§2. Формирование стандартного математического образа

Каждая учебная задача предполагает преобразование, свертывание данных к некоторому достаточно простому, хорошо известному объекту. Геометрическая или аналитическая интерпретация найденного стандарта позволяет быстро и точно ответить на поставленный вопрос. С точки зрения определенных психологических свойств мышления это естественно. В предисловии к русскому изданию книги «Распознавание образов» И. Пинскер пишет: «... любое решение, любое действие, связанное с обработкой внешней информации, основано на узнавании и той конкретной ситуации, которой это действие отвечает, т.е. на распознавании образов» [130, с. 5].

2.1. Изображение основных математических понятий

Активное и целенаправленное использование визуального мышления в процессе обучения основано на формировании устойчивых образов основных математических понятий. Первой встающей здесь методической задачей здесь является подготовка добротных геометрических изображений этих понятий, адекватно отображающих их основные черты, удобных в работе, пригодных для многократного использования. Большинство этих изображений устоялось в практике преподавания математики.

Перечислим наиболее важные понятия, которые мы относим к стандартным.

1. Число – точка числовой оси.
2. Вектор – направленный отрезок.
3. Функция – график.
4. Линейная функция – прямая.
5. Квадратичная функция – парабола.
6. Обратная пропорциональная зависимость – гипербола.
7. Колебательный процесс – синусоида.

8. Производная – наклон касательной.
9. Экстремум – горб или впадина.
10. Интеграл – площадь (см. приложение, с. 352, рис. 102).

Естественно, что объем содержания такого визуального образа не полностью совпадает с объемом содержания соответствующего понятия. Так, отношение "Экстремум – горб или впадина" позволяет по графику определить важнейшие "параметры" поведения функции (точки максимума и минимума, изменение функции вблизи этих точек – возрастание, с одной стороны, и убывание, с другой), "измерить" значение самого экстремума и т.д. Однако чтобы осуществить дефиницию самого понятия, необходимо нечто большее. Нужна дисциплина зрительного восприятия, знание стандартных зрительных образов, понимание, что само слово "экстремум" нуждается в описательном расширении типа "экстремум функции в заданной точке" и т.д. Необходим грамотный, квалифицированный перевод с языка образов на язык слов и формул.

Обратим внимание на то, что новым в предлагаемой нами методике является акцент на образ, его "первичность", установка на немедленную зрительную ассоциацию с абстрактным понятием, предшествующую словесному описанию. Насколько важна такая "первичность" писал еще Павлов: "При страшной сложности работы больших полушарий, по-видимому, имеется такой принцип: все то, что было образовано, не переделывается, но остается в том же виде, а новое лишь наслаивается" [см. в книге 204].

Проблему «первого впечатления» мы предлагаем разрешить с помощью специальных учебных моделей, которые ранее назвали визуальными стандартами.

Под **визуальным стандартом** (**стандартным образом**) мы понимаем такую визуальную или формульную интерпретацию математического понятия (его свойства или отношения между такими понятиями), которое наиболее полно и точно отображает его словесную дефиницию.

Таким образом, стандартный образ понятия должен отвечать следующим условиям:

– содержание должно удовлетворять принципу необходимости и достаточности;

– объем должен совпадать с объемом исходного понятия;

– представление должно осуществляться так, чтобы стал возможен адекватный перевод на другие языки предъявления математической информации.

Поясним данные условия на конкретных примерах.

Учитывая, что задание функции с помощью графика является одним из основных объектов разрабатываемой нами методики, сосредоточим внимание на нескольких важных условий подготовки соответствующих стандартных образов. Основой каждого графика должны служить кривые, строго отражающие функциональные зависимости между числовыми переменными. К сожалению, стенды, сделанные учителями или изготовленные типографским способом, довольно часто искажают положение: для любого аргумента x из области определения функции f существует и единственно значение $f(x)$ из множества значений функции f.

На стенах классов висят изображения, типа приведенных на рис. 43. Это приводит к тому, что учащиеся не осознают главной визуальной особенности геометрического задания функционального соответствия – кривая в плоской системе координат является графиком функции тогда и только тогда, когда любая прямая, проведенная параллельно оси значений f (перпендикулярно оси аргументов f), пересекает эту кривую не более чем в одной точке.

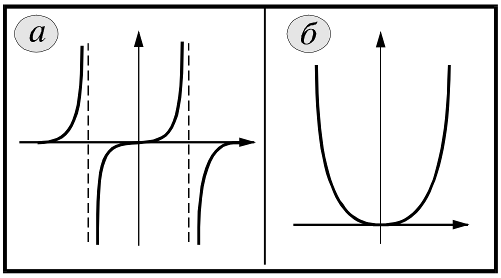

Рис. 43

Учащимся не под силу определить:

– какие из кривых на рис. 44-(1) являются графиком функции?

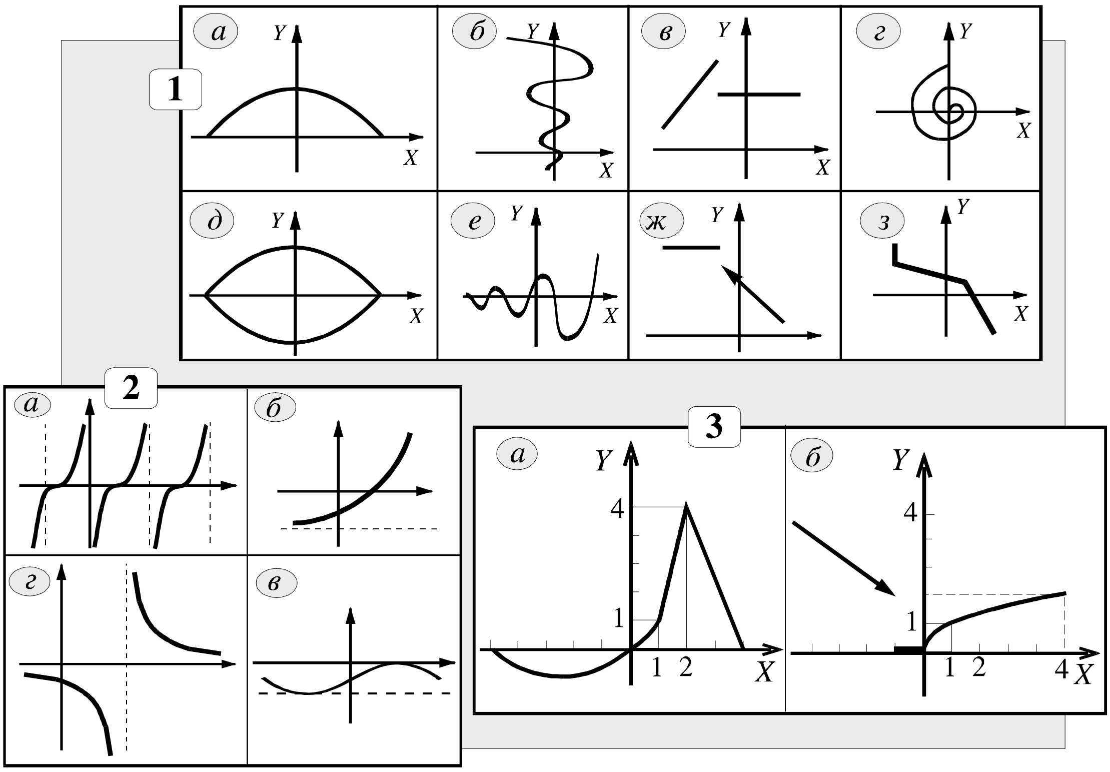

Рис. 44

– где (в какой точке или на каком отрезке) происходит нарушение функциональности для кривых, изображенных на рис. 44-(1) (-в,-з)?

При недостаточно прочно сформированном зрительном восприятии учащиеся плохо ориентируются в изображениях, не опознают “портрет” функции, не видят тенденции ее развития. В таком случае полезны упражнения типа:

– определите, графики каких элементарных функций перемещены так, чтобы получились следующие кривые на рис. 44-(2)?

– на рис. 44-(3) кривые (-а) и (-б) составлены из “кусков” графиков элементарных функций. Запишите данные иллюстраций в виде формулы:

$$y = \begin{cases} f(x), & a < x < b \\ g(x), & b < x < c \\ p(x), & c < x < d \end{cases}$$

, где $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$ – есть формулы элементарных функций, $a,\ b,\ c,\ d$ – точки, разделяющие область определения функции y на соответствующие интервалы.

Комплекс “график-уравнение” должен четко отмечать в своем визуальном блоке все необходимые “точки опоры” – элементы, позволяющие придти к необходимым обобщениям, предопределить свертывание мыслительных операций. В частности, для геометрического задания синуса к таким элементам можно отнести: точки, обозначенные на оси абсцисс ($-\frac{\pi}{2}$, $\mathbf{0}$, $\frac{\pi}{2}$); пунктирные (или тонкие) линии, отмечающие область значений этой функции (рис. 44-(2)-г). При соблюдении упомянутых условий у учащихся довольно просто формируются формульные стандарты типа:

– нули синуса: $\mathbf{0}, \pm\pi, \pm\pi/2, \ldots$;

– область допустимых значений синуса: $x \in [-1\,;\,1]$ и т.д.

В свою очередь эти данные приведут к свертыванию мыслительных операций при решении примеров, подобных:

“Решить уравнение $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$” (рис. 45).

Решение	Стандарты для свертывания
$\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$	$a^2 - 2a - 3 = 0$
$\Downarrow$ $(\sin x - 3)\cdot(\sin x + 1) = 0$	Теорема Виета: $\begin{cases} a_1 \cdot a_2 = -3 \\ a_1 + a_2 = 2 \end{cases}$
$\Downarrow$ $\sin x = -1$	Область определения синуса: $E(\sin)\colon \lvert\sin x\rvert \le 1$
$\Downarrow$ $x = \frac{\pi}{2}(4k-1)\,(k \in Z)$	Минимумы синуса: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in Z)$

Рис. 45

Формируя визуальный стандарт определенного понятия, можно рассматривать содержание одной и той же задачи “в разных плоскостях”. Мы полагаем, что зрительное восприятие одних и тех же объектов в различных вариантах позволит более продуктивно формировать умения, знания и навыки как отдельного ученика, так и класса в целом.

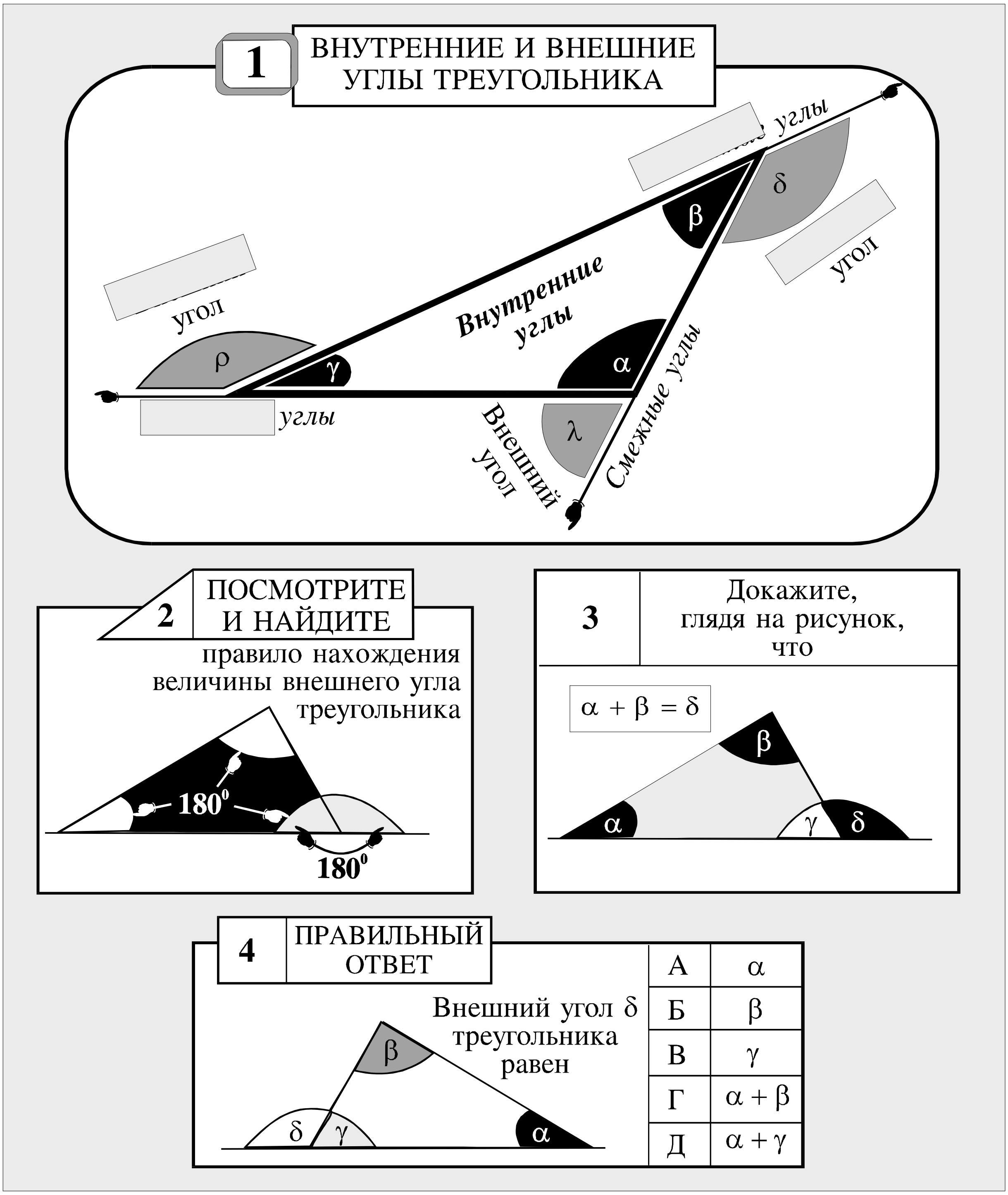

Рис. 46

Визуальные дидактические материалы легко варьируются, поэтому каждому ученику может быть предложен конкретный вариант одной и той же задачи, которую он в удобном для себя темпе рассмотрит и обдумает, задаст по ней интересующие его вопросы и сможет в дальнейшем участвовать в общем обсуждении.

На рис. 46 представлена информационная страница «Внутренние и внешние углы треугольника», обсуждая содержание которой, учащиеся практически решают основную задачу (№ 1): восстановление и закрепление образов различных углов треугольника. Задача № 2 адресована более слабым ученикам. В ней предусмотрено, что по каким-либо причинам ученик забыл или не знает теорему о сумме внутренних углов треугольника. Кроме этого здесь имеется визуальная подсказка для нахождения ответа на сам вопрос задачи. Рисунок второго задания дает все необходимые ориентиры для извлечения из памяти фактов: сумма внутренних углов треугольника равна $\mathbf{180°}$, сумма смежных углов также равна $\mathbf{180°}$. Поэтому задача № 3 предназначена для формирования техники проведения доказательных рассуждений и вполне по силам тем, кто хорошо знает предшествующий материал. Сильным учащимся можно сразу предложить задачу № 4, где поиск закона о связи между величиной внешнего угла треугольника с суммой двух внутренних его углов, не смежных с этим внешним “запрограммирован” списком ответов к основному вопросу.

2.2. Параметры визуального стандарта

Для того чтобы “базовый” рисунок-стандарт помогал решать конкретную учебную задачу, необходимо продумать его содержание и при оформлении расставить все важнейшие акценты. По словам Вазари “рисунок ... имея свое начало в рассудке, извлекает общее понятие из многих вещей, ... отсюда следует, что он познает соразмерность целого с частями и частей между собой и с целым ... из этого познания рождается определенное понятие и суждение, ... и можно заключить, что рисунок этот не что иное, как видимое выражение и разъяснение понятия, которое создалось в идее. И отсюда, возможно, и возникла греческая пословица: “По когтю льва” [27, с. 214].

Проведем аналог. Предлагаемое ниже методическое средство обозначено нами как “Направляющие прямоугольники”. Оно обеспечивает точность исполнения и ясность восприятия графиков элементарных функций (см. приложение, с. 351, рис. 101).

При построении графиков функций (особенно на начальных этапах) важно строго соблюдать цветовую гамму в их геометрическом и аналитическом заданиях, четко фиксировать направление отсчета на числовых осях (слева направо по горизонтали, снизу вверх по вертикали), выбирать единицы измерения (в школьной тетради – две клеточки на единицу, три – на число $\pi/2$ для тригонометрической функции и т.д.), выделять основные и вводить вспомогательные элементы.

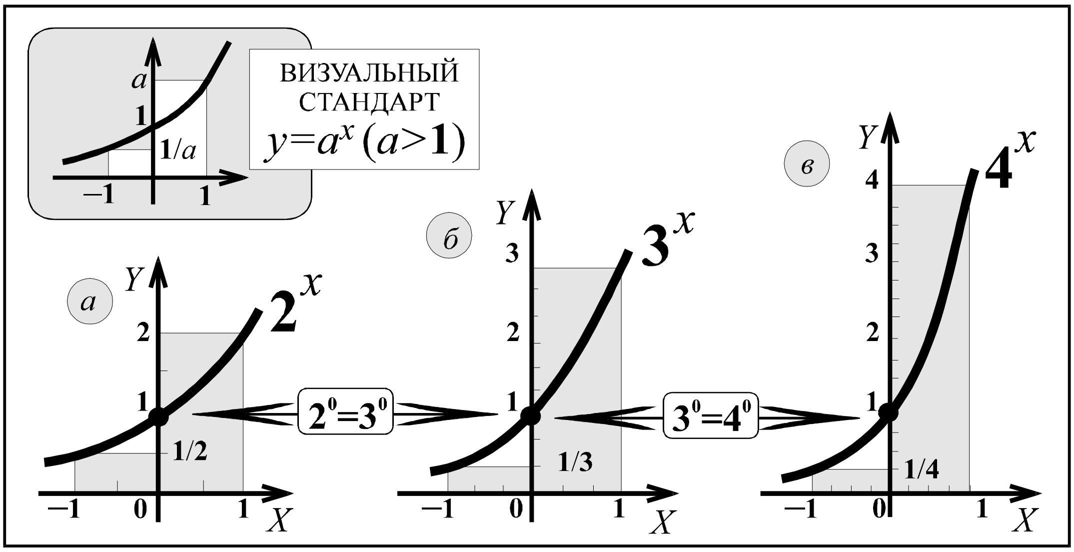

Рис. 47

Подробное и тщательное выполнение геометрического задания показательной функции по основанию **2** может привести к полезным ассоциациям. “Точки опоры” в виде цифр (на оси абсцисс: **–1**, **0**, **1**; на оси ординат: **1/2**, **1** и **2**) позволяют определить (предугадать) соответствия для экспоненты с основанием **3** и **4**. На рис. 47 полезно было бы эти визуальные ориентиры выделить цветом. Подобные исследования позволяют сформировать образ экспоненты с основанием $a>\mathbf{1}$ (рис. 47, в кружке).

Приведем пример возможного хода решения задачи, весьма показательной с точки зрения использования графических стандартов.

<u>Задача.</u> “Построить график функции $y = \begin{cases} x^{\mathbf{2}} - \mathbf{1}, & x \le -\mathbf{1} \\ \sqrt{x+\mathbf{1}}, & -\mathbf{1} < x \le \mathbf{2} \\ x - \mathbf{2}, & x > \mathbf{2} \end{cases}$”.

Для начала построим геометрические стандарты кривых: $y = x^{\mathbf{2}}$, $y=\sqrt{x}$, $y = x$ (см. приложение, с.420, рис. 170). При этом мы в визуальной форме отвечаем на вопрос “Что задано?”.

Осуществим перемещение графиков в строгом соответствии с формулами условия, т.е. определим “Где задано?”. Выделим те участки кривых, которые удовлетворяют начальным ограничениям. Тем самым мы ответим на вопрос “Когда, т.е. как развивается наша функция во времени?”. И, наконец, вносим корректировку, необходимую для сохранения закона функциональности, т.е. определяем поведение функции “на стыках”.

Для того чтобы более полно представить предлагаемое нами методическое средство, проанализируем содержание комплекта «Направляющие прямоугольники прямой и параболы», внедренного в учебный процесс в одной из экспериментальных школ Мурманской области. Отдельные его фрагменты даны в приложении на с. 353-359 (рис. 103-108). “Меню” данной тетради состоит из следующих позиций:

1. Прямые $x=\mathbf{k}$ и $y=\mathbf{p}$.
2. Направляющий прямоугольник прямой $y=x$.
3. Направляющий прямоугольник прямой $y=-x$.
4. Направляющий прямоугольник прямой $y=\mathbf{k}x$ при $\mathbf{k}>\mathbf{0}$.
5. Направляющий прямоугольник прямой $y=\mathbf{k}x$ при $\mathbf{k}<\mathbf{0}$.

6. Направляющий прямоугольник прямой $y = x + \mathbf{k}$.

7. Направляющие прямоугольники параболы $y = x^{2}$.

8. Направляющие прямоугольники параболы $y = -x^{2}$.

9. Построение параболы $\pm y = x^{2} + \mathbf{k}$.

10. Направляющие прямоугольники кубической параболы.

Содержание тетради вбирает в себя все позиции соответствующей темы базисной программы по математике 7-го класса, однако подход к изучению темы значительно отличается от традиционного. При разработке методики формирования стандартного зрительного образа прямой и параболы мы определили для себя следующие обязательные требования

а) к изображениям: точность построений, визуальный “акцент” на необходимых деталях, наличие “опорных точек”, т.е. таких элементов стандарта, которые помогают быстро и безошибочно построить или восстановить искомый образ,

б) к визуальным материалам: формирование образов осуществлять последовательно, постоянно восстанавливая (обновляя) предшествующие знания и навыки, постепенно расширяя диапазон и степень трудности заданий,

в) к результатам обучения: в итоге ученики должны уметь не только «строить заданные кривые по точкам», но и свободно составлять соответствующее уравнение по готовому чертежу.

Рассмотрим для примера комплект материалов “Направляющий прямоугольник прямой $y = -x$”**.** Для выполнения первого установленного нами требования мы применили переход от построения собственно направляющего прямоугольника прямой (параболы) к полному изображению этого объекта (см. приложение, с. 353-354, рис. 103-104).

Повторение пройденного (визуальные стандарты прямых $y = \mathbf{k}$ и $y = x$) осуществляется при заполнении теста со звездочкой. Постепенность и последовательность в формировании визуального стандарта прямой $y = -x$ обеспечена тренажерами 2-3 и серией 4. Тренажер 2 позволяет определить «направление» прямой, которую (по заданию тренажера 3) ученики должны построить самостоятельно. Серия 4 формирует обратные действия.

Каждая последующая задача представляет условия более сложные, чем предшествующая. В первом задании система отсчета традиционна: единице измерения соответствует одна клеточка всей “сетки”, во втором упражнении система отсчета изменена (по горизонтали на единицу приходятся три клеточки, по вертикали – две) и т.д. Далее эти ориентиры постепенно “изымаются” – ученик должен самостоятельно восстанавливать их. Последние задания («Правильные ответы» 5-8) позволяют еще раз обдумать полученные сведения, сделать полезные обобщения.

Численная обработка результатов работы по данной тетради приведена в последнем параграфе данного исследования. Здесь отметим, что в итоге все цели, поставленные нами при конструировании этих материалов, были выполнены. В частности (по свидетельству учителя) практически все ученики, участвующие в эксперименте, по аналитическому заданию линейной функции $y = x + \mathbf{k}$ (квадратичной $y = x^{2} + \mathbf{k}$) опознавали прямую (параболу), могли указать ее расположение по отношению к оси *У* и определить куда происходит сдвиг стандарта прямой (параболы).

Словами С.А. Шапоринского подведем важный итог. “Образ – это сплав зримого и знаемого. Последнее не только входит в содержание образа, но и определяет то, что извлекается из зримого. Наглядный образ – результат переработки того, что было запечатлено, было зримо” [196, с. 53].

2.3. Развитие визуального образа

В качестве примера проследим развитие одного из интереснейших визуальных математических стандартов – тригонометрической окружности. Важность данного образа неоспорима, поскольку весь курс “вычислительной” тригонометрии и теории тригонометрических функций базируется на ее свойствах.

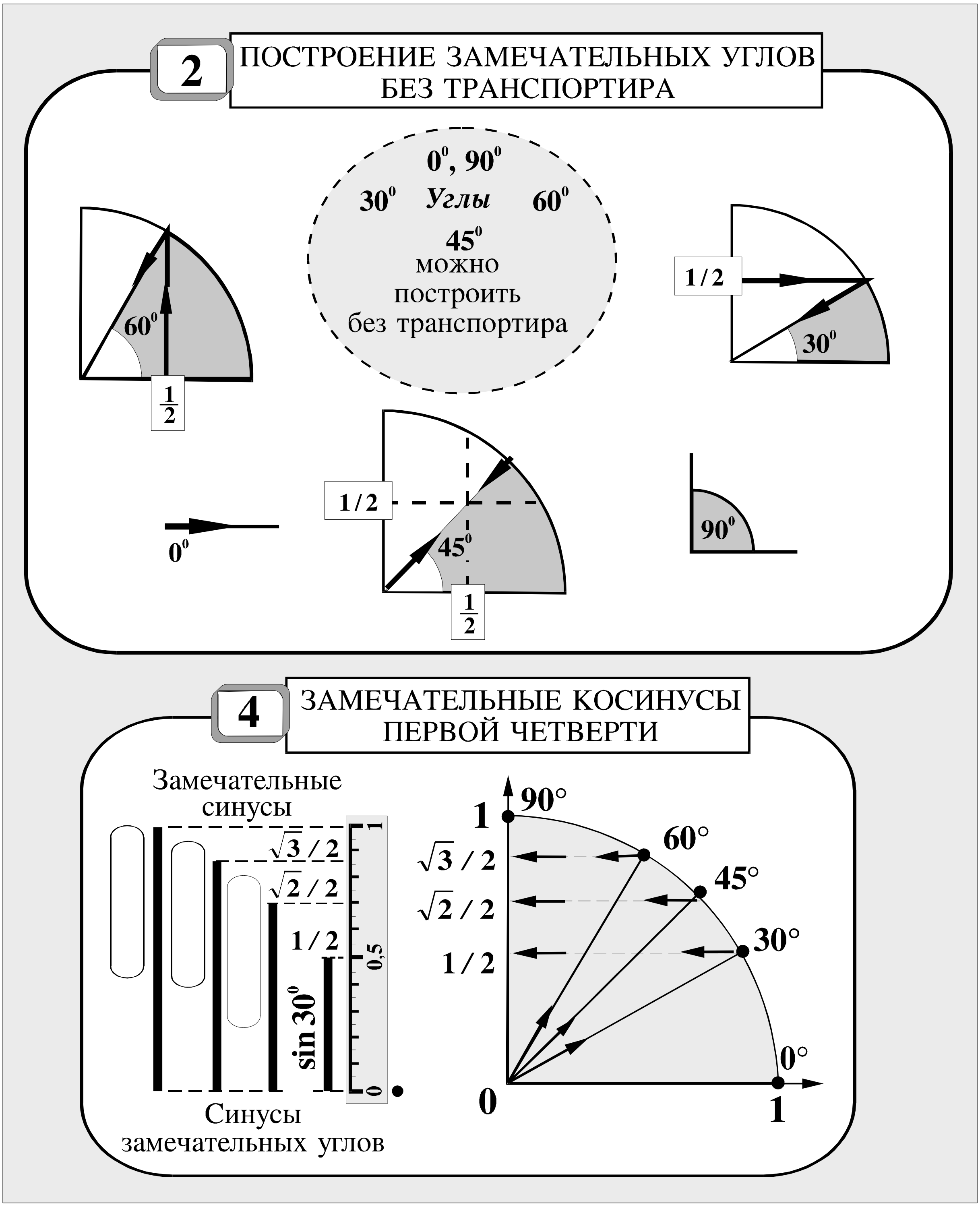

Рис. 48

Тригонометрическая окружность – это весьма сложный объект. Соединение строго организованного ряда числовых величин с адекватным рядом простейших геометрических понятий (углов и дуг) достаточно трудны для восприятия и усвоения. Именно поэтому здесь не следует торопиться – на первых этапах своего внедрения такой образ должен нести минимум информации (к примеру, соотношения числовых значений на самой окружности и ее диаметрах). Начинать непосредственное знакомство с тригонометрической окружностью естественно с ее первой четверти (рис. 48, вверху).

Здесь необходима постепенность, внимание к восприятию и усвоению учениками ее «секретов» – углы, которые можно построить без транспортира, величины синусов и косинусов этих углов и т.д. Запас необходимых визуальных представлений учащихся еще сравнительно невелик, поэтому здесь самым подробным образом *показан* ряд “замечательных” чисел.

Такой подход оказывается наиболее эффективным. Автор в своей практике (обобщение темы в выпускных классах школы, восстановление утраченных знаний на подготовительных курсах вуза), не раз убеждался в том, насколько полезна подобная наглядность (рис. 48, внизу). Типична реакция учащихся в этих случаях (цитируем): «Почему же нам это раньше не показали? Мы так мучились!», «Наконец-то я видела синусы!» и т.д.

Дальнейшая модификация образа может быть связана с определением конкретных линий – числовых осей, на которых отмечаются важные числовые значения, затем с общей демонстрацией этих значений (рис. 49). Очевидно, что информационные схемы – это наборы стандартных зрительных образов, которым свойственно гибкое изменение и развитие.

Схема “Замечательные острые углы и положительные числа” (см. приложение, с. 371, рис. 121) расширяет представления о свойствах первой четверти тригонометрической окружности. Содержание предшествующей схемы (рис. 49) полностью включено в нее так, что учащийся может при необходимости свободно восстановить исходные данные, порождающие очередной вариант временного справочника.

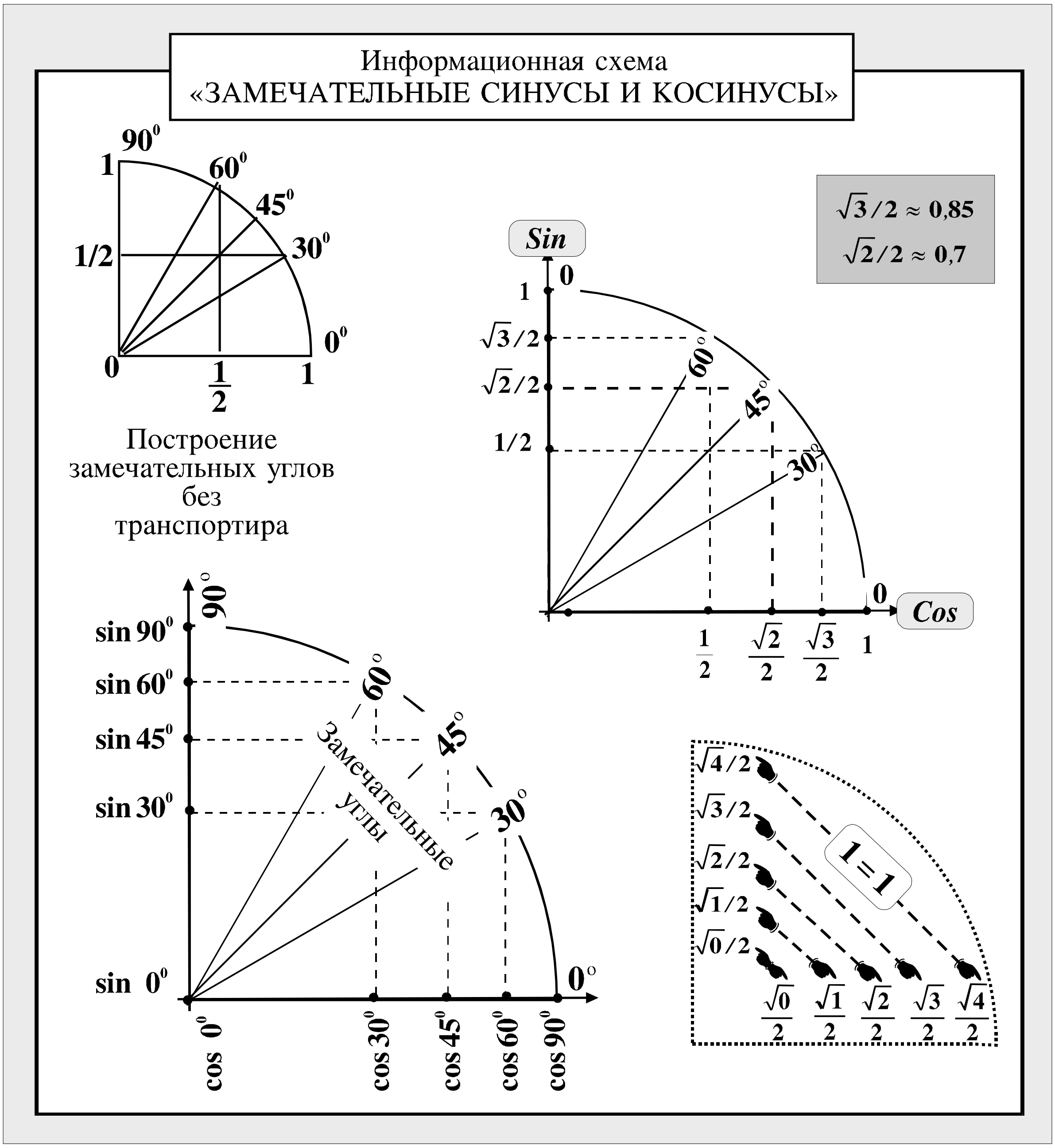

Рис. 49

Стандарт “Тригонометрическая окружность” представляет собой прекрасную модель для формирования связей между отдельными разделами математики. Действительно, “осваивая” тригонометрическую окружность, учащийся работает с целыми, дробными, рациональными и иррациональными числами, использует и одновременно обогащает свои геометрические представления о простейших плоских фигурах, учится проводить доказательные рассуждения и оформлять различного вида преобразования (см. приложение, с.368, рис. 118).

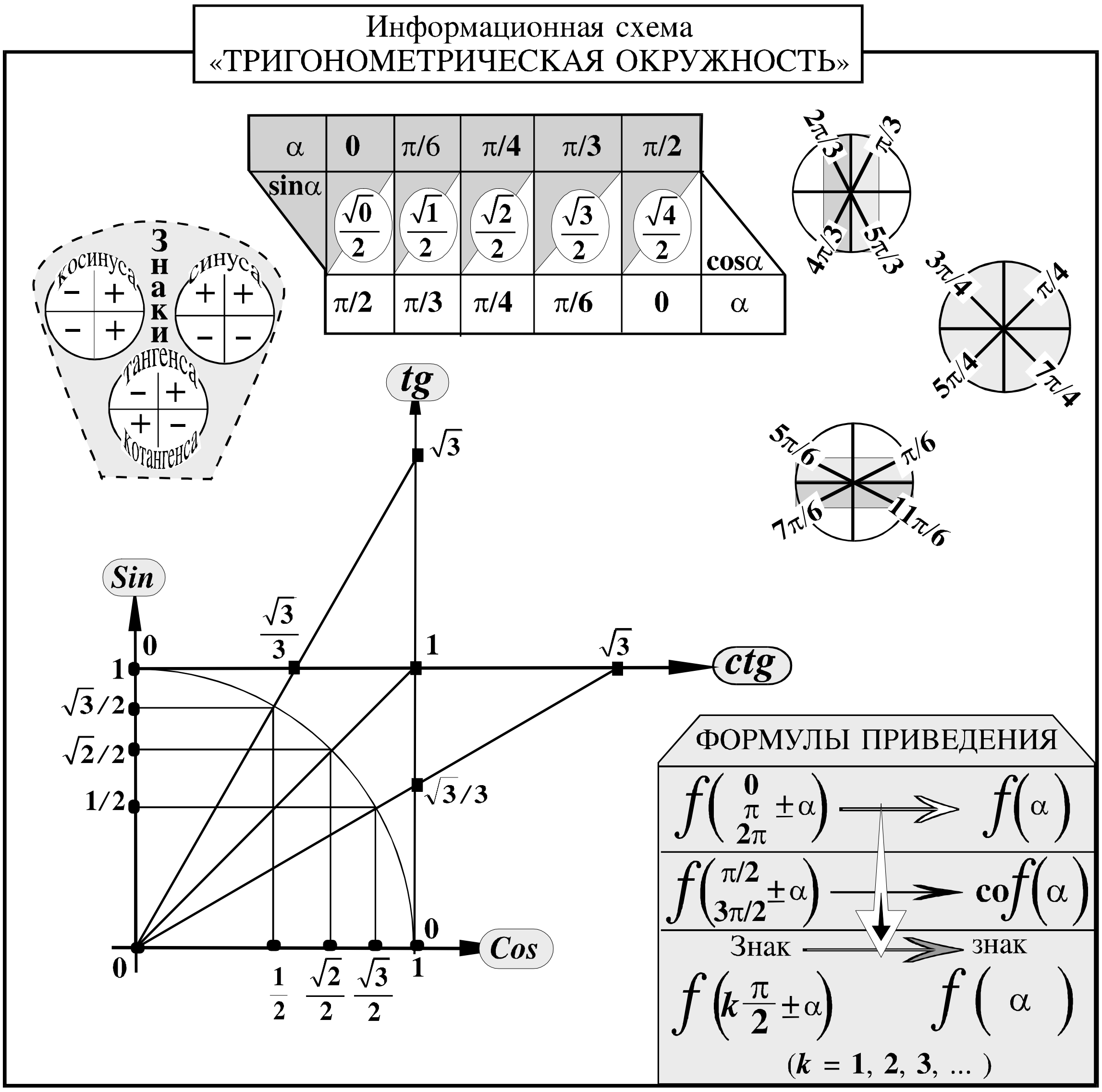

Рис. 50

Трансформации (развитию) может подвергаться не только вся схема, но и ее отдельный фрагмент (см. приложение, с. 367, рис. 177). Это поможет в сложных переходах, в тех случаях, когда на изучение темы школьной программой отпущено недостаточное количество часов. Подобная вспомогательная схема позволит учащимся легче и быстрее ориентироваться в дальнейших преобразованиях основной информационной схемы.

Информационная схема “Тригонометрическая окружность” (рис. 50) является итоговой, поскольку практически все сведения на данную тему представлены в ней явным или скрытым образом. Она формируется так, чтобы учащийся всегда мог самостоятельно восстановить ее. Эта схема соединяет в себе ряд стандартных образов, позволяющих описать: единичную окружность; оси синуса, косинуса, тангенса и котангенса; замечательные углы $\mathbf{0}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$; свойства и поведение тригонометрических функций; значения каждой из функций при конкретных (из перечисленных) значениях аргумента и т.д.

Использование данного справочника может быть многократным и разнообразным. Приведем примеры.

№1. Значения тригонометрических функций угла в $30°$.

№2. Период тангенса.

№3. Поведение синуса в пределах II четверти единичной окружности.

№4. Решение простейшего тригонометрического уравнения.

№5. Преобразование тригонометрического выражения типа “Упростить выражение $\sqrt{\mathbf{tg}^2\alpha+\mathbf{ctg}^2\alpha-2}$, если $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$” (см. приложение, с. 370, рис. 120).

Краткие итоги

Планомерное формирование визуального образа тригонометрической окружности может дать весьма ощутимые результаты. Так, например, в 1995/96 учебном году в 10 экономическом классе Мурманского морского лицея за двух часовое занятие был практически повторен весь теоретический и решено большое количество примеров из специальных дидактических комплектов (см. приложение, с. 483-486, рис. 233-236).

Урок поразил присутствующих (более 30 учителей) высокой продуктивностью. Это стало возможным в силу того, что ученики этого класса в течение трех лет обучались средствами визуальной методики преподавания практически по всем разделам школьного курса математики. Вот что пишет о визуальных средствах обучения преподаватель этого класса Н.Г. Неделько.

“Эффективность формирования ... новых понятий в значительной степени зависит от того, в каком виде произошло первое знакомство с ним, т.е. каким оказался первый зрительный образ, ставший затем “носителем” данного понятия (сила первого впечатления). Поэтому вначале изучения “Соотношения в прямоугольном треугольнике” лицеистам было показано много чертежей (картинок), в которых варьировались несущественные признаки ...

Чертежи и рисунки – эффективное средство формирования ... умения подмечать закономерности на основе наблюдений, вычислений, преобразований и сопоставлений ... Чертеж позволяет наглядно представить важную математическую идею, подвести их к осознанию даже неочевидного факта. Такой стиль обучения привел к тому, что мои ученики научились “видеть” тригонометрию”.