§ 1. Организация «живого созерцания» на уроках математики

Одной из основных функций математики как учебного предмета является усвоение учащимися математического метода познания, в ходе которого визуальное мышление, особые параметры которого задаются свойствами учебного знакового материала, может функционировать тогда, когда содержание изучаемого математического материала дается в визуально определяемой форме. Это естественно, поскольку, как пишет Иден, «... те образы, которые можно видеть, поддаются изучению значительно легче, чем эфемерные образы, воспринимаемые слуховой или сенсорной системами» [75, с. 247].

При переходе от устных объяснений к записям, печатному тексту математического содержания происходит отвлечение, перестройка сознания на восприятие знаков как конкретных образов. Именно эта знаковая материализация математических понятий и отношений между ними принимается нами как необходимый атрибут процесса приема и усвоения математических знаний в условиях обучения в средней школе. Момент необходимый, поскольку восприятие символов (как конкретных образов) присутствует при введении каждого нового понятия и повторяется на каждом из этапов изучения курса.

Создаваемая нами методика направлена на формирование умения активно воспринимать и перерабатывать визуальную математическую информацию. Мы обозначили эту сторону умственной деятельности обучаемых словами “живое созерцание”.

В основу “живого созерцания” учащихся на уроках математики мы предлагаем положить три выделенных нами важных этапа активного зрительного восприятия:

– анализ визуальной информации;
– распознавание стандарта;
– составление плана работы.

1.1. Анализ визуальной информации

Анализ визуальной информации начинается с осознания общей структуры информационного сообщения и выделения его элементов. Поясним, что мы понимаем под словами “элемент учебной математической информации” и “структура учебной математической информации”.

Под **элементами** учебной математической информации, задаваемой с помощью формул, будем подразумевать не только сами символы, но и такие их сочетания, которые можно рассматривать как логически осмысленные “части” (взаимосвязанные блоки) этой информации. Так, если a и b – элементы некоторого алгебраического выражения, то $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, a/b и т.д. в зависимости от условий также могут оказаться его элементами. Естественно, что и аналитическая форма задания функциональных зависимостей ($\sqrt{x}$, x^n, $|x|$, $\mathbf{lg}\,x$, $\mathbf{sin}\,x$, $\mathbf{tg}\,x$ и т.д.) выступает как некоторый самостоятельный неделимый элемент.

Образование навыков определения элементов структуры формульной информации следует начинать уже с 5-6 классов школы. Разложение на множители и сокращение дробных выражений – операции, которые доставляют много “неприятностей” и учителю и ученику. Примеры, аналогичные рис. 131 и рис. 149, в центре, справа (см. приложение, с. 281 и с. 149) позволяют сосредоточить внимание на их особенностях, получить визуальные представления и обобщения. Уже эти простые примеры “обнажают” факт, отмеченный Л.Д. Кудрявцевым: «Процессы образования и воспитания людей можно уподобить росту культурных растений, ибо все эти процессы, с одной стороны, могут происходить без активного вмешательства человека извне, а с другой стороны, подобное вмешательство существенно влияет на результат» [95, с. 10]. Действительно, чтобы объединить, осмыслить тождественность обозначений типа $\mathbf{lg}^2 x$, $\mathbf{log}_{10}^2 x$, $(\mathbf{lg}\,x)^2$, $(\mathbf{log}_{10} x)^2$, $\dfrac{1}{(\mathbf{log}_{10} x)^{-2}}$, $\left(\mathbf{lg}^{-2} x\right)^{-1}$ и т.д., необходима определенная математическая культура – знание различных форм записей одного и того же математического объекта, правил преобразования одной из них в другую, умение смотреть и видеть. Однако практика показывает, что учащиеся в большинстве случаев затрудняются в опознании “одинаковых” или “стандартных” (хорошо известных, основополагающих) элементов информации при решении практических задач. Даже в более простых случаях наблюдается отсутствие у учащихся восприятия знаковых структур как некоторых зрительно воспринимаемых образований – визуальных образов, особенности которых поддаются активному зрительному анализу. Различные задания к одному и тому же образу позволяют сосредоточить внимание ученика на определенной операции.

Определяя элементы математической информации, учащийся осуществляет «тот практический реальный анализ, который представляет первую ступень познавательной деятельности и в этом смысле предшествует умственному анализу и синтезу, совершающемуся в словесном плане» [20, с. 132]. К примеру, ученик неполной средней школы, знакомый с правилом сокращения дроби, но не имеющий представления о логарифмах, может сообразить, что $\frac{(\ln x)^2}{\ln x} = \ln x$, оперируя с выражением $\ln x$ как с единым неделимым элементом. Учебная математическая информация, задаваемая иллюстративным образом, также довольно четко подразделяется на элементы.

При изображениях пространственных тел или плоских фигур в одних случаях к элементам относятся сами эти фигуры, в других – выделенные на чертежах их составляющие (высоты, углы, грани, вершины и т.д.). Графическая иллюстрация функциональных зависимостей включает в качестве элементов оси координат, области определения и множества значений, конкретные значения переменных, участки кривых, оси симметрии и т.п. Разумеется, подобная дифференциация математической информации на элементы весьма условна. Так, при изучении частных значений функции к элементам относятся все мельчайшие подробности как формульного, так и геометрического способов их предъявления, в том числе и значения функции на концах промежутка в зависимости от того замкнут он или нет. При переходе же к оценке поведения функции на заданном отрезке, мы укрупняем наблюдаемые элементы, нас интересуют уже не частности, а поведение функции в целом – на определен ном интервале (см. приложение, с. 373-374, рис. 123-124).

Под **структурой** математического ин- формационного сообщения мы подразумеваем относительно устойчивую систему связей элементов, образующих целое – исходную информацию. Одной из самых важных сторон осознания структуры информационного фрагмента является определение связей между его элементами. Например, задание "Расставить знаки умножения в выражениях: а) $\dfrac{\mathbf{tg}\,(x+y)\,a^{x+y}}{\mathbf{sin}\,x\,\mathbf{cos}\,x}$; б) $\dfrac{\mathbf{lg}\,a\,b}{\mathbf{lg}(a-b)\ \ \mathbf{lg}(a+b)}$";

часто выполняется учащимися следующим образом:

а) $\dfrac{\mathbf{tg}\cdot(x+y)\cdot a^{x+y}}{\mathbf{sin}\ x\cdot\mathbf{cos}\ x}$; б) $\dfrac{\mathbf{lg}\cdot a\cdot b}{\mathbf{lg}\cdot(a-b)\cdot\mathbf{lg}\cdot(a+b)}$.

При переписывании условия задачи ученики постоянно допускают ошибки типа: $\sqrt{a}+b$ вместо $\sqrt{a+b}$, $a^{3}\sqrt{b}$ вместо $a\sqrt[3]{b}$ и т.д., что приводит к изменению смысла исходного условия. Здесь дело не только в незнании определенных математических законов, но и в "невоспитанности" математического зрения. Именно этим и можно объяснить огромное количество "описок" при перенесении информации с доски или учебника в тетради учащихся. Они так увидели и так переписали, не подумав о возможности различных связей между отдельными элементами математической конструкции. Осознание, визуальный анализ, "живое созерцание" структуры информации имеет громадное значение при использовании известной формулы. Довольно часто, зная, что $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, учащиеся, тем не менее, пишут: $\sqrt[3]{(x+1)^2}=(x+1)\dfrac{2}{3}$. Активное созерцание формулы плохо реализуется в учебной практике. И это притом, что подавляющее количество примеров и задач любого учебника для каждого класса школы посвящено отработке навыка – по известной формуле составить, преобразовать, вычислить. Практически нельзя найти раздел дисциплины естественно-математического цикла, где умение расчленять информацию на элементы и определять ее структуру оказалось бы “без работы” (см. приложение, с. 397, рис. 148, вверху, слева).

Важным этапом анализа визуальной информации является нахождение одинаковых элементов. Формально такие элементы распознать легко. Особое значение имеет нацеленность на их обнаружение.

Например, выполняя задание “Вычислить

$$\frac{\sqrt{6,3\cdot 1,7}\cdot\left(\sqrt{\frac{6,3}{1,7}}-\sqrt{\frac{1,7}{6,3}}\right)}{\sqrt{(6,3+1,7)^2-4\cdot 6,3\cdot 1,7}}\text{”},$$

многие учащиеся стремятся выполнить все операции с помощью микрокалькулятора, вместо того, чтобы выделить два повторяющихся числа “**6,3**” и “**1,7**” и применить формулы сокращенного умножения (рис. 36).

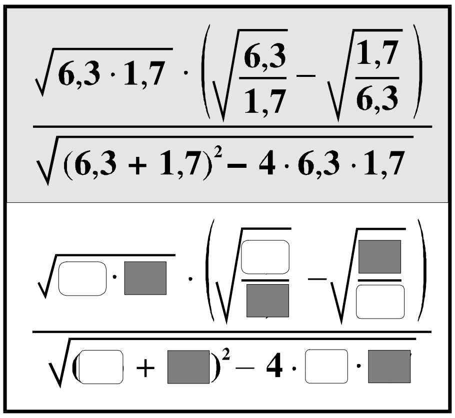


Рис. 36

Большие трудности в обнаружении одинаковых элементов вызывает различная форма их записи (или изображения). Приведем пример. Группе выпускников школы, занимающихся на подготовительных курсах, автором данного исследования было предложено вычислить $\lg^2 x\,(\log_{10} x)^2-\frac{\log_{10}^2 x}{(\lg x)^{-2}}$. Из 35 слушателей только один не стал тратить время на преобразования, сразу увидев результат.

Целенаправленное воспитание “живого созерцания” структуры, определение одинаковых и различных элементов информации поможет во многих случаях увидеть ответ без оформления промежуточных процедур. При решении геометрических задач полезно отыскивать равные углы, подобные или конгруэнтные треугольники и т.д., даже если они не выделены, не обозначены на чертеже. Превращение визуального анализа чертежа в привычку значительно обогатит возможности самостоятельной работы учащихся.

Обнаружение одинакового (подобного) может сопровождаться изменением или дополнением имеющейся информации, осуществлять которые допустимо различными способами: подчеркиванием, обведением в кружок, выделением цветом, специальной символикой и т.д. Это известный прием, но важно, что перенос данного действия в сферу визуального анализа дает возможность одновременно с выявлением одинаковых элементов подойти к укрупнению. Основой укрупнения является метод замены, широко используемый, в частности, при преобразовании алгебраических выражений. Способ замены имеет далекие перспективы в смысле формирования математического “зрения”. По мнению Ричарда Лэнгтона Грегори (автора книги «Разумный глаз»): «наша способность видеть картину как определенный предмет – картину – и как “вместилище” совсем иных предметов сама по себе замечательна. Но еще более замечательна наша способность использовать определенные формы в качестве символов, которые помогают работе мысли» [50, с. 158]. Таким образом, мы не только формируем используем способность зрения не просто видеть наборы алгебраических или иных структур, но и учим его (зрение) выделять те, которые совпадают по своей сути, помогая работе мысли для осознания структуры и, как следствие, выбора пути дальнейших преобразований. Выделение блоков, укрупнение схем, введение новых обозначений, раскраска чертежа или текста и т.п. могут служить внешним выражением результата первого этапа активного зрительного восприятия – анализа визуальной информации.

1.2. Распознавание стандарта

На втором этапе активного зрительного восприятия информации учащийся отождествляет отдельные ее фрагменты с известными ему достаточно простыми объектами и понятиями, которые мы называем стандартами. Для усиления целенаправленности этой работы необходимо разобраться в постановке задания, понять и сформулировать “на что” дана задача, т.е. к какому стандартному типу она может быть отнесена.

Приведем примеры ожидаемых формулировок.

1. Упростить алгебраическое выражение с помощью формул сокращенного умножения.

2. Решить неравенство, используя метод интервалов.

3. Решить тригонометрическое уравнение (с возможным указанием конкретного приема или типа уравнения).

4. Определить экстремумы функции с помощью производной.

5. Вычислить объем тела вращения.

Основная часть работы по распознаванию стандарта происходит по схеме “специализация-обобщение”. Например, увидев на доске выражение типа $A = \mathbf{4}^x + \mathbf{3} \cdot \mathbf{2}^{\mathbf{2}x-\mathbf{1}} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{3}-\mathbf{2}x}$, учащийся в каждом слагаемом должен опознать функцию вида $y = \mathbf{k} \cdot a^x$, отметив для себя, какие основания показательной функции включены в условие. Разумеется, первый и второй этапы работы с визуальной информацией часто не разделяются во времени, а тесно переплетаются. Так, если указанное выражение $A = \mathbf{4}^x + \mathbf{3} \cdot \mathbf{2}^{\mathbf{2}x-\mathbf{1}} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{3}-\mathbf{2}x}$ входит в уравнение $A = \mathbf{0}$, то визуальный анализ исходной формулы может содержать следующие моменты:

1. Уравнение включает в себя показательные функции – это показательное уравнение – опознание стандартной постановки задачи.

2. В уравнение входят показательные функции с основаниями $\mathbf{2}, \mathbf{4}$ и $\mathbf{1}/\mathbf{2}$ – распознавание стандартного объекта.

3. Все слагаемые в правой части можно представить как показательные функции с одним и тем же основанием “**2**” – опознание одинаковых элементов.

4. Известны два стандартных типа показательных уравнений: $a^x = b$ и $a^{\mathbf{2}x} + pa^x + q = \mathbf{0}$. Для их опознания надо сравнить показатели степеней,

не обращая внимания на постоянные (еще один стандарт – отождествление a^{x+c} и ka^x) – целенаправленность дальнейшего анализа.

5. Все слагаемые имеют вид $k\,\mathbf{2}^{2x}$, т.е. представляют собой одинаковые степени одного и того же основания (теперь видно, что этим основанием можно взять как число **2**, так и **4**) с точностью до постоянного множителя – отождествление одинаковых элементов.

6. После выкладок мы получим в левой части три подобных слагаемых типа $k\,\mathbf{2}^{2x}$ и, сложив их, придем к стандартному уравнению вида $A\,\mathbf{2}^{2x} = \mathbf{5}$, для решения которого есть стандартная формула (свернут еще один шаг – укрупнение схемы, при котором $\mathbf{2}^x$ воспринимается как z без формальной замены $z = \mathbf{2}^x$). Теперь все готово к проведению заключительного этапа анализа – составлению мысленного плана работы, которого мы коснемся чуть позже.

Принцип замены играет существенную роль в использовании стандарта. Заменяя повторяющийся элемент какого-либо алгебраического выражения на определенный символ, мы как бы освобождаем от его влияния основную структуру этого выражения и помогаем увидеть (предвидеть) ответ, облегчая дальнейшую работу. Так, уравнение типа

$$(\lg x)^{\sin^2 23°} \cdot (\lg x)^{\cos^2 23°} = 3$$

может быть решено, если учащийся умеет производить мысленные замещения, которые на соответствующей иллюстрации мы оформили в рамках (рис. 37).

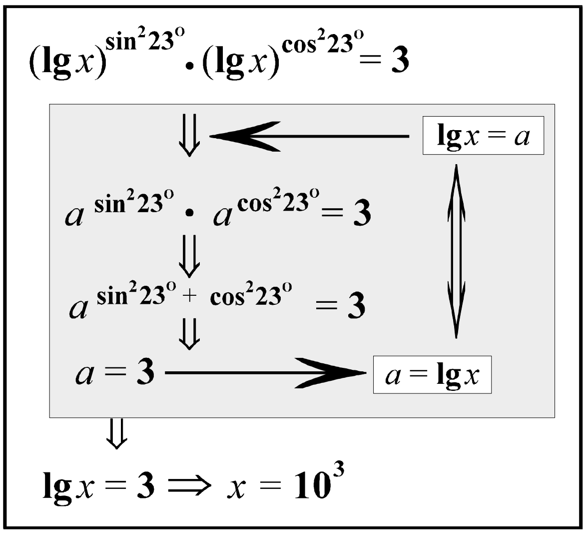


Рис. 37

Таким образом, в практическом задании стандарт выступает как ориентир, позволяющий определить именно то учебное понятие, изучению свойств которого посвящено задание

Чтобы успешно осуществлять поиск стандарта, необходимо ориентироваться во всем многообразии различных обозначений одних и тех же математических объектов и их свойств, чему часто препятствуют недостаточно развитые навыки учащихся. В подобных случаях следует специально “остановиться”, выяснить причину ошибок или возникшего затруднения.

Для закрепления умений большую роль может сыграть следующий методический прием. Предъявляется одновременно серия примеров со специальным оформлением и особым расположением формул на плоскости листа (рис. 38, слева). Ученик должен, ориентируясь на верхнюю строчку (общую модель), ввести в таблицу недостающие данные. В процессе работы выясняется, что все выражения имеют вид $\mathbf{A}\, f\left(\mathbf{k}\, x+\mathbf{p}\right)+\mathbf{B}$. Затем предлагается, используя те же принципы расположения и выделения элементов, привести к тому же виду выражения типа:

$$1)\ \mathbf{3}\sin\left(\mathbf{4}x+\mathbf{1}\right)+\mathbf{6};\qquad 2)\ \frac{\sin\left(\mathbf{1}-x\right)}{\mathbf{2}}+\mathbf{1};\quad 3)\ \mathbf{2}+p\sin\left(p+x\right);$$

$$4)\ \sin\left(\frac{x-\pi}{\mathbf{2}}\right)+\sqrt{\mathbf{2}};\qquad 5)\ \frac{k-\sin\left(kx+p\right)}{\sqrt{p}},$$

используя те же принципы расположения и выделения элементов. Завершающим этапом может служить серия типа предложенной на рис. 38 (справа).

1

$f(\ x\ )=\mathbf{3}\cdot\ x\ +\mathbf{1}-\cos\ x$

$f(\ \mathbf{2}\ )=\mathbf{3}\cdot\ \mathbf{2}\ +\mathbf{1}-\cos\ \mathbf{2}$

$f(\ a\ )=\mathbf{3}\cdot\boxed{}+\mathbf{1}-\cos\ a$

$f\left(x+\mathbf{1}\right)=\mathbf{3}\cdot\boxed{}+\mathbf{1}-\cos\left(x+\mathbf{1}\right)$

$f\left(\dfrac{\mathbf{1}}{x}\right)=\mathbf{3}\cdot\ \dfrac{\mathbf{1}}{x}\ +\mathbf{1}-\cos\boxed{}$

$f\left(\ x^{\mathbf{2}}\ \right)=\mathbf{3}\cdot\boxed{}+\mathbf{1}-\cos\boxed{}$

$f(\qquad)=\mathbf{3}\cdot\sin\alpha+\mathbf{1}-\cos\boxed{}$

2

$f\left(x\right)$	$\mathbf{A}\cdot\ f\ \left(\mathbf{k}\cdot x+\mathbf{p}\right)$
$\mathbf{2}\sin x-\mathbf{1}$	$\mathbf{2}\ \cdot\ \sin\left(\mathbf{1}\cdot x+\mathbf{0}\right)$
$\mathbf{3}e^{x+\mathbf{1}}$	
$\sqrt{\mathbf{2}x-\mathbf{1}}$	
$\ln\dfrac{x}{\mathbf{2}}$	

Рис. 38

Отметим типичные случаи распознавания стандартов по схеме “обобщение-специализация” с параллельной демонстрацией специальных упражнений, взятых из различных разделов курса математики, которые служат иллюстрациями предлагаемых методических приемов

1. Нахождение одинаковых элементов в структуре формулы.

Пример 1. Найти одинаковые элементы и, осуществив их замену буквой “*a*”, записать выражение $\dfrac{5\lg^{-2}x+7\sqrt{\lg x}}{3\log_{10}x-2\lg\dfrac{1}{x^{-1}}}$.

2. Определение стандарта в структуре геометрической конструкции.

Пример 2. На рис.39-а предложена иллюстрация к теореме “Признак скрещивающихся прямых”. Выделите этот стандарт на рис. 39-б,-в,-г (вверху). Как и ранее, для начала определим структуру стандарта (рис. 39-д, вверху), благодаря которой придем к ответам (рис. 39-е,-ж,-з, вверху).

Пример 3. Какие из отмеченных фигур (рис. 39, внизу) являются плоскими сечениями куба?

3. Указание принадлежности функции к определенному классу.

Учащиеся часто путают наименования кривой с наименованием порождающей ее функции, поэтому мы считаем полезным внести в общий список и этот вопрос (см. приложение, с. 408, рис. 158, внизу).

4. Нахождение значений функций.

Значения квадратичной функции в точках $x=\mathbf{1}$, $x=\mathbf{0}$ и $x=-\mathbf{1}$ можно отнести в разряд “замечательных”. Так, рис. 231 (см приложение, с. 481, вверху) концентрирует внимание учащихся на “замечательных” значениях функции. Парная задача “Посмотрите и найдите” осуществляет переход к визуальной констатации полученных фактов. Следующая “ступень” – определение значений параметров квадратичной функции по ее графику (модель для создания связей между анализом структуры формулы и ее графической интерпретации) – образует свертывание (см приложение, с. 481, рис. 231, внизу).

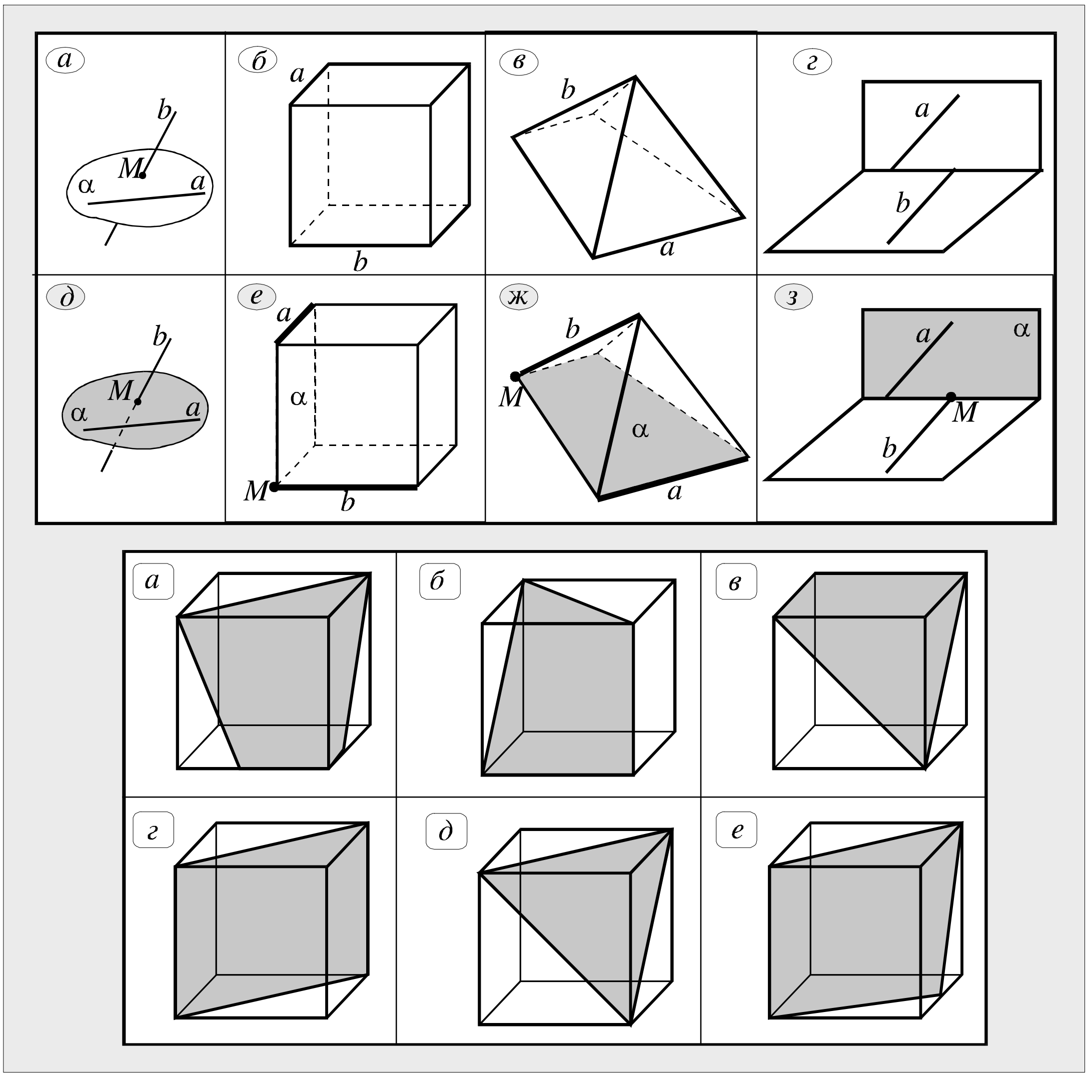


Рис. 39

5. <u>Образование сложной функции и анализ ее структуры.</u>

Построение формулы сложной функции требует той ступени мышления, которую мы ранее охарактеризовали как “визуально-логическую” (см. стр. 24). Действительно, здесь “переплетаются” и восприятие и абстрактные представления.

Пример 4. Пусть $f(x)=\mathbf{3}^x$; $g(x)=\mathbf{2}x-\mathbf{1}$; $p(x)=\mathbf{sin}\,x$.

Составьте функции: *а*) $f\,[g\,(x)]$; *б*) $f\,[p\,(x)]$;

в) $p\,[f\,(x)]$; *г*) $g\,[f\,(x)]$;

д) $g\,[p\,(x)]$; *е*) $p\,[g\,(x)]$.

При построении сложной функции полезны «полиграфические» приемы. Сначала цветом обозначим структуру формулы каждой функции. Поскольку наши возможности в цвете здесь ограничены, то используем иной прием – представление структуры формулы путем “изъятия” аргумента “x” в ее записи. При решении используем (в отсутствие возможности «раскраски») расположение в столбик (см. приложение, с. 421, рис. 171, вверху).

Такие примеры довольно часто вызывают у учащихся значительные затруднения. Особенно явно это ощущается при нахождении производных. Визуальное оформление специальных мини-алгоритмов позволяет увидеть основной принцип и успешно применить его (см. приложение, с. 421, рис. 171, в центре). Данные упражнения, несмотря на некоторую формализацию их, позволяют глубже уяснить “природу” формулы сложной функции – ее структуру.

Пример 5. «Для функции $\mathbf{\sin^2\sqrt{\cos\frac{1}{\sqrt{tg\alpha}}}}$

а) определите порядок вычисления на калькуляторе значений функции при заданном значении аргумента;

б) запишите производную данной функции”.

<u>6. Изменение обозначений в формуле.</u>

<u>7. Нахождение и построение формулы сокращенного умножения (ее элементов) в сложной конструкции.</u>

<u>8. Описание поведения функции на заданном интервале по ее графику.</u>

9. <u>Определение стандарта в структуре формулы</u>.

Пример 6. Вычислить $\mathbf{\log_2 ctg\,0{,}25\pi}$.Соответствующие стандарты дают решение (см. приложение, с. 422, рис. 172, в центре, справа).

1.3. Составление плана работы

Организация описанных выше этапов “живого созерцания” знаковой информации приводит к тому, что становится возможным еще до оформления рассуждений (доказательств теорем, решений примеров и задач) наметить план работы и оценить возможные результаты.

В этап составления плана работы обычно входят:

– определение порядка действий,
– свертывание отдельных операций,
– прогонка вариантов решения задачи.

План работы над преобразованием содержания примера или задачи, предъявленной символьными средствами, может составляться при помощи перевода результатов визуального анализа данных в список конкретных команд. При этом отношение изолированности для каждого из отдельных моментов “живого созерцания” особенно активно преобразуется в отношение связи. Происходит, как говорит Грегори, “динамический поиск наилучшей интерпретации имеющихся данных” [49, с. 15].

При прочно сформированных навыках визуального анализа информации, задания типа “Упростить $\dfrac{\mathrm{tg}^4\alpha - \mathrm{tg}^6\alpha}{\dfrac{1}{\mathrm{tg}^4\alpha} - \dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}}$” легко переводятся учащимися в серию предписаний:

1. Заменить элемент “$\mathrm{tg}^2\alpha$”.

2. Вынести общие множители.

3. Осуществить действия над дробями.

4. Вынести общие множители и, если можно, то сократить (перспектива сокращения на $1-\mathrm{tg}^2\alpha$ может быть обнаружена визуально).

5. Оформить результат.

Такая вербальная расшифровка визуального анализа исходного указания “Упростить” на деле является ответом на “немой” вопрос, неявным образом присутствующий в каждом практическом задании: какие знания требуются, чтобы можно было получить ответ?

Составляя план работы, учащийся одновременно отмечает именно те правила (формулы, теоремы), которые позволяют найти искомый результат. Как отмечал Эльконин, “в процессе обучения невозможно игнорировать первую ступень познания – живое созерцание, так как только на его основе возможно развернуть в полной мере работу абстрактного мышления” [203, с. 254-264].

Определение порядка преобразований приводит к свертыванию отдельных мыслительных операций. Не вдаваясь в рассмотрение самого процесса свертывания, описанного С.И. Шапиро [195, с. 93-127], перечислим некоторые методические приемы, благодаря которым можно использовать это свойство мышления. К таким приемам относится описанный ранее принцип замены. Следующий прием – действия по образцу.

Продемонстрируем свертывание целого комплекса формально-логических процедур на примере проведения доказательных рассуждений. Теорема “Сумма векторов, заданных своими координатами” с помощью вспомогательных средств визуального анализа, может быть изложена в виде рис. 169 (см. приложение, с. 419, в центре). Предложим ученикам по данному образцу доказать теорему о разности векторов, заданных своими координатами. Обычно учащиеся добросовестно и правильно выполняют все преобразования, поскольку сам образец оформлен достаточно ясно и четко. Однако к этому вопросу можно подойти и с другой стороны.

Выделим цветом (или отметим кружочком) в первоначально приведенном доказательстве те знаки “плюс”, которые определяют именно операцию сложения векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, а не операцию суммирования составляющих компонентов каждого из них Эти приемы позволяют опустить все промежуточные логические операции, провести доказательство визуально (полностью или частично) без подробного письменного оформления.

Завершающим моментом составления плана работы является прогонка вариантов. Это наиболее трудная часть визуального анализа. Навыки мыслительной прогонки возможных вариантов вырабатываются путем долгой и кропотливой работы. Данный момент трудно контролируется, так как он сильно зависит от индивидуальных особенностей ученика. В то же время овладение данным навыком – надежный путь к усилению самостоятельности и творческой активности учащегося.

Целенаправленный визуальный анализ содержания учебной математической информации во многих случаях позволяет определить возможные результаты. Поэтому заслуживают внимания частные примеры, в которых можно организовать прогонку вариантов большинством учащихся. Приведем некоторые из них. Речь идет об оценке элементов и блоков информационных сообщений, о влиянии структуры знакового материала на прогнозирование вида конечного результата.

Например, решение достаточно сложного задания

“Упростить выражение $\dfrac{\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}}{\left(\sqrt{a-1}\right)^{-1/3}}+\dfrac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^{-1/3}}$” можно свернуть, если заметить особую симметрию блоков $\dfrac{\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}}{\left(\sqrt{a-1}\right)^{-1/3}}$ и $\dfrac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^{-1/3}}$. Это “сопряженные” выражения. Следовательно, скорее всего ответ будет складываться из пары их упрощенных модификаций вида “$k+p$” и “$k-p$”. Поэтому достаточно рассмотреть подробно только одно из слагаемых заданного выражения.

Осуществим начальные преобразования первого слагаемого: $\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a-1}+1}$. По-видимому, следует ожидать результат типа $\sqrt[3]{(\quad)^3}$. Если за сомножитель $\sqrt[3]{(\quad)^3}$ принять $\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a-1}+1}$, то квадрат подкоренного выражения в точности равен выражению под первым из радикалов: $\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a-1}+1}=\sqrt{a-1}+1$. Отсюда для второго слагаемого предположительно имеем: $\dfrac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{\left(\sqrt{a-1}\right)^{-1/3}}=\sqrt{a-1}-1$.

Полезно повторить весь ход рассуждений еще раз, одновременно оформляя решение и проверяя последнее предположение.

Громадную помощь в прикидке результата могут оказать визуальные стандарты. Продемонстрируем их действие на примере “Определить знак произведения: $A = \mathbf{lg\,sin32° \cdot lg\,sin17° \cdot lg\,sin32° \cdot lg\,sin40° \cdot lg\,sin2°}$”.

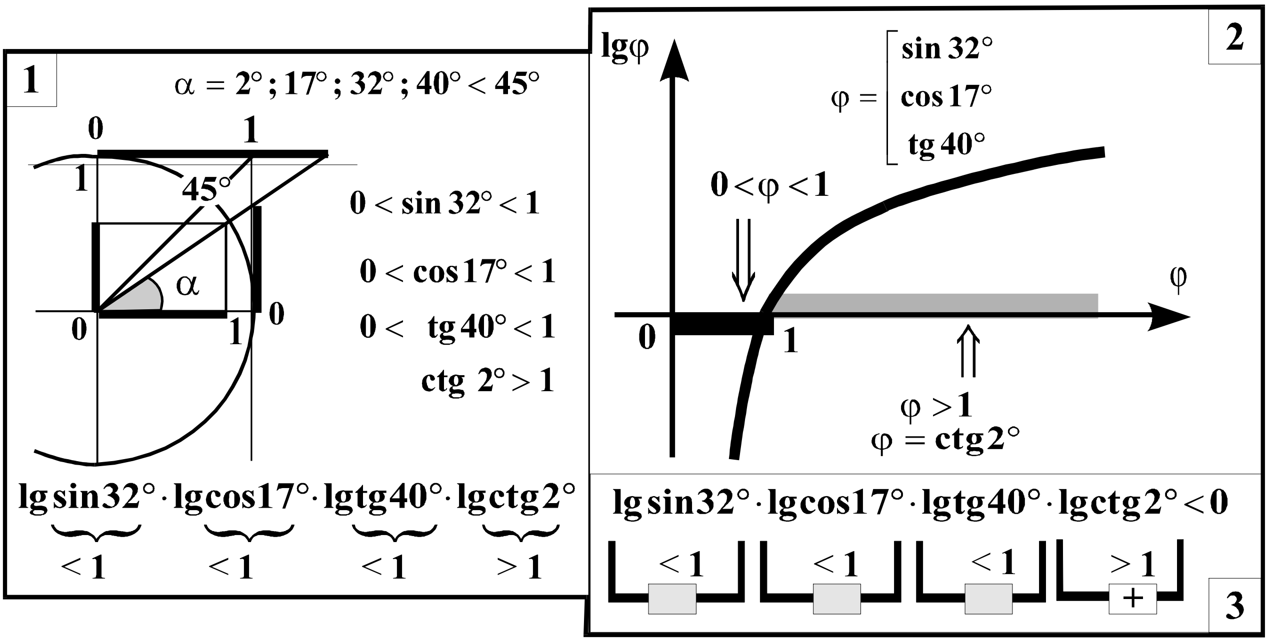


Рис. 40

Осуществляя визуальный анализ геометрического предъявления соответствующих “порций” информации, от опорного стандартного образа приходим к ответу: $A < \mathbf{0}$ (рис. 40).

Таким образом, последовательно организуя все изложенные операции “живого созерцания” учебной знаковой информации, мы не только используем природные свойства зрения ученика, но и формируем некоторые специальные особенности, которые у способных детей образуются часто непроизвольно, спонтанно. Образно можно сказать, что развиваемая нами методика призвана трансформировать визуальное восприятие в продуктивное мышление, как его понимает Грегори: “Нас привлекает взгляд на восприятие как на процесс, который реализуется в мозге и подобен логическим процессам ... таким, которые используются при получении и интерпретации научных данных, при формировании ... гипотез, проверяемых затем путем спланированных наблюдений” [50, с.172].

1.4. Введение нового понятия

Метод расчленения учебной информации на самостоятельные отдельные блоки позволяет компоновать информационные тетради с четко определенными параметрами: использование конкретных умственных действий, общность (алгоритмизация) представления содержания, разнообразие подходов к рассматриваемым объектам и их свойствам.

К перечню “спецификаций” содержания можно отнести: введение понятия, вывод формулы, применение конкретного положения математической теории и т.д. Приведем пример тетради, реализующей перечисленные спецификации: “Координаты единичного вектора”.

***Стр. 1*. “Координаты вектора”** (рис. 41, вверху)

Здесь “личный” символ $\vec{i}_\alpha$ означает поворот вектора $\vec{i}$ на угол α.

***Стр. 2.* “Координаты единичного вектора”** (рис. 41, вверху)

Обе страницы содержат уже знакомый материал. Учащиеся должны суметь записать вектор $\vec{i}_\alpha$ в координатной форме. Если возникнут затруднения, то эти страницы можно рассматривать одновременно (параллельно). Цвет поможет установить: $\vec{i}_\alpha = (\mathbf{cos}\,\alpha\ ;\ \mathbf{sin}\,\alpha)$.

***Стр. 3.* “Составляющие векторов”** (рис. 41, в центре)

Обычно учащиеся с трудом воспринимают, что $\mathbf{cos}\alpha \cdot \vec{i}$ и $\mathbf{sin}\alpha \cdot \vec{j}$ также есть векторы. Иллюстрации этого листа помогут им установить этот факт и осознать его.

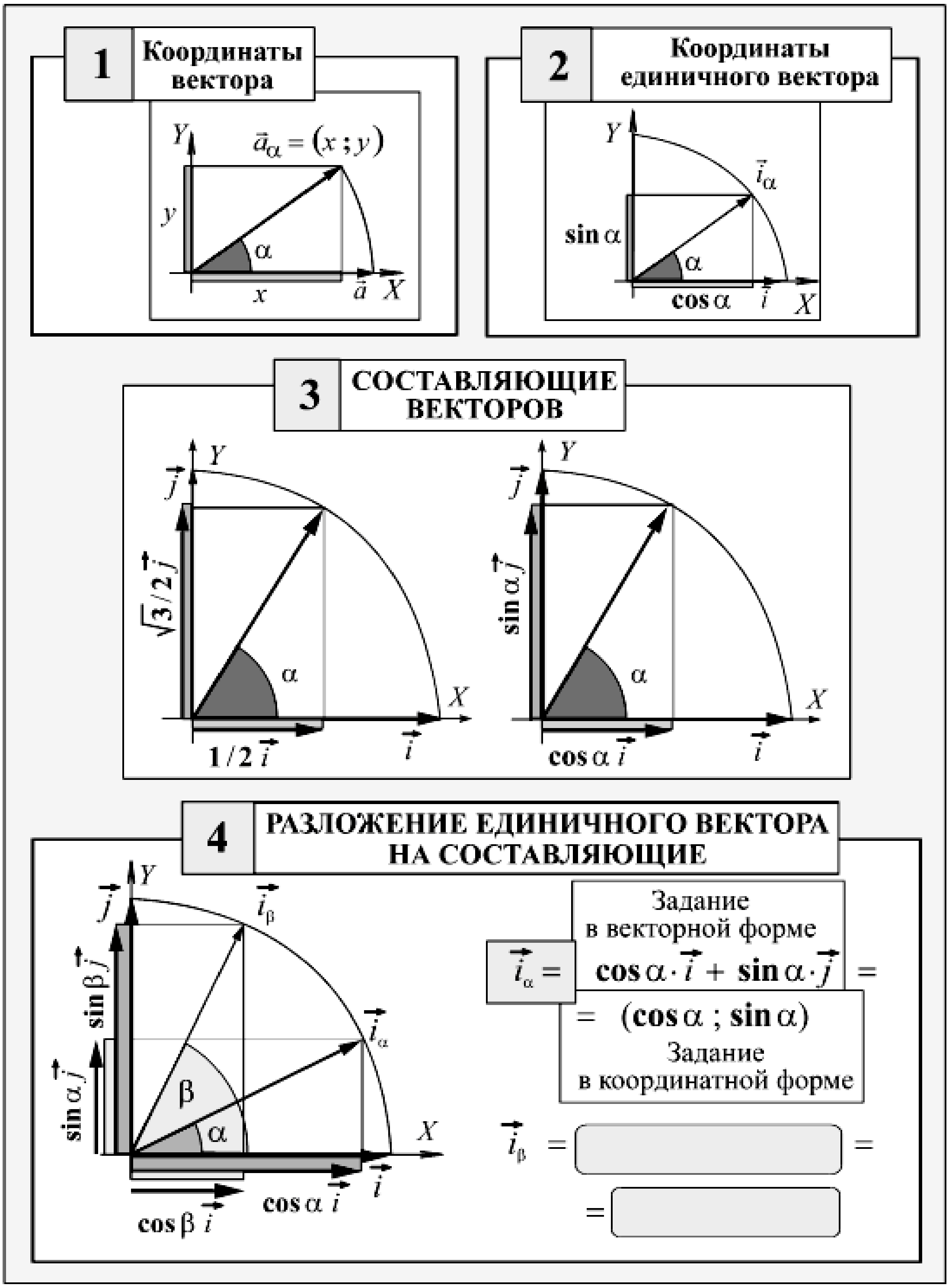


Рис. 41

Стр. 4. **"Разложение единичного вектора на составляющие"** (рис. 41, внизу)

Центральный момент – учащиеся, действуя по образцу, выводят формулы задания единичных векторов в координатной форме. Поскольку все содержание тетради основано на подобных предыдущих сериях, вывод никакой трудности не представляет.

***Стр. 5.* "Скалярное произведение единичных векторов, заданных координатами"** (рис. 42, вверху)

***Стр. 6.* "Скалярное произведение единичных векторов, заданных геометрически"** (рис. 42, внизу)

Страница 5 дает возможность повторить теорему о скалярном произведении векторов, заданных координатами. Страница 6 – определение скалярного произведения двух векторов.

Прием "обобщение – специализация" активно реализует такие моменты "живого созерцания", как:

а) использование формулы как модели (по формуле определения скалярного произведения двух векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{b}$ составляется формула скалярного произведения конкретных векторов $\vec{i}_\alpha$ и $\vec{i}_\beta$);

б) действие по модели (по символическому изложению теоретического положения – скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, – конкретизируется соответствующее утверждение для пары рассматриваемых единичных векторов).

Таким образом, не только восстанавливается в памяти уже изученное ранее, но и совершенствуются навыки анализа знакового материала.

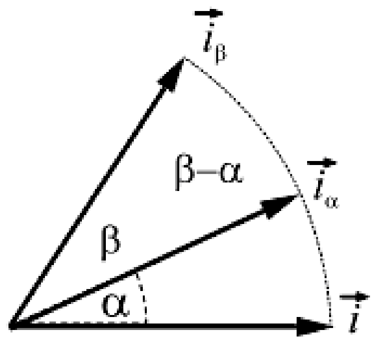
К последней странице прилагается специальный список примеров, позволяющих усвоить формулу косинуса разности двух аргументов (рис. 41, внизу): Учащиеся должны устно или письменно решить его примеры. Цветовое оформление формулы позволяет осознать особенности ее структуры, быстрее запомнить порядок компонентов серии. Данная, завершающая страница тетради формирует "гладкий" переход к теме "Формулы тригонометрического сложения".

К комплекту страниц подобной тетради можно составить множество "быстрых" задачек.

5 СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЕДИНИЧНЫХ ВЕКТОРОВ, ЗАДАННЫХ КООРДИНАТАМИ

Теория	Реализация
$\vec{a}_1 = (x_1\,;\,y_1)$ $\vec{a}_2 = (x_2\,;\,y_2)$ $\Downarrow$ $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2)$	$\vec{i}_\alpha = (\cos\alpha\,;\,\sin\alpha)$ $\vec{i}_\beta = (\cos\beta\,;\,\sin\beta)$ $\Downarrow$ $\vec{i}_\alpha \cdot \vec{i}_\beta = (\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

6 СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЕДИНИЧНЫХ ВЕКТОРОВ, ЗАДАННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ



$$\vec{i}_\alpha \cdot \vec{i}_\beta =$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \vec{a}\,^\wedge \vec{b}}$$

$$= |\vec{i}_\alpha| \cdot |\vec{i}_\beta| \cdot \cos\ \vec{i}_\alpha\,^\wedge\,\vec{i}_\beta =$$

$$= |\vec{i}_\alpha| \cdot |\vec{i}_\beta| \cdot \cos(\alpha - \beta) =$$

$$= \cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos(\ \alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\ \beta - \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos \quad + \sin \quad \cdot \sin$$

$$\cos(\ \gamma - \delta) = \cos \quad \cdot \cos \quad + \sin \quad \cdot \sin$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) =$$

$$\cos(\ \ 85^\circ\ \ ) =$$

Рис. 42

Например,

к *стр*. 1:

а) отрицательны или положительны координаты вектора $\vec{a}_\alpha$?

б) постройте вектор $\vec{i}_\alpha$ при $\mathbf{180^\circ} < \alpha < \mathbf{270^\circ}$ и оцените его координаты,

к *стр*. 3: запишите значения координат векторов $\vec{i}_\pi$, $\vec{i}_{3\pi/4}$, $\vec{i}_{\pi/6}$,

к *стр*. 6: составьте формулы $\mathbf{cos}(\alpha + \beta)$ и $\mathbf{cos}\ \mathbf{2}\alpha$ и т.д.

Краткие итоги

Разумеется, удачная на взгляд учителя страница может быть применена в учебном процессе в отрыве от всего комплекта, составляющего единое целое – информационную тетрадь. Но ценность ее будет значительно снижена, так как не будут применены самые сильные инструменты обучения – последовательность и постепенность, наглядность и преемственность.

Имея в руках свой экземпляр такой тетради (или возможность вывести на монитор любую из ее страниц), учащийся может не бояться отстать от сильных товарищей. Вопросы учителя объединяют класс в поисках результата. В рабочих тетрадях остается лишь записывать ответы, оформлять наиболее трудные этапы решения.