напоминают нам словесные понятия, которые сообщают только существенные признаки предметов». Игнорируя или недооценивая возможности изображений, предлагая ученикам небрежные или неквалифицированно выполненные иллюстрации, мы теряем многое.

Приведем достаточно красноречивый пример из статьи «Двойственная природа разума: интуиция и интеллект» [6, с. 22-42]. «Известная фигура Пифагора красива в том смысле, что дает ясное зрительное представление о тех отношениях, которые предстоит изучить – это треугольник, лежащий в центре фигуры, и три квадрата, приложенные к его сторонам (рис. 7-а, вверху). Данная фигура, отображающая ситуацию решения математической проблемы, должна храниться в голове учащегося до самого конца процесса доказательства, оставаясь непосредственно связанной с каждым шагом доказательства до тех пор, пока учащийся не поймет, о чем идет речь. Однако вместо этого происходит нечто прямо противоположное.

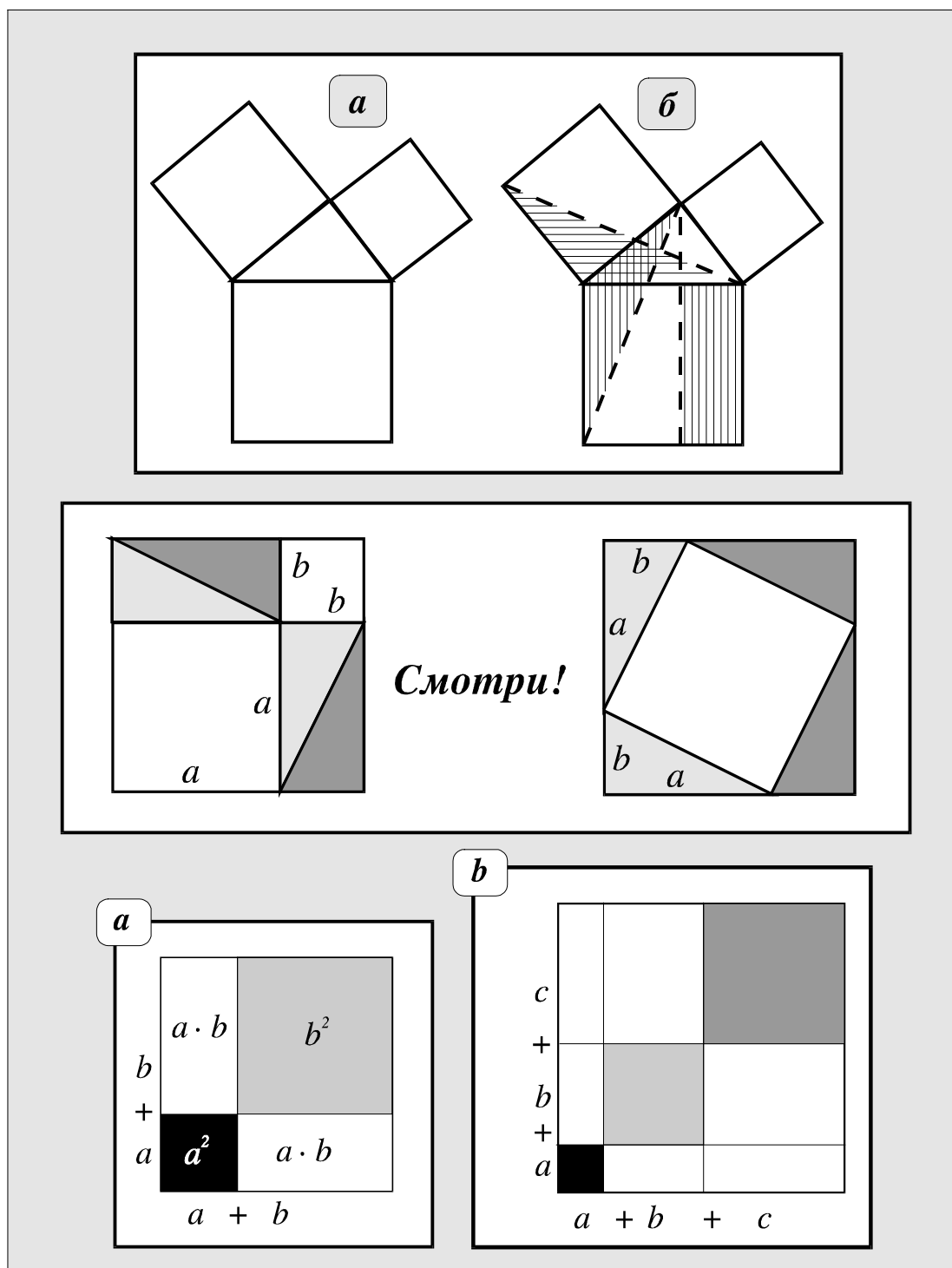


Рис. 7

Обычно учителя проводят три вспомогательные прямые, которые, словно пущенный в окно камень, разбивают структуру исходной проблемной ситуации или, точнее, вероятно, было бы сказать, перечеркивают изображение, которое предназначалось ученику для работы (рис. 7-б, вверху). Это дополнительное

построение, в ходе которого каждая из сторон прямоугольного треугольника как-то некрасиво соединяется с некоторой стороной одного из квадратов, образуя основание нового треугольника, портит изначальный замысел, воплощенный в фигуре Пифагора. Под действием этих новых загадочных форм исходный рисунок исчезает, но лишь для того, чтобы снова неожиданно возникнуть... в конце доказательства. Доказательство это весьма остроумно, но крайне некрасиво» [6, с. 35].

Что же происходит в мышлении учащегося, при изучении доказательств, «в которых происходит единое и согласованное изменение исходной конфигурации»? «Как и в первом случае, произошла перестройка первоначальной структуры, изменившая проблемную ситуацию, однако здесь перегруппировка произведена над структурой в целом. Она оставляет исходный рисунок видимым прямо на новом, так что сопоставление двух фигур – исходной и построенной – может быть произведено интуицией. Перед нами доказательство, которое математики называют “красивым”» [6, с. 38].

Замечательное доказательство теоремы Пифагора было известно еще в Древней Индии. Для этого в квадрате со стороной $a + b$ изображали четыре прямоугольных треугольника с катетами длин a и b . После этого писали только одно слово: “Смотри!” (рис. 7, в центре).

Особой формой рисунка является чертеж – самое “жесткое” средство геометрического способа предъявления информации. По мнению Д. Пойя “точные чертежи играют ... такую же роль, как точные измерения в физике ... точный чертеж может натолкнуть на открытие геометрической теоремы, даже весьма тонкой” [133, с. 77]. На основе многолетних наблюдений и многочисленных экспериментов мы убедились в том, что выполнение учащимся рисунка (чертежа) иногда успешно заменяет пространные объяснения, ускоряет процесс ввода в содержание задачи, облегчает восприятие нового незнакомого материала. Более того, «искусство изображения – это искусство мышления, призванное подчеркнуть важность человеческой способности видеть. Искусство изображения имеет

целью, с помощью чисто визуального восприятия внешнего мира и с помощью одного лишь зрения, усовершенствовать зримое» [122, с. 90].

В математике наиболее распространенными и важными случаями применения чертежа являются графики элементарных функций. Сочетание точности в соблюдении их пропорций и конфигурации с предельной ясностью исполнения должно быть обязательным. Например, геометрическое представление кубической функции требует внимания к ее поведению в окрестности нуля. График функции $y = x^3$ необходимо строить так, чтобы касательная в ее особой точке визуально воспринималась строго горизонтальной. Для восприятия деталей графика полезны: “точки опоры” в виде отдельных цифровых обозначений на осях координат, выделение самой кривой среди всех прочих вспомогательных линий и т.д. «Математические чертежи, подобно произведениям живописца или поэта, должны быть красивыми. Идеи, как и краски или слова, должны гармонично соответствовать друг другу. Красота является ... пробным камнем; безобразной математике нет места в этом мире» [208, с. 28].

Несмотря на то, что полезность рисунка в обучении школьным предметам неоспорима, существуют определенные трудности из-за несогласованности в понимании его роли и терминологии. Так, к примеру в учебнике географии постоянно предлагается разграничивать понятия: рисунок, фотография и чертеж; в учебниках же химии и физики подобное разграничение между рисунком и чертежом практически отсутствует. В дальнейшем мы еще раз вернемся к этому вопросу. Здесь же подчеркнем, мы понимаем термин “рисунок” как то, что можно увидеть, обозреть, воспринять как некоторый конкретный факт.

Термин “образ” имеет несколько толкований. Художественный образ трактуется как «обобщенное художественное отражение действительности, облеченное в форму конкретного, индивидуального явления» [125], что бесспорно может применяться в обучении гуманитарных и естественнонаучных дисциплин (см. приложение, с. 379, рис. 129; с. 393-394, рис. 143-144). Преследуя цели активизировать и совершенствовать визуальное мышление учащихся в процес-

се обучения математике, мы принимаем интерпретацию данного термина и как «вид, толкование; живое, наглядное представление о ком-(чем)-нибудь» [см. там же] и вводим понятие визуального стандарта (стандартного образа или просто стандарта), который более подробно будет освещен во второй главе данной диссертации.

Заканчиваем мы обзор свойств рисунка как средства предъявления учебной знаковой информации и его роли в постижении ее содержания словами Гильберта [40, с. 6]: «Руководствуясь непосредственным созерцанием, мы сможем уяснить многие... факты... и благодаря этому... изложить в наглядной форме методы исследований и доказательств».

2. 2. Аналитический способ

Под аналитическим (формульным, символическим) заданием учебной информации понимается запись содержания фрагмента информации с помощью значков и букв. Следует разграничивать средства данного способа предъявления информации на символически формульный и символически наглядный.

К символически формульным отнесем такие средства оформления учебного текста, которые мало ассоциируются с наглядным представлением учащихся. Например, алгебраические выкладки типа $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$ или $|x| = \begin{cases} x, & \text{при } x \geq 0 \\ -x, & \text{при } x < 0 \end{cases}$; знаковая “терминология” теории функций, подобная $x \in D(f)$ или $y = f(x)$; теоретико-множественная символика типа $A \cap B \neq \emptyset$ или $N \cup M = M$; физические и химические символы (например, $\vec{F}$ и H_2O); нотные и функциональные обозначения музыкальной теории ( или D_{4_3} – доминантовый квартсекстаккорд) и т.п. Действительно, подобные символы (или цепочки их) плохо сопоставляются со зрительными и слуховыми представлениями. Они относятся к искусственно созданным

обозначениям. Их написание и правила организации нуждаются в специальном запоминании, а применение – в соответствующей “тренировке”.

К символически наглядным средствам предъявления учебной знаковой информации отнесем символы, которые своими начертаниями (формой) дают возможность визуального восприятия их смысла. Таким образом, символически-наглядные средства есть условные знаки – чувственные образы, которые имеют чувственно-наглядную форму и видимую связь между этой формой и смыслом, который они выражают. В математике к ним можно причислить знаки монотонности, некоторые отношения между основными понятиями геометрии и т.д. Например, символ “ $\uparrow$ ” в сочетании с обозначением функции ($f \uparrow$) дает представление о движении вверх (слева направо), возрастании.

Разделяя все средства символьного способа предъявления информации на упомянутые основные группы, можно изыскать возможность для лучшего запоминания и усвоения области их применения. Не страшно, если учитель самостоятельно введет в употребление несколько “личных” понятных символов. Однако при этом необходимо проявлять чувство меры. Важно также, чтобы ученик в любой момент мог письменно или устно расшифровать каждое из нестандартных обозначений. В большинстве случаев “личные” символы предполагается употреблять для сокращения записей. (Широко известны знаки подобные:] – пусть, дано; (•) – точка и т.п..

По аналогии с чертежом отметим особые свойства символических образований сложной конструкции типа “многоэтажные” дроби, формулы логарифмической функции, символические задания сложной функции в математике, блок-схемы типа “цикл” и “ветвление” в информатике, структурные связи между химическими элементами в органике... Все “жесткие” случаи каждого из языков предъявления учебной знаковой информации будут обсуждаться подробно в следующих разделах. Здесь же на одном примере покажем, какие ошибки может делать ученик при восприятии знаковых структур (рис. 8, слева). Правильность понимания содержания подобных образований зависит от четкости напи-

сания – соблюдения “уровней” и “этажей” в расположении “деталей”, составляющих формулу. Требуется научить учащихся анализировать “иерархию” элементов, входящих в такие формулы (рис. 8, справа), что также является одним из объектов методики и будет освещено во второй главе диссертации.

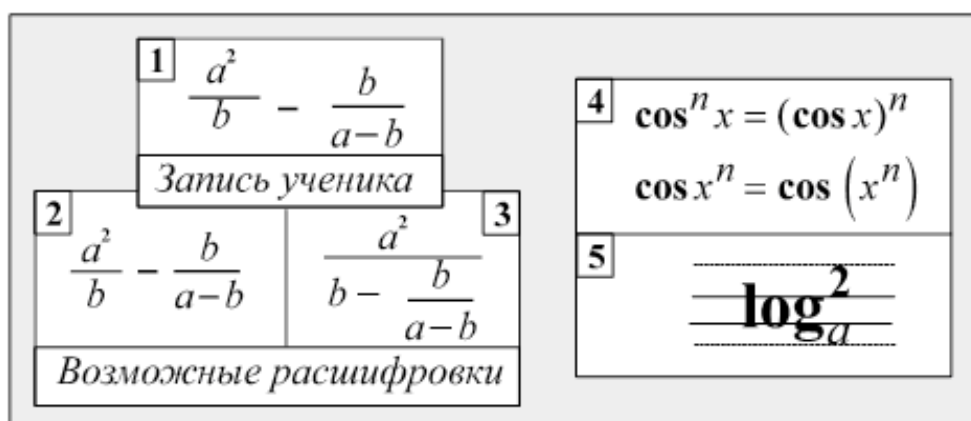


Рис. 8

Формализация аналитического языка с помощью символики – важная сторона обучения. Умение читать формулу, составленную из знаковых конструкций, является одним из общеобразовательных умений, закладываемых в школе. Укажем на некоторые черты этого умения, за которыми надо следить особенно внимательно:

Независимость от обозначений. Если на вопрос, что такое функция, ученик отвечает, что это $y = f(x)$, есть опасность, что он, встретившись с функциональными зависимостями между переменными, обозначенными непривычным образом, не сможет узнать самые простые вещи.

Правильная запись порядка действий. Кроме общепринятых правил, позволяющих, к примеру, различать $\cos x \sin x$ и $\cos \sin x$, полезно применять специальные, указывающие порядок операций – оформление алгоритмов и программ, разумное использование скобок, обозначение промежуточных результатов.

Использование логических связок.

Употребление логических, математических и теоретико-множественных знаков как стенографических.

При целенаправленном обучении формирование умения видеть содержание в символических образах может дать инструмент к познанию. «Представляя собой условную знаковую систему, символическая наглядность по существу является своеобразным языком и, как всякий язык, должна специально изучаться, чтобы стать понятной. Только в таком случае символическая наглядность будет эффективным средством обучения» [177, с. 72].

2.3. Вербальный способ

К вербальному (описательному) способу предъявления учебной знаковой информации относится раскрытие ее содержания на родном языке. Представление знаковой информации вербальными средствами – задача чрезвычайно сложная. Требование детерминированности, однозначности понимания условия является основным. Текст должен быть рассчитан на уровень восприятия ученика, его предшествующую подготовку, запас терминов. Даже такие “элементарные вещи”, как приставки и предлоги могут озадачить ученика, поэтому при малейшей возможности следует *показывать* “нюансы”, порождаемые ими (см. приложение, с. 461, рис. 211, вверху; с. 382, рис. 132, в центре, слева).

Приведем пример того, с чем приходится сталкиваться нашим ученикам при чтении учебников и учебных пособий. В данном случае мы рассмотрим небольшой фрагмент текста учебника по географии для 6-го класса.

«**Масштабом** называют дробь, у которой числитель единица, а знаменатель – число, указывающее, во сколько раз расстояния на плане меньше, чем на самой местности... Чем больше число в знаменателе дроби, тем больше уменьшение...» [38].

Ни в самом тексте, ни на рисунках, прилагаемых к нему, нет ни одного примера записи масштаба в виде такой дроби. Масштаб записывается только как на рисунке учебника (рис. 9, вверху).

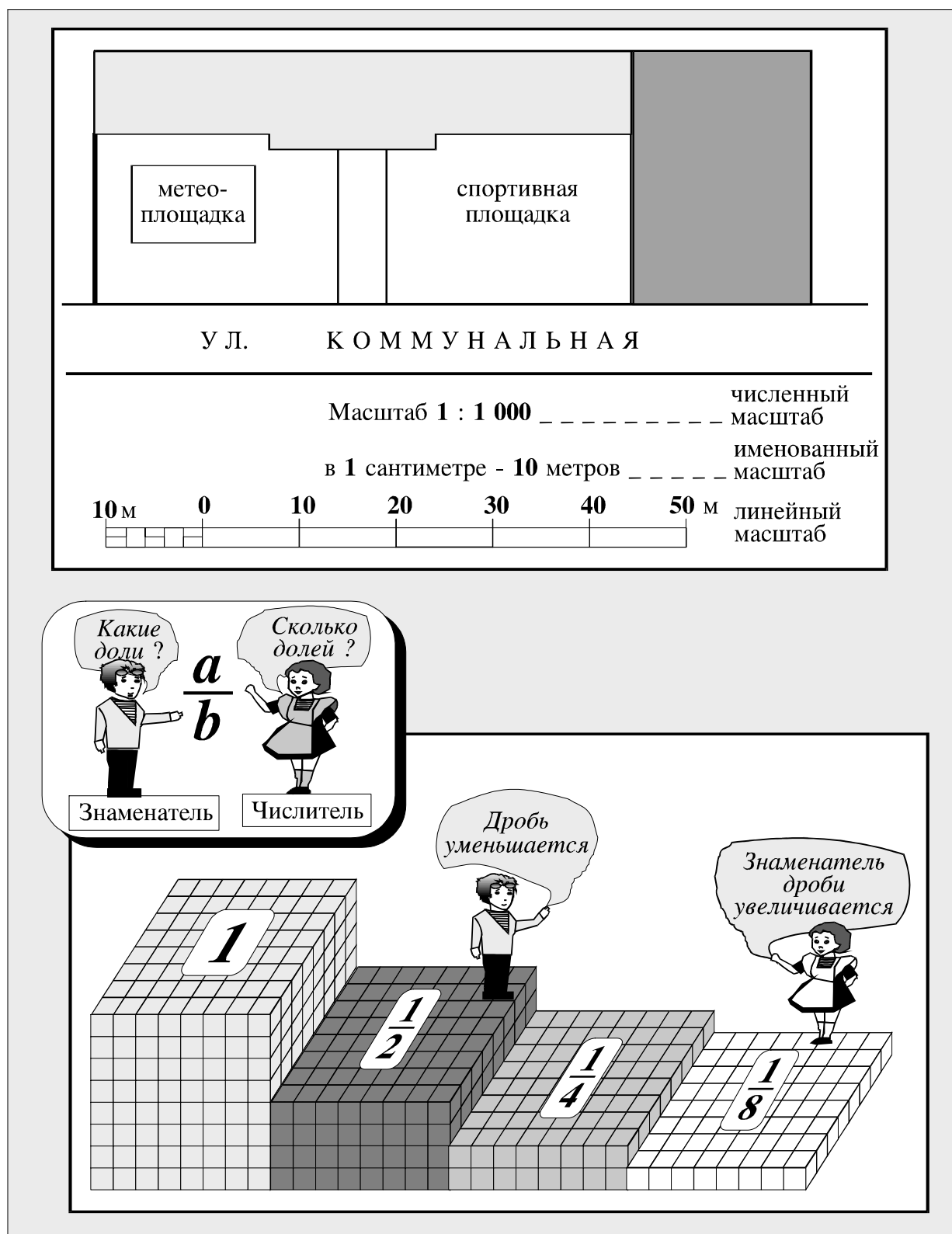


Рис. 9

Данный текст школьники читают тогда, когда представления об обыкновенных дробях, их видах (правильная и неправильная) еще не сформированы, поскольку

ку в сентябре, как правило, идет повторение материала и восстановление утраченных за летние каникулы, умений и навыков за предшествующий класс школы. Действия над дробями с разными знаменателями, следовательно, и сравнение таких дробей изучаются гораздо позже. Не сформировано у школьников и понятие обратной зависимости, поэтому фраза “Чем больше число в знаменателе дроби, тем больше уменьшение” также может оказаться непонятным для них. Обратим внимание также на то, что иллюстрация, способствует образованию неправильных представлений: начало отсчета сдвинуто так, что непонятно, откуда же собственно производится отсчет.

С помощью вербальных интерпретаций новых терминов, визуальных демонстраций структур незнакомых понятий можно хотя бы частично компенсировать несогласования между содержанием различных дисциплин. Так, ранее приведенный пример из учебника географии для 6 класса можно было бы поддержать специальной иллюстрацией (рис. 9, внизу).

Словесный способ предъявления знаковой информации предполагает выбор специальных терминов, составление определений, отработку формулировок теорем и правил. Каждый учитель знает, какую важную роль играет даже порядок слов в формулировке. Требование ясности, четкости, недвусмысленности учебного текста является традиционным. Меньше внимания уделяется использованию богатства родного языка для формирования правильных представлений, разветвленных и динамических ассоциаций, разгрузки памяти, повышения интеллектуального уровня учащихся.

Использование синонимов отнюдь не мешает точности и правильности применения специальной терминологии. Следует преодолеть боязнь называть по-разному одинаковые (или близкие) математические или иные понятия. Нужно помнить, что в научной, справочной и учебной литературе нет (и не может быть) полного единства в терминологии. В основном это объект методики, поэтому здесь мы, продолжая аналогию с чертежом и “многоэтажной” формульной конструкцией, ограничимся одним из видов представления тек-

стовой информации на родном языке учащегося – заголовок (наименования) к определенной порции его сообщения.

Заголовок – наименование к определенному фрагменту информационного сообщения – это особый вид словесных интерпретаций формулы или рисунка. В нем мы предполагаем явное отражение существа дела, краткость описания, понятность изложения. Вслед за названием самого объекта могут следовать: прилагательные, определяющие его свойства, глаголы, описывающие его связи и т.д. и т.п. Заголовок *к каждой* “порции” отдельного теоретического положения или практического задания – это не просто указание к действиям (типа: найди, упрости, вычисли, отметь и т.д.). Заголовком должна быть фраза, в которой самым ясным образом определяется существо дела. Например: “Сокращение дроби на число”, “Вынесение общего множителя”, “Сложение дробей” и т.д. (см. приложение, с. 377, рис. 127; с. 381, рис. 131). Заголовок предлагает содержание информации и направляет ее перевод с одного языка предъявления на другие, предопределяя важный момент – любое знаковое сообщение должно сопровождаться (предваряться) письменным или устным оформлением (интерпретацией).

Преобразование информационных блоков связано с осмыслением последствий изменения их структуры, укрупнения “элементарных единиц”, перераспределения ролей их отдельных фрагментов. При этом вербализация умственных действий как бы переносится в мысленный план. Тем более, что учебная математическая (как и прочая) литература приучает читающего осуществлять такие действия “про себя”. Различные формульные выкладки зачастую сопровождаются указаниями типа “Очевидно, что...”, “Осуществляя необходимые преобразования..., имеем...”, “Отсюда следует...” и т.д. и т.п. В процессе обучения требования подробных описаний, совершающихся трансформаций, перенос мысленных комментариев в устную речь обычно опускается, хотя каждый преподаватель стремится, чтобы его ученики владели таким переводом. Достижение этой цели мы видим в формировании техники таких переводов.

Краткие итоги

В заключение отметим следующее: если образно принять, что картинка и формула есть как бы “аверс и реверс” письменного предъявления некоторой локальной идеи (факта, определения, утверждения, вывода), то необходимую связь между ними образует слово.

В заключение отметим следующее: если образно принять, что картинка и формула есть как бы “аверс и реверс” письменного предъявления некоторой локальной идеи (факта, определения, утверждения, вывода), то необходимую связь между ними образует слово.