§1. Начальные этапы визуального поиска

Ученик начинает решать задачу. С заданием стандартного характера, оформленного знакомым образом, он обычно «справляется» вполне удовлетворительно. Если же условие отличается чем-либо от привычных, то следует остановка. Для того чтобы догадаться, как решать задачу, нужно уметь «хорошо видеть». Например, определять общее и различное, группировать объекты по определенным признакам, определять "стержневой" стандарт и т.д. В том случае, когда составить мысленный план решения задачи не удается, "живое созерцание" как бы ограничивается этапами: анализ визуальной информации и распознавание стандарта. Далее следует поиск выхода из создавшегося тупика. Таким образом, решение достаточно сложной для ученика математической задачи мы можем рассматривать как бы в двух "плоскостях" – наблюдения и визуальный поиск.

1. 1. Наблюдения, ориентиры и подсказки

Наблюдения – это результат взаимодействия двух первых этапов работы "живого созерцания" в процессе восприятия и переоформления данных информации. Оно позволяет обнаружить ориентир. Под **ориентиром учебной знаковой информации** мы понимаем то визуально наблюдаемое свойство – особенность объектов или структуры блоков информации, которые дают возможность осознать, понять и принять подсказку. Как следует из определения, ориентирами могут быть одинаковые элементы, ярко выраженные формульные или геометрические стандарты, словесные комментарии, наименования, сама "архитектура" связей между фрагментами информационного сообщения.

Навык наблюдений сам по себе не приходит, самостоятельно не образуется. Он формируется в результате целенаправленной работы учителя и ученика. Для формирования навыков наблюдений полезны специальные упражнения. Их можно составлять к каждому разделу курса, иногда предлагать комплекты заданий, основанных на материалах различных тем. В последнем случае желательно, чтобы они представляли собой единую модель, позволяли постепенно переходить от одного блока информации к другому. Приведем фрагменты таких комплектов.

Воспроизведения информации по памяти

Пример 1. Воспроизведите по памяти графики (рис. 59).

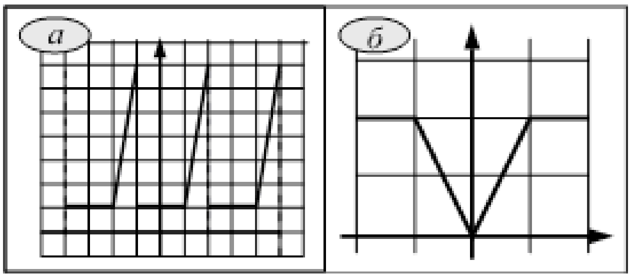


Рис. 59

Пример 2. Рассмотрите и запишите по памяти:

а) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$;

б) $\dfrac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^{x}\cdot\left(b+\frac{1}{a}\right)^{y-s}}{\left(b+\frac{1}{a}\right)^{y}\cdot\left(a+\frac{1}{b}\right)^{x-y}}$.

Анализ и преобразование информации

Пример 3. Осуществите подходящую замену пар элементов и запишите результат сведения систем к простейшим:

а) $\begin{cases} 2^x+2^y=5 \\ 2^{x+y}=4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}=-\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{3}{x+y-1}-\dfrac{1}{2x-y+3}=-\dfrac{7}{2} \end{cases}$; в) $\begin{cases} x\cdot y\cdot(x+y)=6 \\ x\cdot y+(x+y)=5 \end{cases}$.

Навык наблюдений можно формировать различными приемами: анализом готовых форм, выполнением упражнений серии, решением задач, посвященных исследованию определенного образа.

Исследование элементов и структуры информации

Пример 4. По графику функции (рис. 60-а) ответьте на следующие вопросы:

1. Сколько корней имеет уравнение $f(x)=0$?
2. Каковы (приближенно) корни уравнения $f(x)=-1$?
3. При каких значениях a уравнение $f(x)=a$ имеет хотя бы один корень?
4. При каких значениях a уравнение $f(x)=a$ имеет один корень?
5. Сколько корней имеет уравнение $f(x)=x^2$?

Пример 5. По графику функции $y = f(x)$ (рис. 60-б):

1. Решите уравнения: $f(x) = \mathbf{0}$; $f(x) = \mathbf{1}$; $f(x) = \mathbf{-2}$.
2. При каждом значении $y = \frac{\mathbf{2}x - \mathbf{1}}{x - \mathbf{2}}$ определите, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ при $a = -\mathbf{2}$; $a = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$; $a = \mathbf{0}$; $a = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ $a = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$.
3. Решите неравенства: $f(x) > \mathbf{0}$; $f(x) < \mathbf{1}$; $f(x) \geq \mathbf{-2}$.
4. Подберите такое значение a, чтобы неравенство $f(x) \geq a$ не имело решений; было бы верно при любом значении x.
5. Определите, сколько корней имеет уравнение $f(x) = x$.
6. При каждом значении k определите, сколько корней имеет уравнение $f(x) = kx$.

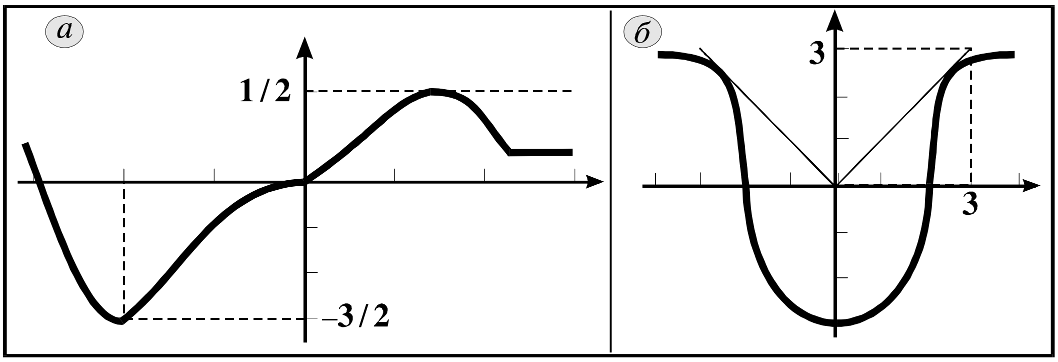


Рис. 60

Покажем на примере урока 8-го класса, как можно организовывать наблюдения учащихся в ходе построения теоретического положения.

Цель урока “Основное тригонометрическое тождество” (рис. 61) – вывод одного из важнейших положений тригонометрии. Урок состоит из 3-х этапов. На первом из них ученики вспоминают и обобщают известные им определения $\mathbf{sin}\,\alpha$ и $\mathbf{cos}\,\alpha$ и находят значения выражений с синусом и косинусом для треугольников различного вида (рис. 61, серии 1-4).

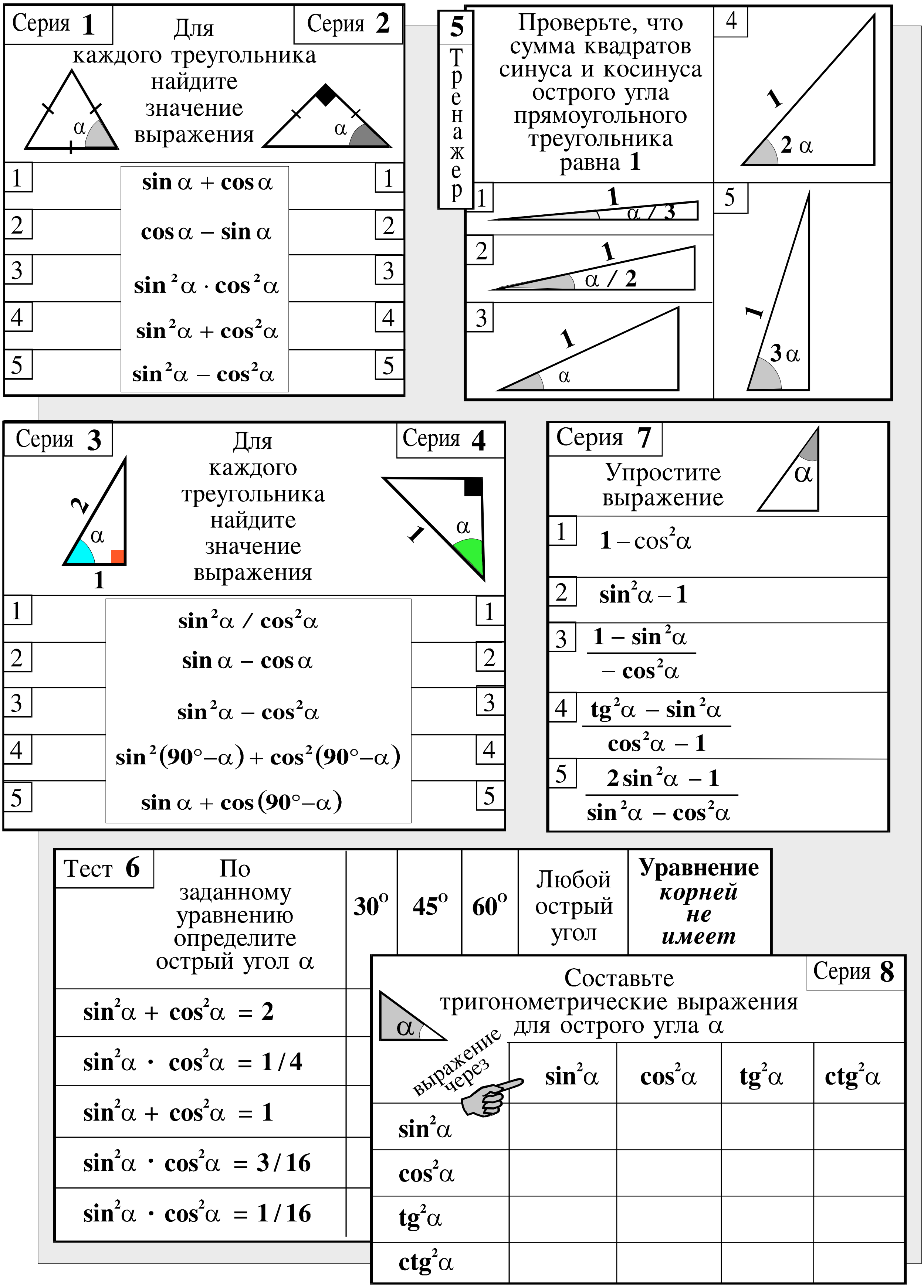

Серия 1
Для каждого треугольника найдите значение выражения
Серия 2
α
α
1 sin α + cos α 1
2 cos α – sin α 2
3 sin²α · cos²α 3
4 sin²α + cos²α 4
5 sin²α – cos²α 5
5 Тренажер
Проверьте, что сумма квадратов синуса и косинуса острого угла прямоугольного треугольника равна 1
1 1 α / 3
2 1 α / 2
3 1 α
4 1 2 α
5 1 3 α
Серия 3
Для каждого треугольника найдите значение выражения
Серия 4
2 α 1
1 α
1 sin²α / cos²α 1
2 sin α – cos α 2
3 sin²α – cos²α 3
4 sin²(90°–α) + cos²(90°–α) 4
5 sin α + cos (90°–α) 5
Серия 7
Упростите выражение
α
1 1 – cos²α
2 sin²α – 1
3 (1 – sin²α) / (– cos²α)
4 (tg²α – sin²α) / (cos²α – 1)
5 (2 sin²α – 1) / (sin²α – cos²α)
Тест 6
По заданному уравнению определите острый угол α
30° 45° 60° Любой острый угол Уравнение корней не имеет
sin²α + cos²α = 2
sin²α · cos²α = 1 / 4
sin²α + cos²α = 1
sin²α · cos²α = 3 / 16
sin²α · cos²α = 1 / 16
Серия 8
Составьте тригонометрические выражения для острого угла α
α
выражение через
sin²α cos²α tg²α ctg²α
sin²α
cos²α
tg²α
ctg²α

Рис. 61

Кроме этого устанавливается связь между синусом и косинусом одного и того же угла. Таким образом, происходит переход к главному (второму) моменту урока – выводу основного тригонометрического тождества.

Обычно учитель доказывает у доски, ученики повторяют готовое доказательство на местах в своих тетрадях. Здесь же учебный процесс формируется нетрадиционно. Работа с тренажером 5 позволяет учащимся самостоятельно доказать, что $\mathbf{sin}^2\alpha + \mathbf{cos}^2\alpha = \mathbf{1}$ и убедиться, что это равенство справедливо для любого угла α. Отсюда естественным образом возникает вопрос: “Справедливо ли это равенство для углов произвольного треугольника?”. Далее предлагается тест 6, который позволяет быстро проверить усвоение полученных знаний.

Третий этап урока позволяет подчеркнуть значение тригонометрического тождества. Серия 7 “показывает” возможность применения тождества для упрощения выражений. Материал серии 8 нацелен на будущее, он позволит продолжить начатую работу на следующих уроках при изучении дальнейшего материала.

Отыскать ориентир в условии задачи “с изюминкой” иногда довольно непросто. Нужна соответствующая техника и привычка к таким поискам. В условиях, записанных в виде формул, ориентирами могут быть закономерности, связывающие числовые данные, формулы сокращенного умножения, символы элементарных функций и т.д. В геометрических задачах ими чаще всего оказываются наиболее известные геометрические фигуры. Приведем еще два примера.

Пример 6. “Вычислить: $\dfrac{\mathbf{2^{19}\cdot 27^3 + 15\cdot 4^9 \cdot 9^4}}{\mathbf{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}}$”.

Зрительно анализируя компоненты числовой конструкции, выявляем “общее” – повторяющийся элемент – число **2** в качестве основания степени. Выделив отмеченный ориентир в структуре всех блоков данного выражения, получаем еще один ориентир – число **3** в качестве основания степени (рис. 62, вверху). Соответствующие преобразования позволяют без труда прийти к искомому ответу.

Для сопоставления обратимся к задаче геометрического характера.

А н а л и з	Р е ш е н и е
Сначала выделим число **2** в качестве основания степени:	$\dfrac{2^{19}\cdot 27^{3} + 15\cdot \left(2^{2}\right)^{9}\cdot 9^{4}}{\left(2\cdot 3\right)^{9}\cdot 2^{10} + \left(2^{2}\cdot 3\right)^{10}} =$
Затем выделим число **3** в качестве основания степени:	$= \dfrac{2^{19}\cdot \left(3^{3}\right)^{3} + 3\cdot 5\cdot 2^{18}\cdot \left(3^{2}\right)^{4}}{\left(2\cdot 3\right)^{9}\cdot 2^{10} + 2^{20}\cdot 3^{10}} =$
Применим формулу преобразования степени в степень:	$= \dfrac{2^{19}\cdot 3^{9} + 5\cdot 2^{18}\cdot 3^{9}}{2^{19}\cdot 3^{9} + 2^{20}\cdot 3^{10}} =$
Приходим к искомому ответу:	$= \dfrac{2^{18}\cdot 3^{9}\left(2+5\right)}{2^{19}\cdot 3^{9}\left(1+2\cdot 3\right)} = \dfrac{1}{2}$

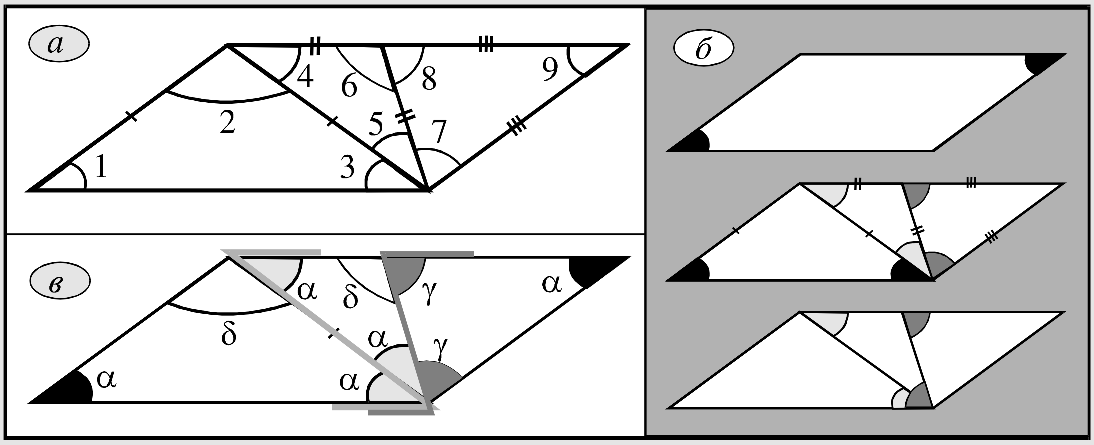


Рис. 62

Пример 7. “На рис. 62 (внизу) изображен параллелограмм. Определить величины отмеченных на нем углов”. На рис. 62-б показаны главные ориентиры: противоположные углы параллелограмма, углы при основаниях равнобедренных треугольников и накрест лежащие углы при двух параллельных прямых, пересеченных третьей. Рис. 62-в визуально реализует результат процесса свертывания, который учащийся получил при формировании схемы “Углы” (см. приложение, с. 375, рис. 125).

Пример 8. Вам предлагается вывод формулы, выражающей косинус через тангенс. Выведите формулу, выражающую синус через котангенс» (рис. 63).

Вывод формулы	Ориентиры и подсказки
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\Downarrow$	$:\cos^2 x$ $(\cos x \neq 0)$
$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\Downarrow$	$\frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}^2 x$
$\mathrm{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\Downarrow$	$a = \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = b$ $(a, b \neq 0)$
$\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x + 1} = \cos^2 x$ $\Downarrow$	$\pm\sqrt{..}$
$\frac{1}{\pm\sqrt{\mathrm{tg}^2 x + 1}} = \cos x$	

Рис. 63

Пополнение «банка» визуальных стандартов может стать темой школьного урока. Представляем описание урока по теме “Функции $y=x^{2n}$ и $y=x^{2n+1}$ при $n \in N$” и материалов, которые мы использовали в ходе учебных наблюдений, приводящих к обнаружению ориентиров и подсказок, помогающих решить учебную задачу. Целью урока является знакомство учеников со степенной функцией (при натуральных показателях). Результатом этого урока должно было быть образование нового навыка: распознавание графиков функций $y=x^{2n}$ и $y=x^{2n+1}$ при $n \in N$. Переход к новой теме начинается с повторения особенностей графиков функций $y=x$, $y=x^2$ и $y=x^3$. При помощи наблюдений, сопутствующих процессу обсуждения графика функции $y= x^4$, ученики могут прийти к выводу, что кривая, являющаяся графиком этой функции, похожа на график функции $y = x^2$, а график функции $y = x^5$ похож на график $y = x^3$. Правильность выводов можно проверить по информационной схеме “Параболы четных и нечетных степеней”. (см. приложение, с. 475, рис. 225). Все эти действия приводят к обобщению: график функции $y = x^{2n}$ при $n \in N$ строится по типу графика функции $y = x^2$, а график $y = x^{2n+1}$ – аналогично графику $y = x^3$ (при $n \in N$). Такие обобщения, полученные в результате наблюдений, позволяют за один урок решить достаточно большое количество различных задач, ориентированных на формирование намеченного в цели урока навыка (см. приложение, с. 476, рис. 226). Данная тема не входит в перечень обязательных. Ее можно «вписать» в план занятий за счет резерва времени, образующегося благодаря постоянному и целенаправленному использованию подобных дидактических материалов, что совершенно не исключает применение обычных учебных пособий и приемов обучения.

Итак, в качестве ориентира мы принимаем тот первичный результат анализа данных, который позволяет выявить общее, присущее отдельным блокам или элементам информационного сообщения. В эту группу следует отнести стандарты формульного и геометрического характера, структуру логически основополагающих связей, текстовые «тонкости» исходного задания. Приведем образцы упражнений, направленных на формирование навыка обнаружения ориентира и подсказки.

Пример 9. Определите по графику число корней уравнения:

$$\text{а) } \mathbf{2}^x = \mathbf{3} - \mathbf{2}x - x^{\mathbf{2}}; \quad \text{б) } \mathbf{log_2} x = x^{\mathbf{2}} + x - \mathbf{2}; \quad \text{в) } \mathbf{sin}\, x = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} x - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

Подсказкой здесь является предложение провести исследование «по графику», ориентиром для «выхода» на правильный ответ может служить количество точек пересечений этих графиков.

Пример 10. Обсуждая успехи своего ученика, учитель математики так отозвался о нем: он очень мало знает, но у него положительная производная. Все поняли, что хотел сказать учитель, – скорость приращения знаний у ученика положительна, а это есть залог того, что знания его возрастут. Подумайте, как вы могли бы характеризовать три разные кривые роста знаний, изображенных на рис. 64.

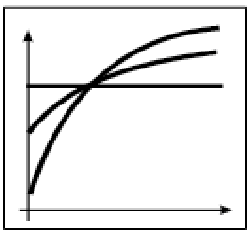


Рис. 64

Пример 11. На рис. 110 (см. приложение, с. 360, в центре) изображены графики 6 функций. Определите по графику, какая из них имеет обратную, а какая – нет.

Пример 12. Нарисуйте фигуры, площади которых задаются следующими интегралами: а) $\int\limits_0^2 x^2 dx$; б) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2} dx$; в) $\int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx$; г) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$.

Здесь в роли ориентиров–подсказок выступают подынтегральные функции и пределы интегрирования. Изобразив графики функций и заштриховав их подграфики на заданных промежутках, мы приходим к нужному ответу.

1.2. Формирование догадки

Ориентир позволяет перейти к формированию догадки. Под догадкой мы понимаем “сообразительность, способность улавливать существо дела” [126]. Догадка есть необходимая, но, к сожалению, почти неразвитая у подавляющего большинства учащихся сторона мышления.

Догадываться ученик может в ходе поиска одинакового, преобразования отдельных блоков информации к знакомым стандартам. Чтобы помочь ученику догадаться, преподаватель должен постоянно “наводить” его на размышления: “Что особенного есть в данном выражении, рисунке, тексте? Из-за чего я не могу решить эту задачу?” [21-22, 109, 133-135, 189-190 и др.]. Таким образом, мы приходим к выводу: ориентиры и подсказки образуют одинаковые элементы и знакомые стандарты, а догадку следует искать в том особенном, что существенно отличает предъявляемую информацию от всех прочих. Причем, когда данных слишком много, догадку можно наметить уменьшением объема информации, т.е. преобразованием ее исходной структуры к визуально воспринимаемому объекту.

Приведем пример из практики автора. При решении задачи “Вычислить $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}\cdot\sqrt[16]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[512]{a}$” большинство учеников оказалось в затруднении. Выяснилось, что их сбивало с толку количество радикалов. Как только это обстоятельство было выведено наружу (высказано словами), сразу же кто-то догадался – подсказка в последовательном удвоении показателей радикалов. А дальше опять последовала остановка. Тогда был использован прием сужения диапазона поиска. Начали с расшифровки “$\sqrt{a} = a^{1/2}$”. Постепенно наращивая массив данных, составили серию, которая позволила угадать ответ (рис. 65).

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} = a^{3/4}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[8]{a} = a^{7/8}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[8]{a} \cdot \sqrt[16]{a} = a^{15/16}$$

. . . .

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[8]{a} \cdot \sqrt[16]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[512]{a} = a^{511/512} = \sqrt[512]{a^{511}}$$

Рис. 65

Паузы на уроке в ожидании догадки учащихся неизбежны. Но в целом реакция может быть столь значительной, что вполне окупит “потерю времени”. Подобные групповые поиски, несмотря на сложность их осуществления и большое напряжение, увлекают учеников. Их активность и интерес заметно повышаются от урока к уроку. Более того, при отдельных сходных (даже не всегда явно определяемых на первый взгляд) моментах, в классе найдется ученик, который, вспомнив аналог, задает направление поиска. Яркий необычный пример, специальное, визуально ясное оформление его решения всплывут в памяти, помогут учащемуся в нужный момент ввести такой аналог при решении достаточно сложной задачи.

Рассмотрим пример: “Вычислить значение выражения

$$\mathbf{lgtg1° + lgtg2° + lgtg3° + \ldots + lgtg89°}”.$$

Предварительно вспомним “секрет” известной задачи: “Вычислить устно сумму чисел от единицы до ста” (рис. 66). Теперь применим эту модель для реализации предшествующего задания. Для начала учтем явно заданное преобразование (рис. 66-а). Затем приступим к нахождению ориентира – обнаружению "одинакового" и соответствующих стандартов (рис. 66-б). Чтобы "получить" одинаковые элементы, нужно перевести $\mathbf{tg}(\mathbf{90°}-\alpha)$ в $\mathbf{ctg}\,\alpha$ (рис. 66-в). На этом процесс практически завершен.

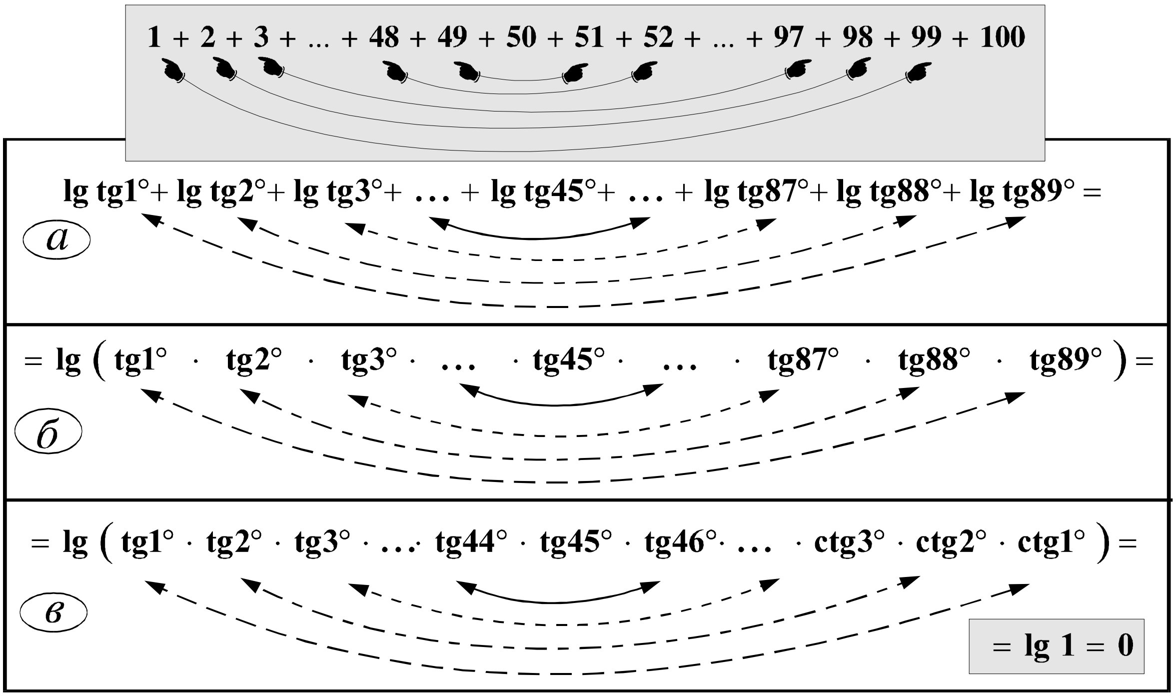


Рис. 66

В знаковой информации подсказкой может являться специальная раскраска или штриховка рисунка, выделение жирным шрифтом или специальное расположение элементов формулы. В тексте ею может оказаться слово, выступающее в роли эпитета или синонима.

1.3. Поиск скрытой информации

Вербальные и формульные фрагменты, описывающие какое-либо условие учебной задачи, не всегда облегчают понимание ее содержания. Затруднения обычно связаны с "недосказанностью", с недостаточной полнотой (для учащегося!) ее данных. Такие задачи предусматривают извлечение дополнительных сведений, основанных на знании соответствующих фрагментов теории. Тупик можно преодолеть, если в процесс решения задачи вводить зрительные образы и формульные стандарты, которые предусмотрены ее условием, но не выведены наружу. Для внесения ясности начнем с примера.

Задача. “В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна a, периметр равен p. Найти площадь треугольника”.

Допустим, что учащийся осуществил перевод. Он рассуждает: треугольник прямоугольный, отсюда, по теореме Пифагора имеем: $x^2+y^2=a^2$. Периметр p равен $x+y+a$. Площадь треугольника вычисляется по формуле $S_\Delta=\frac{1}{2}x\cdot y$.

Итак, ученик записал задачу в виде: $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=a^2 \\ x+y+a=p \\ S=\frac{1}{2}x\cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad S=?$ Ясно, что неизвестными на самом деле являются x и y. Как их найти? Не помогает ни “живое созерцание”, ни визуальный поиск. Задача что-то “прячет”, скрывает от ученика. Чтобы справиться с ней, он должен знать не только как искать, но и где искать. В подобных случаях нужно “призвать на помощь” неявно заданную информацию. Объединим элементы, содержащие неизвестные x и y, и посмотрим, где они могут встретиться одновременно (т. е. отыщем подходящий формульный стандарт). Выражения x^2+y^2, $x+y$, $x\cdot y$ входят в формулу квадрата суммы. Это и есть та скрытая информация, которая позволит получить ответ на вопрос.

Перейдем к непосредственному обсуждению данной проблемы. Начнем с вопроса: какие явные и какие скрытые сведения может извлечь учащийся из недостаточно полной для него информации. То, что ученик видит, понимает и может перевести в картинку или формулу – это явная для него информация. Следовательно, под **явно заданной информацией** будем понимать такие данные исходного информационного сообщения, которые непосредственно воспринимаются (извлекаются) зрением – «*Durch die Augen in den Sinn*» (через глаз в смысл). Сюда же относятся те результаты переоформления, которые либо заложены в соответствующих ***известных ученику*** основных визуальных или формульных образах, либо содержатся в четко установленных ***хорошо знакомых ему*** отношениях между ними. Распознавание явно заданной информации может быть осуществлено мысленным либо письменным представлением и оформлением данных

К **неявно заданным информационным сообщениям** отнесем такие данные, которые непосредственно зрением не воспринимаются. Они требуют расчленения информации на блоки, обсуждения следствий из определений объектов, их свойств или связей между ними. Последние чаще всего входят в список обязательных знаний и с помощью различных схем могут восстанавливаться достаточно быстро. Так в примере “$\mathbf{lg10^{\cos^2 x} + \log_3 3^{\cos^2 x} = ?}$” к неявным можно причислить отношения: $\mathbf{\log}_a a = \mathbf{1}$, $\mathbf{\log}_b a^p = p\,\mathbf{\log}_b a$.

Разумеется, для подготовленных учащихся подобные условия сразу выступают как явные. Визуальный поиск напрямую связан с хорошо известными математическими объектами и операциями над ними. Дело учителя заранее или в ходе урока регистрировать «круг» скрытого для большинства своих учеников, направить на поиск известных, но не выведенных в нужный момент сознанием, необходимых отношений, организовывать извлечение стандартов из памяти подходящими вопросами. Деление информационных сообщений на явно и неявно заданные весьма условно. Если учащийся хорошо усвоил перевод, например, текстовой информации в формулу, то все данные для него “открыты” – выступают как явные. Если нет, – требуется поиск необходимых сведений, недоступных непосредственному восприятию.

Задача. “На расстоянии **3** *см* от центра шара проведено сечение площадью **16** $см^{\mathbf{2}}$. Найти объем шара”.

Построим схематический чертеж и проведем анализ имеющейся вербальной информации (рис. 67-а). Искомое – объем шара, который вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (формульный стандарт). Следовательно, задача сводится к отысканию радиуса шара R. Это явная информация. Отметим ее на рисунке.

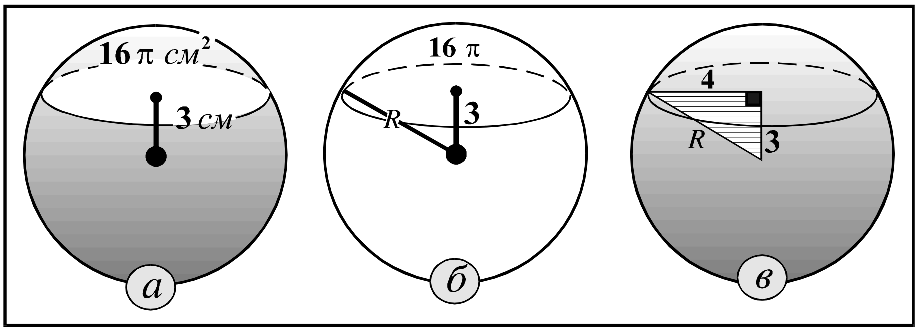


Рис. 67

Следующая информация "проведено сечение" означает, что не затушеванная фигура есть окружность с площадью $S = \pi r^2$, имеющая свой радиус r, который мы также внесем в визуальную модель (рис. 67-б). Теперь решение очевидно: обнаруживается замечательный стандартный образ – прямоугольный треугольник со сторонами **3** и **4**, гипотенуза которого (т.е. радиус шара) равна **5**. Отсюда $V = \frac{4\pi}{3}5^3$ $см^3$ (рис. 67-в).

Чрезвычайно полезны текстовые ***альтернативные*** задачи, которых, к сожалению, совершенно недостаточно "в арсенале" учителя математики. Приведем два примера.

<u>Задача.</u> "Трос, крепящий мачту длиной **8** метров составляет с горизонтом угол в $60°$. На каком расстоянии от основания мачты укреплен на земле трос?"

Данная "Задача о тросе и мачте" – это математический парафраз знаменитого указа одной из русских императриц: «Казнить нельзя помиловать». Пропущенная запятая создает альтернативу, "разрешить" которую можно только если вдуматься в смысл вопроса задачи (см. приложение, с. 411, рис. 161, вверху, слева).

На одном из уроков в 6-м классе при формировании понятия модуля числа, автором данного исследования был предложен вопрос: “Как правильно сказать: опустился на глубину **300** метров или опустился глубину на **–300** метров?” (см. приложение, с. 411, рис. 161, внизу, слева). Ученики долго обсуждали этот вопрос сообща и пришли к правильному выводу по следующим ориентирам:

– слово “глубина” уже показывает направление (вниз от начала отсчета),

– слово “опустился” также указывает на направление в сторону минуса.

Следовательно, выражение «опустился на **300** метров» полностью отражает существо дела.

Ясно, что подобные примеры чрезвычайно редки, но тем более высока их ценность.

Перевод информации с одного языка на другой как бы заново формирует очередную задачу, вытекающую из исходной. Факты, о которых “умалчивает” первоначальный текст или формула, выведены наружу и дальнейшие действия определяются использованием явной и поиском неявно заданной информации уже на новом, более обозримом материале. Мы как бы начинаем решать новую задачу. Благодаря последовательному анализу и соответствующим преобразованиям часто удается сузить диапазон поиска, свести процесс к обнаружению “элементарного основания” искомого вопроса.

Извлечение скрытой информации имеет особое значение для решения геометрических задач. Вербальная информация, обычно описывающая их условия, не всегда способствует обнаружению ориентиров, а иногда даже тормозит восприятие подсказки. При решении таких задач часто приходится осуществлять дополнительные построения, чтобы необходимые сведения оказались визуально обозримы.

Важность формирования навыков извлечения дополнительных данных информационных сообщений диктуется не только потребностями получения математического образования. Умение расшифровывать, раскрывать, дополнять вербальные, формульные или геометрические структуры могут стать инструментом при изучении других общеобразовательных дисциплин: “ ... активность в широком смысле в обучении математике не отличается существенно от активности учащихся в процессе обучения другим предметам. Это вообще активная мыслительная деятельность. Активность в узком смысле – это специфическая активность, мыслительная деятельность определенной структуры, свойственная для математики и называемая поэтому “математической” деятельностью. Если ученик проявляет активность в узком смысле, то он проявляет активность и в широком смысле” [177, с. 71].

1.4. Визуальный план решения задачи

Приступим к описанию очередной “параллели” между “живым созерцанием” и визуальным поиском. Мысленному составлению плана работы мы соотнесем визуальный (письменный или устный) план решения задачи. Подобный план рождается также в ходе наблюдений, экспериментов, определяющих отдельные этапы визуального поиска. Главной ценностью данного процесса является отделение существенного от несущественного. Визуальный план решения задачи в данной работе демонстрировался много раз. В предлагаемых нами иллюстрациях он выступает как “Анализ”, благодаря которому определяются основные стандарты, и намечается ход решения (см. приложение, с. 477-478, рис. 227-228).

Выявление существенного в условии задачи в большинстве случаев строится на определении зависимости между переменными и параметрами. Имеются две возможности: либо числовые значения параметров вообще не влияют на структуру связей, либо определенное числовое значение какого-либо параметра является решающим фактором. В первом случае существенной является сама структура зависимости между отдельными блоками информационного сообщения. Подобная структура визуально и логически воспринимаема (обозрима). Во втором – структура ограничена действием параметра, причем последний обычно влечет за собой неявно заданные дополнения. Рассмотрим примеры.

В приложении на с. 441-442 (рис. 161-162) представлены текстовые задачи, к условиям которых приложены рисунки-подсказки, “обнажающие” структуры заложенных в текстах информаций. Обозримость подобной структуры помогает найти ответ на искомые вопросы. Если же подобные подсказки отсутствуют, то информация, сосредоточенная в них, является для большинства учеников скрытой, неявной. От того, насколько прочно сформирован навык перевода таких задач в рисунок или формулу и зависит успешность их решения.

Задача. “Дана прямая $by - ax - c = \mathbf{0}$. Определить угловой коэффициент другой прямой, если известно, что: а) прямые параллельны;

б) прямые перпендикулярны”.

Что существенно, например, для решения вопроса (**а**)? Представив параллельные прямые, приходим к выводу: угловые коэффициенты таких прямых должны совпадать. Для численных значений их следует учесть лишь одно требование: $b \neq \mathbf{0}$. Во втором случае (**б**) структура связей между прямыми гораздо сложнее, в уме ее представить трудно, поэтому придется прибегнуть к наблюдениям. Представим решение задачи в ситуации поиска так, как если бы учащийся забыл многое из того, что он должен знать по данному материалу.

Учащиеся осуществляют перевод (рис. 68-а и -б). Они начинают думать.

– Что требуется найти? (Угловые коэффициенты неизвестных прямых).

– Где их можно найти? (В формуле прямой с угловым коэффициентом).

– Когда мы сумеем вычислить нужные k? (Когда определим, как отражается характер связей между прямыми на значениях этого параметра).

Следовательно, необходимо разобраться в этом характере связей между прямыми (в каждом отдельном случае). Таким образом, мы выявляем существенное – главным являются не конкретные значения параметров, а связи между теми объектами, которые порождают их.

Далее следует второй “виток” цикла.

– Что характеризует связи между парами прямых ? (Углы их наклона).

Отсюда сразу ответ на первый вопрос задачи: $k_{\mathbf{1}}=k_{\mathbf{2}}$ (рис. 68-а).

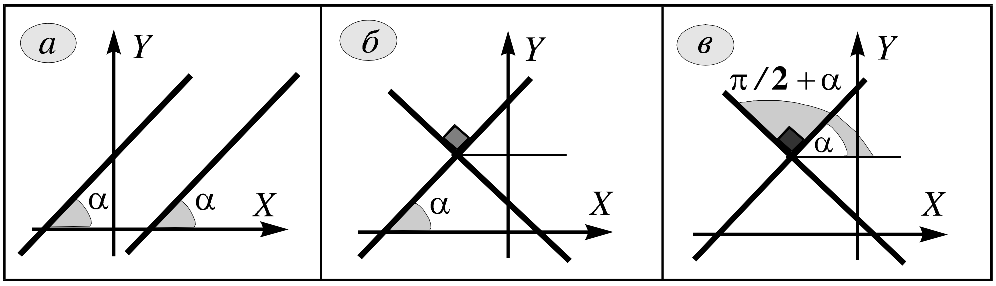


Рис. 68

Ученики продолжают поиск. На рис. 68-б структура связи между прямыми принципиально иная. Необходимо найти дополнительные сведения – скрытые от глаз условия. Следовательно, рис. 68-в придется преобразовать, дополнить так, чтобы эти условия оказались выведенными наружу.

– Когда мы сможем разгадать “секрет” задачи? (Когда найдем ориентир).

– Где искать его? (Как обычно, в одинаковом или стандартах).

Поиск одинакового приводит к рис. 68-с, позволяющему представить результаты наблюдений в виде формулы:

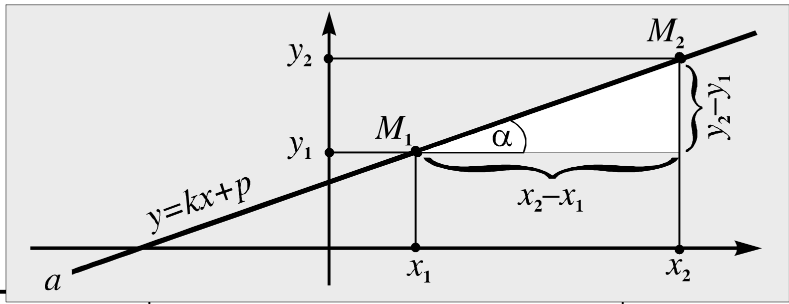
$$k_2 = \mathbf{tg}(p/2 + a) = -\mathbf{ctg}a = -\frac{1}{\mathbf{tg}a} = -\frac{1}{k_1}.$$

Таким образом ученик убеждается, что он может самостоятельно разобраться в трудной или непривычной для него задаче, если будет ставить (сам себе) вопросы и искать на них ответы.

Приведем еще одну иллюстрацию этого процесса на конкретном примере.

Задача. “Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом, если эта прямая проходит через точки $(\mathbf{1}\,;\mathbf{2})$ и $(\mathbf{3}\,;\mathbf{6})$”.

Проведем рассуждения, опираясь на “живое созерцание” учащихся. Визуальный перевод дает рис. 69 (вверху). Восстановив формульный стандарт – уравнение прямой с угловым коэффициентом, приходим к выводу, что значения абсцисс и ординат точек, через которые проходит прямая, не существенны. Ими могли оказаться любые другие точки данной прямой. Все основополагающие моменты условия обозначены на чертеже. Теперь “рассортируем” совокупность данных так, как показано на рис. 69. (Кружочками обведены символы объектов, получение значений которых и есть цель решения).



Объект поиска	Существенные данные ситуации	Конкретные данные задачи
$a : y = k x + \boxed{p}$	$M_1 , M_2 \in a$	$M_1 \, (\mathbf{1} ; \mathbf{2})$ $M_2 \, (\mathbf{3} ; \mathbf{6})$
$k = ?$	$k = \mathbf{tg}\,\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$k = \dfrac{\mathbf{6 - 2}}{\mathbf{3 - 1}} = \mathbf{2}$
$\boxed{p} = ?$	$y = k x + \boxed{p}$ $M_1 \in a \Longrightarrow y_1 = k x_1 + \boxed{p}$ $\boxed{p} = y_1 - k x_1$	$\boxed{p} = \mathbf{2 - 2 \cdot 1 = 0}$
$a : y = k x + \boxed{p}$	$\Longrightarrow$	$a : \; y = \mathbf{2} x$

Рис. 69

Остановимся еще на одном случае и в приложении покажем ***визуально,*** как можно организовать наблюдения, отыскивая ориентиры и подсказки в материале формульной информации (с. 442, рис. 172, внизу).

<u>Задача</u>. “Разложить на множители: $x - \mathbf{3}\sqrt{x\,y} + \mathbf{2}y \;\; (x, y > \mathbf{0})$”.

Данная задача относится к разряду сложных – путь ее решения совсем не очевиден. Здесь подсказка кроется в самом условии задачи – разложение выражения на множители подразумевает наличие одинаковых элементов, объединив которые, можно получить искомый результат.

Резник Н.А. Методические основы использования визуального мышления в математическом образовании школьника: дис. ... уч. ст. докт. пед. наук. – СПб., 1997. – 500 с.

Краткие итоги

Итоги наших изысканий мы отразили в специальной схеме, представляющей наш взгляд на работу визуального мышления в процессе решения учебной задачи (рис. 70).

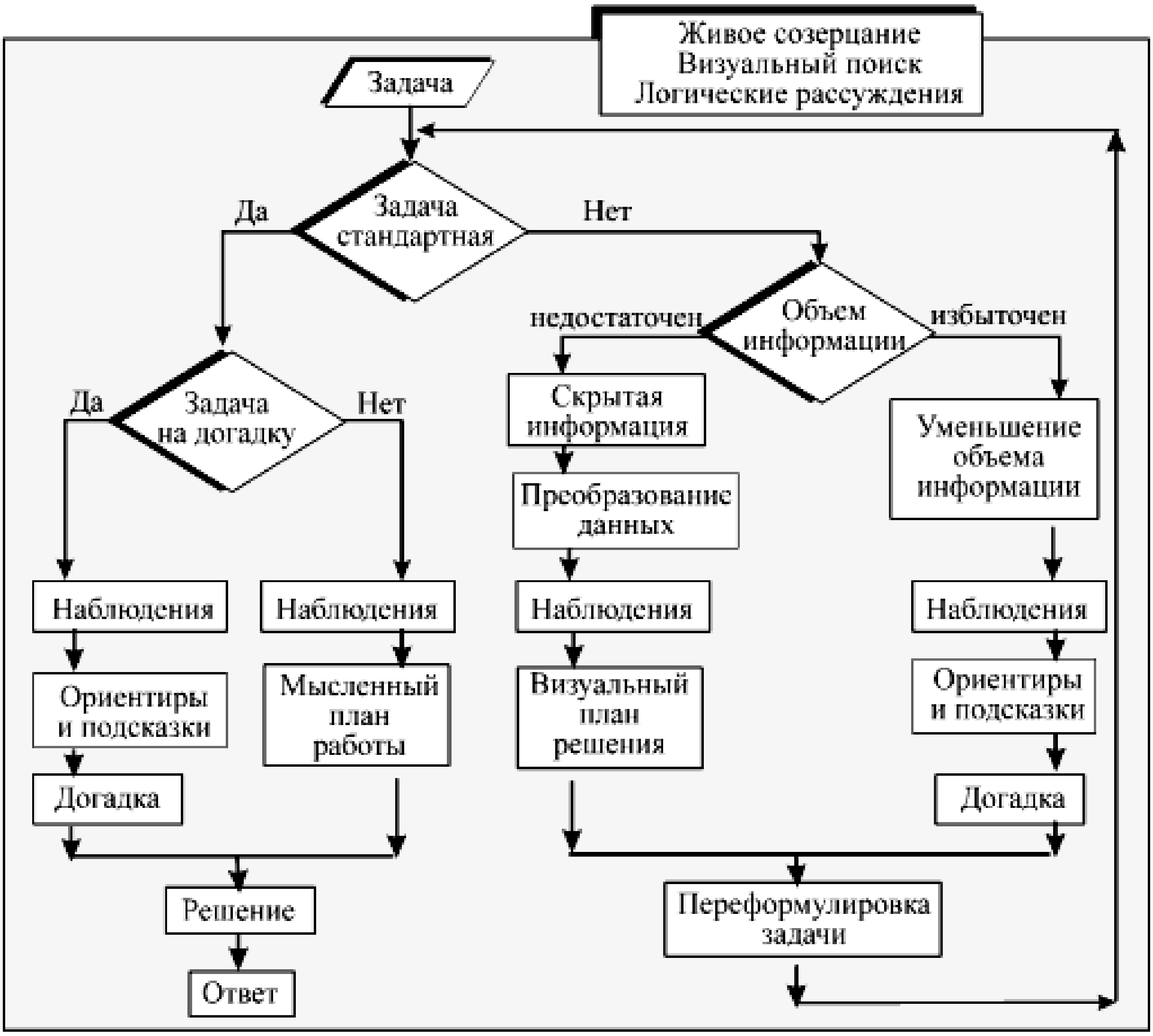


Рис. 70

Выше уже неоднократно акцентировалось: во многих случаях помогает прием отыскания одинаковых элементов. При этом становится возможным выявить в качестве подсказок некоторые формульные или геометрические стандарты. Такие поиски позволяют ученику понять, что он может самостоятельно разобраться в трудной или непривычной для него задаче, если будет ставить (сам себе) вопросы и искать на них ответы.

Практика показывает, что демонстрация не только собственно решения задачи, но и возможного “подхода к ней” весьма интересует учащихся. Каждому интересно и полезно понять, каким образом мыслит преподаватель, откуда он берет “подсказки”, как строит модель для аналогичных мыслительных действий.