§2. Формирование навыков визуального поиска

Существенные моменты сопоставления того “что мы видим» с тем “как мы видим» почти не затрагиваются в методиках преподавания школьных дисциплин. Вполне возможно, что именно поэтому наши ученики в большинстве своем не только не умеют “рассуждать на заданную тему, но зачастую не могут правильно воспроизвести визуальную информацию, даже такую, с которой практически они встречаются на каждом шагу.

Не секрет, что многим ученикам с трудом даются изображения многогранников и тел вращения (не говоря уже о возможных их комбинациях и сечениях). Процесс перехода от созерцания объекта к воспроизведению изображения на бумаге в сущности есть перевод, который состоит из определенных этапов: сравнения, сопоставления, расчленения, сборки и т.д.

2.1. Накопление визуального опыта

Для демонстрации разрабатываемых нами методов приведем в качестве примера информационную тетрадь “Изображения многогранников”. При составлении данной тетради мы положили в основу один из принципов “Педагогики математики»: “строгие математические формулировки (определений, теорем) должны быть итогом (подчеркнуто нами) изучения соответствующих свойств, отношений на интуитивном уровне» [177]. Основным здесь является поиск алгоритма, формирование каждого шага которого контролируется визуальным мышлением. При этом все операции будут постепенно свертываться, переходить в непрерывное действие.

Легче всего конструируется изображение многогранника без выделения видимых и невидимых линий. Такой рисунок (следуя Перельману) мы назвали каркасом (рис. 71-1). По словарю Ожегова [126] “Каркас – это остов, костяк какого-нибудь сооружения, изделия». У нас это всего лишь визуальная модель, набросок. Учащийся может задать (нарисовать) любое основание (многоугольник) и, перенеся его на определенное расстояние в некотором направлении, получить “дубликат». Затем останется лишь соединить соответствующие вершины.

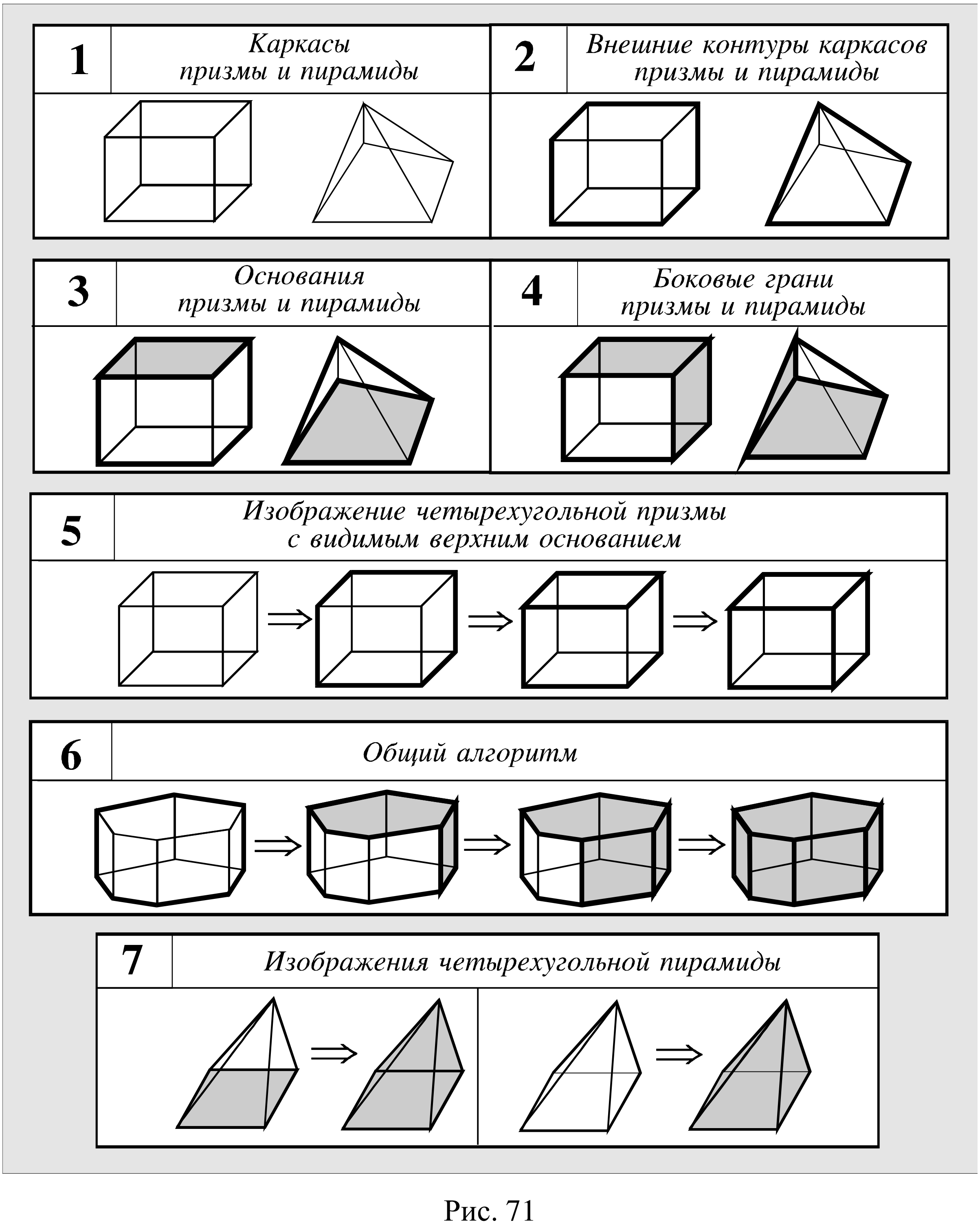

Рис. 71

Следующий шаг представлен там же на рис. 71-2. Для того чтобы правильно изобразить объект, мы для начала должны выделить (ограничить) его изображение на плоскости листа так же, как наше зрение выделяет его среди всех остальных предметов в пространстве. Учащийся может не ограничиваться в выборе многоугольника, который будет представлять на изображении видимое (или невидимое) основание. В случае пирамиды им может оказаться точка – вершина каркаса пирамиды. Очередной шаг – выделение одной из крайних (с точки зрения созерцания) боковых граней (рис. 71-4). Накопление визуального опыта продолжается, – осуществляется последовательное и непрерывное "проявление" видимых деталей, приводящее к необходимому свертыванию. Теперь учащийся может объединить все шаги на одном рисунке и быстро получить изображение того же самого тела. Визуальный алгоритм построения изображения пирамиды может формироваться параллельно (рис. 71-7).

Ученику нужно понимать и помнить, что при выделении очередной боковой грани призмы обязательно должен образовываться новый параллелограмм (для пирамиды – треугольник). При этом полезно следить, чтобы вновь выделяемое боковое ребро не пересекало (не дробило) плоскость видимого основания. Данное условие трудно оформляется (объясняется) вербально, но достаточно просто усваивается визуально. При нарушении его получаются изображения типа приведенных на рис. 72. Это необходимое условие может быть усвоено только благодаря приобретению соответствующего визуального опыта. правильной реализации возможной последовательности выделения боковых граней. В итоге словесно оформляется алгоритм построения изображений многогранников (рис. 73, вверху). В завершение можно предложить примеры изображений тел, которые обладают более сложной структурой (рис. 73, внизу).

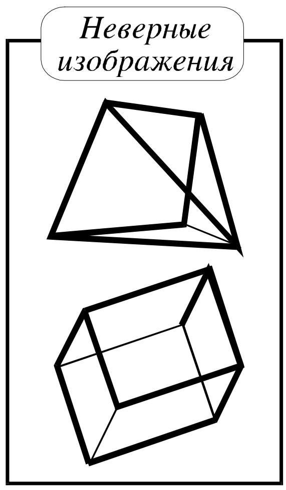

Рис. 72

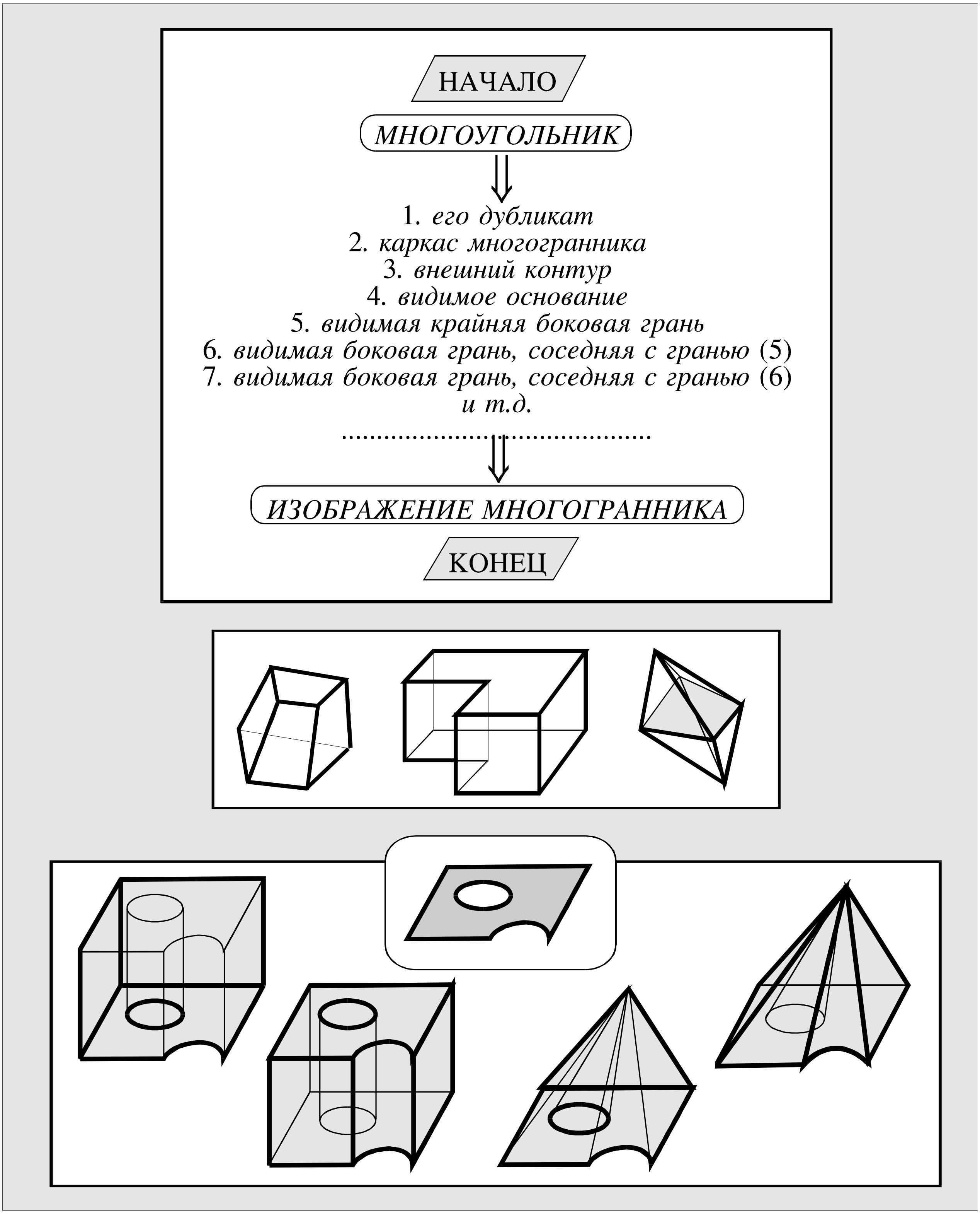

Рис. 73

Практика автора и многочисленные данные других учителей позволяют утверждать, что продемонстрированный алгоритм изображения пространственных тел хорошо усваивается учащимися. На уроках математики в Мурманском музыкальном училище в качестве одного из завершающих заданий было предложено обсудить: какие из законов геометрии нарушены на картине Эсхера “Бельведер” (рис. 74). После бурных дискуссий учащиеся самостоятельно пришли к положениям:

– если две прямые скрещиваются, то они не могут лежать в одной плоскости;

– если параллельные плоскости пересекаются третьей, то линии их пересечения параллельны и т.д.

Некоторые учащиеся смогли визуально представить невозможную архитектуру замка (рис. 74, внизу, в рамке).

Дальнейшее изучение теории шло в более быстром темпе, чем это происходило обычно.“*Bis dat, qui ceto dat*” (“Вдвойне дает тот, кто дает скоро”), гласит латинская пословица. Действительно, мы дали учащемуся возможность

Рис. 74

сразу увидеть объект с его свойствами и связями, отсюда и более быстрый темп восприятия всех теоретических положений, фиксирующих как само понятие, так и его существенные особенности. Идею “Бельведера” мы использовали в дальнейшем для одной из визуальных задач, которая не менее интенсивно обсуждалась учащимися (см. приложение, с. 448, рис. 198, внизу).

2.2. Поисковые визуальные задачи

Отрабатывая навыки учащихся в решении тех или иных математических или физических задач, выполнении упражнений по русскому языку или биологии и т.д. мы часто не достигаем успеха. Одни успевают в отведенное время усвоить этот навык, другие – нет. Следовательно, нужны такие средства обучения, которые позволили бы каждому учащемуся сформировать необходимое умение. Организация навыков визуального поиска требует специальных средств обучения. К таким мы здесь относим визуальные задачи.

На данном этапе из визуальных дидактических материалов мы выделяем особую группу – поисковые визуальные задачи, более полную характеристику которых мы попытаемся представить ниже. Напомним, что визуальной мы считаем задачу, исходной посылкой которой является некоторый образ. В ходе решения такой задачи образ развивается, приобретает новые формы, направляющие мысленную деятельность ученика так, что из данных визуальной информации он может извлечь ориентиры и подсказки, построить догадку, приводящую к нахождению правильного ответа.

Трансформация визуального образа является одной из самых сложных мыслительных операций. Для того чтобы умения и навыки таких преобразований формировались более или менее естественным образом необходимо постоянно “поддерживать” такой процесс. Этому могут способствовать конструирование информационной схемы, специальные поисковые серии, а также принцип визуализации доказательных рассуждений.

При последовательном и планомерном использовании, формировании и развитии визуального мышления мы сможем перейти к подлинно продуктивному обучению. В качестве примера приведем серию иллюстраций, посвященных двугранному углу (рис. 75, вверху). Работая с этой серией, каждый учащийся может в удобном для себя темпе рассмотреть и обдумать предлагаемую визуально-логическую цепочку. Сначала дается образ двугранного угла (рис. 75-а). Затем показывается, что такой угол может быть получен пересечением двух непараллельных плоскостей (рис. 75-б).

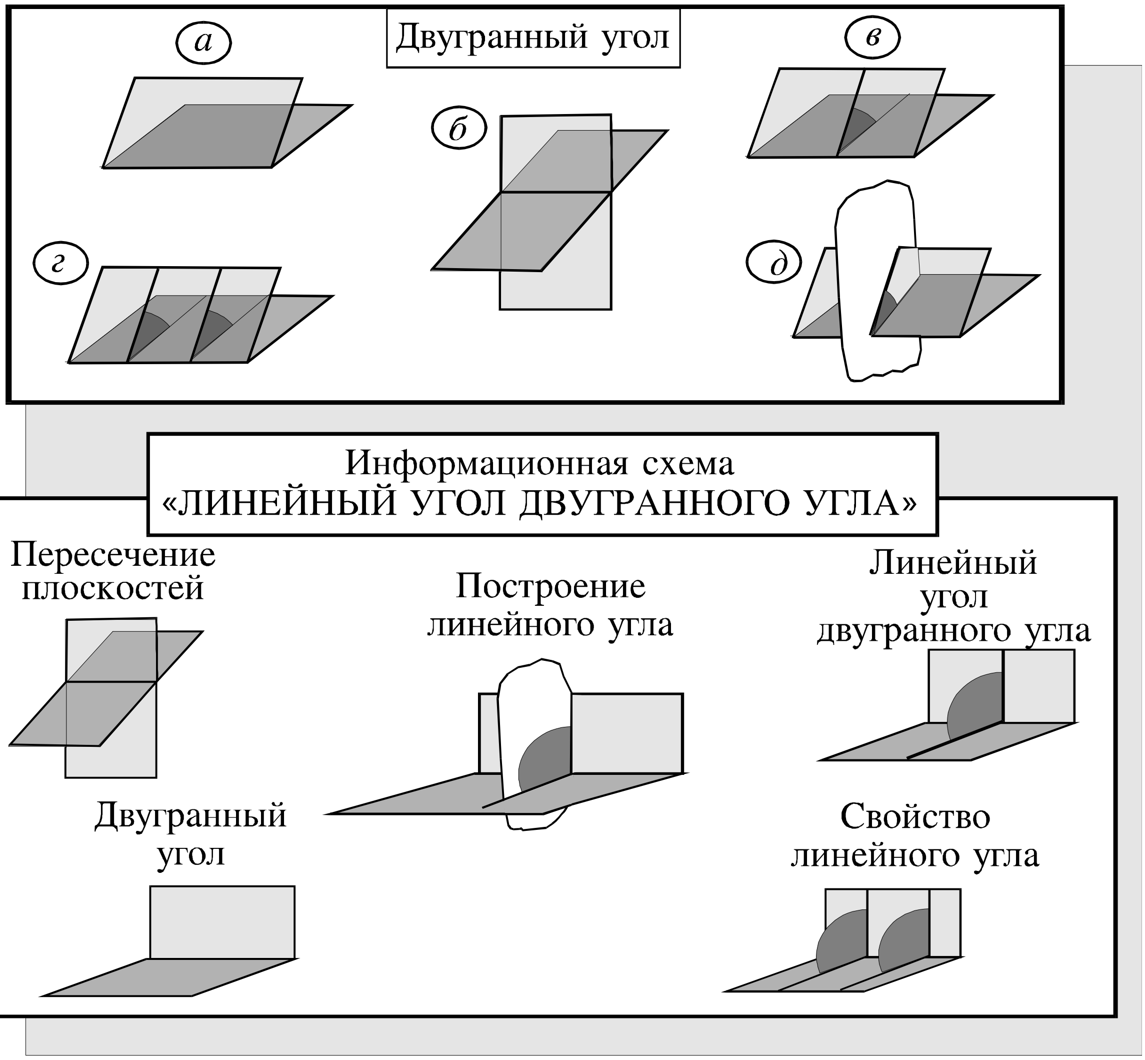

Рис. 75

Следующий шаг, – новое понятие, порождаемое исходной информацией, – линейный угол двугранного угла (рис. 75-в). Далее иллюстрируется свойство нового понятия (рис. 75-г). В завершении демонстрируется общая модель построения двугранного угла (рис. 75-д). В итоге можно оформить информационную схему “Двугранные углы”, заменяя соответствующими заголовками пространное объяснение мысленных этапов работы “живого созерцания” (рис. 75, внизу).

Приведем еще один пример, позволяющий накапливать опыт в ходе индивидуальных “экспериментов” (см. приложение, с. 395, рис. 145). Первая таблица позволяет сопоставить собственные вычисления с готовыми результатами, вторая – предлагает продолжение подобных вычислений строго по порядку возрастания степеней. Третье задание несколько “сбивает” этот порядок и заставляет сделать первые наблюдения и сопоставления с результатами предыдущих таблиц. Таблица № 4 требует определенных выводов, в противном случае вычисления займут слишком много времени. Завершающая фаза данных экспериментов со степенями мнимой единицы реализуется при решении примеров пятой таблицы, в которой налицо обобщения и соответствующий алгоритм.

Заполняя таблицы подобной серии, учащийся может вполне самостоятельно вывести соответствующий закон, а учитель определить моменты “неудачи обучения”. Помимо этого представляется возможным установить:

– формально или нет относится учащийся к выполнению заданий,

– насколько высока утомляемость учащегося при осуществлении однотипных, но постепенно усложняющихся операций,

– любит ли учащийся “докапываться” до результатов, осуществлять свои маленькие открытия.

Материалом для образования серии, накапливающей визуальный опыт, может служить и одна единственная формула. Например, получение результата в задании “Решить уравнение $\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_2 x)))=0{,}5$” связано с серией преобразований, основанных на едином визуальном <u>действии</u> (см. приложение, с. 422, рис.172, в центре, слева).

В результате он, узнав (увидев), как и на что нужно смотреть, что и как можно делать, в силах устно решить несложный пример типа “Найти решение уравнения $\log_4\log_2\log_2 x = 0$”. Это объясняется тем, что обычно процесс абстрагирования связан не только с моментом опознания некоторого формульного стандарта, являющегося ключом к решению задачи. Столь же активно работает сопоставление, которое устанавливает, что “одно из свойств предъявляемого стимула (простое или сложное) совпадает, тождественно тому свойству, которое зафиксировано в памяти как общее и специфическое для данного класса” [107, с. 208].

Наблюдения позволяют установить необходимые параллели. Например, серии, подобные упомянутой выше, помогают процессу свертывания. Получив необходимый визуальный опыт, учащийся может приступать к самостоятельному решению заданий, типа упрощенных аналогов знаменитой задачи Дирака, вариант которой предлагается нами в виде задания:

“Доказать $\mathbf{\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 3}$”.

Решение приведено на рис. 172 (см. приложение, с. 422, в центре).

Визуальные задачи можно рассматривать и как инструмент для измерения прироста поисковых навыков учащихся. Например, серию можно превратить в своеобразный тест, который поможет учителю определить:

– усвоил ли учащийся те или иные положения учебной математической теории;

– запомнил ли учащийся соответствующие формульные или графические образы этих положений;

– умеет ли учащийся применять их в конкретных случаях;

– может ли учащийся вывести необходимые обобщения из содержания такой серии при условии ее правильного выполнения;

– доступно ли учащемуся на основе выведенной закономерности исправить допущенные им ранее ошибки.

В ситуациях группового поиска фрагменты серии предъявляются не одновременно, а последовательно. Только что полученный опыт реализуется в решении аналогичных, но постепенно усложняющихся заданий. Восприятием учащихся здесь руководит не только сама серия, но и преподаватель, помогая своими вопросами и комментариями. Совместные исследования заменяют монолог учителя, вовлекая учащихся в активный мыслительный процесс. Разбор рисунков и особенностей формулы, анализ смысловых тонкостей текстов позволяют придерживаться единого темпа (см. приложение, с. 422, рис. 172). Если слабый ученик что-либо не увидит, не заметит или не поймет, то ему поможет более сильный товарищ или же преподаватель обратит внимание на возникающие затруднения.

Накоплению визуального опыта учащихся в современной школе практически не уделяют внимания. В то же время именно этот момент их мыслительной деятельности может сыграть важную роль не только в изучении нового материала, но и в восстановлении утраченных знаний. Для того чтобы пояснить нашу мысль, приведем конкретный пример. В школе эстетического воспитания № 34 г. Мурманска в одном из 7-х классов сложилась тяжелая ситуация с изучением предметов математического цикла. По многим причинам в 5-ом и 6-ом классах время, отведенное на математику, было сокращено, в знаниях, умениях и навыках учеников образовались большие пробелы. По предложению автора на одном из уроков были использованы специальный набор визуальных задач, посвященный понятию модуля числа. В результате, по свидетельству учителя, проблема была ликвидирована полностью. Ученики быстро восстанавливали “образ модуля» и достаточно успешно решали программные задания и задачи повышенной сложности (см. приложение, с. 422, рис. 172, вверху).

Визуальные задачи представляют собой богатейший материал для образования групповых поисковых ситуаций. При усвоении навыков визуального поиска, учебным группам под силу не только использование готовых информационных схем, но и их составление, что позволяет активизировать самостоятельность учащихся, “разбудить” их зрение и мозг, увлечь процессом познания. В ходе наблюдений за процессом подобных преобразований, представленных с помощью (стрелок-указателей, цвета и т.д.) в визуально обозримой форме, учащийся не только обучается, но и самообучается.

2.3. Визуализация доказательных рассуждений

Визуальные задачи, т.е. задачи, исходной посылкой которых является рисунок [11, 13, 66-67, 73, 144-151, 153-154], содержат в себе громадный запас возможностей. Среди них мы особо выделяем возможность вводить фрагменты теории в ситуации визуального поиска, побуждая обучаемых активно “открывать” новое, вырабатывать навыки математического творчества [17, 30, 51, 63, 72, 87, 164-165, 197].

Для приобретения навыка “открывать новое” полезно решать задачи типа “Докажите, глядя на рисунок, что...”.

“***Докажите, глядя на рисунок, что*** ... ” – это задача на визуальное доказательство утверждения или вывод формулы. Рисунок (формула или текст) в данных задачах дает все необходимые подсказки для успешной поисковой деятельности ученика. Такой рисунок лучше перенести в тетрадь и преобразовать его так, чтобы стал очевиден ход рассуждений. Каждое подобное преобразование полезно пояснять формулами или текстом. Формирование навыков проведения доказательных рассуждений можно осуществлять с помощью заданий, выстроенных в порядке возрастания сложности (рис. 76).

С помощью *серий* задач “Докажите, глядя на рисунок, что ... ” можно накапливать опыт, приводящий к формированию “техники” проведения доказательных рассуждений (рис. 76). Тем самым мы побудим учащихся участвовать в “открытии нового”, получать навыки математического творчества. Полезен следующий прием: решается задача, результат которой преобразуется в посылку, а ее условие – в заключение теоремы и т.д.

Анализ условия задачи, изложенной текстом, представляет для учеников значительную трудность. Не все могут свободно ориентироваться в ее содержании, выделять существенное для «выхода» на правильный ответ. В силу этих обстоятельств мы выделили специальные упражнения, ориентированные на перевод текста в формулу или картинку. Чрезвычайно полезны различные исследования свойств чисел, которым так много уделялось внимание на уроках математики 50-60 годов. Мы полагаем, что для развития визуального и логического мышления учащихся следовало бы “восстановить” эту традицию.

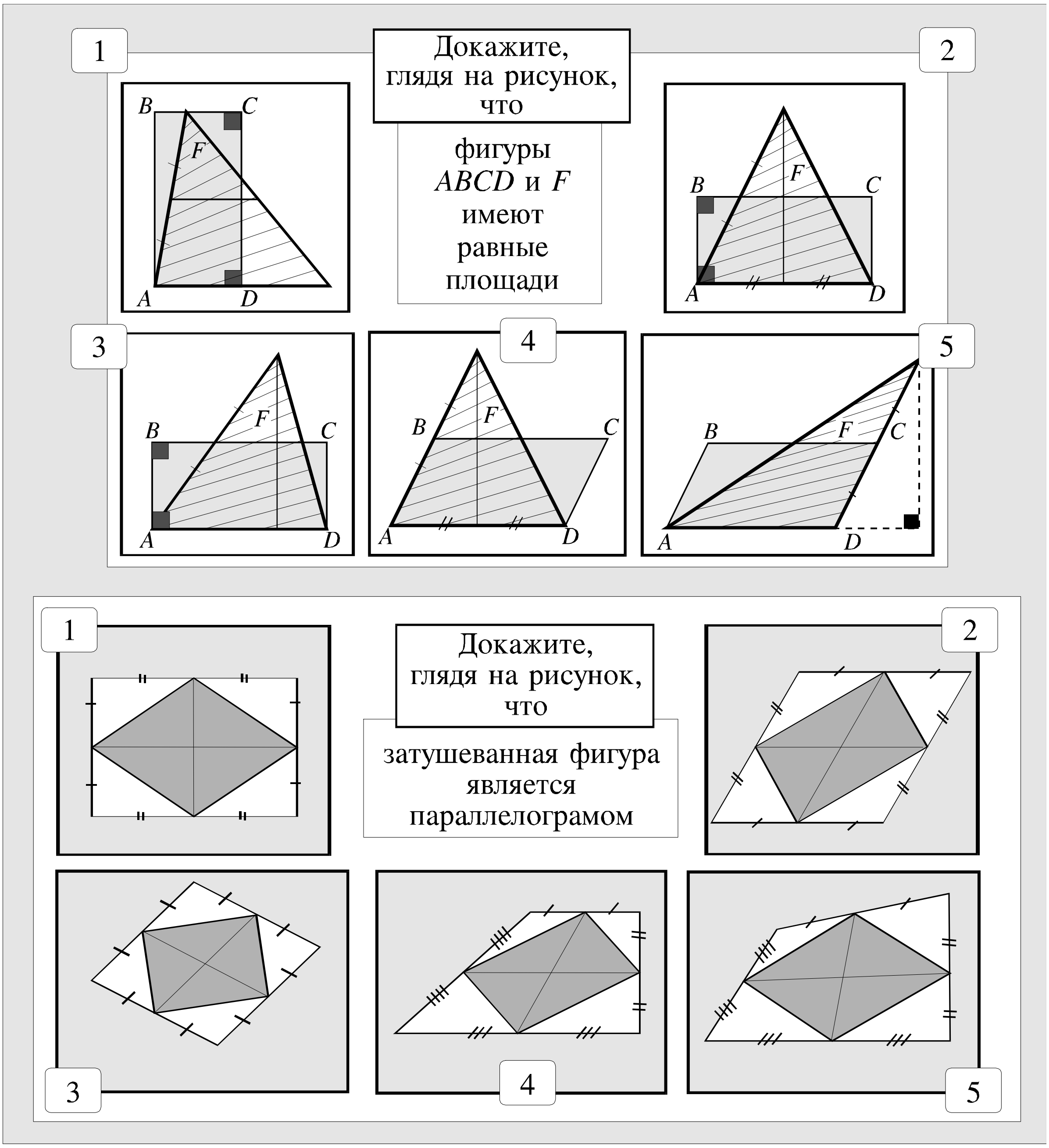

Рис. 76

Наиболее простым вариантом таких заданий является текст с сопутствующей иллюстрацией. Последовательно преобразуя (мысленно или с помощью специальных средств) детали образа, выделяя в нем существенное (основной объект исследования), ученик получает визуальные подсказки к решению задачи. Главную трудность, заключающуюся в соотнесении текста со зрительным образом, можно преодолеть с помощью перевода. Пример такого перевода можно найти на рис. 173-174 в разделе «Анализ» (см. приложение, с. 423-424).

На рис. 140 (см. приложение, с. 390) подобный анализ разработан более детально. К исходному тексту: «Определите свойство разности между числом десятков и удвоенной цифрой единиц трехзначных чисел, делящихся на 7», приложена таблица трехзначных чисел от **101** до **170**, на которой отмечены все числа, делящиеся на **7** (на **19**). Кроме этого, под этой таблицей имеется двойная подсказка: справа визуально определен алгоритм исследования, слева – дается предполагаемый результат, заключающийся в условии «Разность между числом десятков и удвоенной цифрой единиц трехзначных чисел, делящихся на **7** (на **19**), делится на ... ». Важно, чтобы решая подобные задания, учащиеся восприняли алгоритм:

осуществите перевод текста в формулу или картинку;

проведите анализ картинки;

составьте соответствующую визуальную задачу;

решите эту задачу;

переведите решение задачи в текст или формулы.

Формировать умение проводить доказательные рассуждения, используя рисунок, полезно начинать в средней школе как можно раньше. Особую роль такие умения играют в геометрии, освоение курса которой практически полностью связано с ними.

Как правило, геометрические задачи повышенного уровня сложности предлагаются только способным ученикам. Принято считать, что обучение менее подвинутых учащихся должно строиться “в рамках” базисных требований курса. Мы полагаем, что было бы полезно иногда предлагать “трудные задачи” и тем, от кого не ожидают больших успехов в обучении. Однако здесь необходимы специальные приемы. Переход от наблюдений к построению доказательных рассуждений полезно проводить поэтапно (рис. 77).

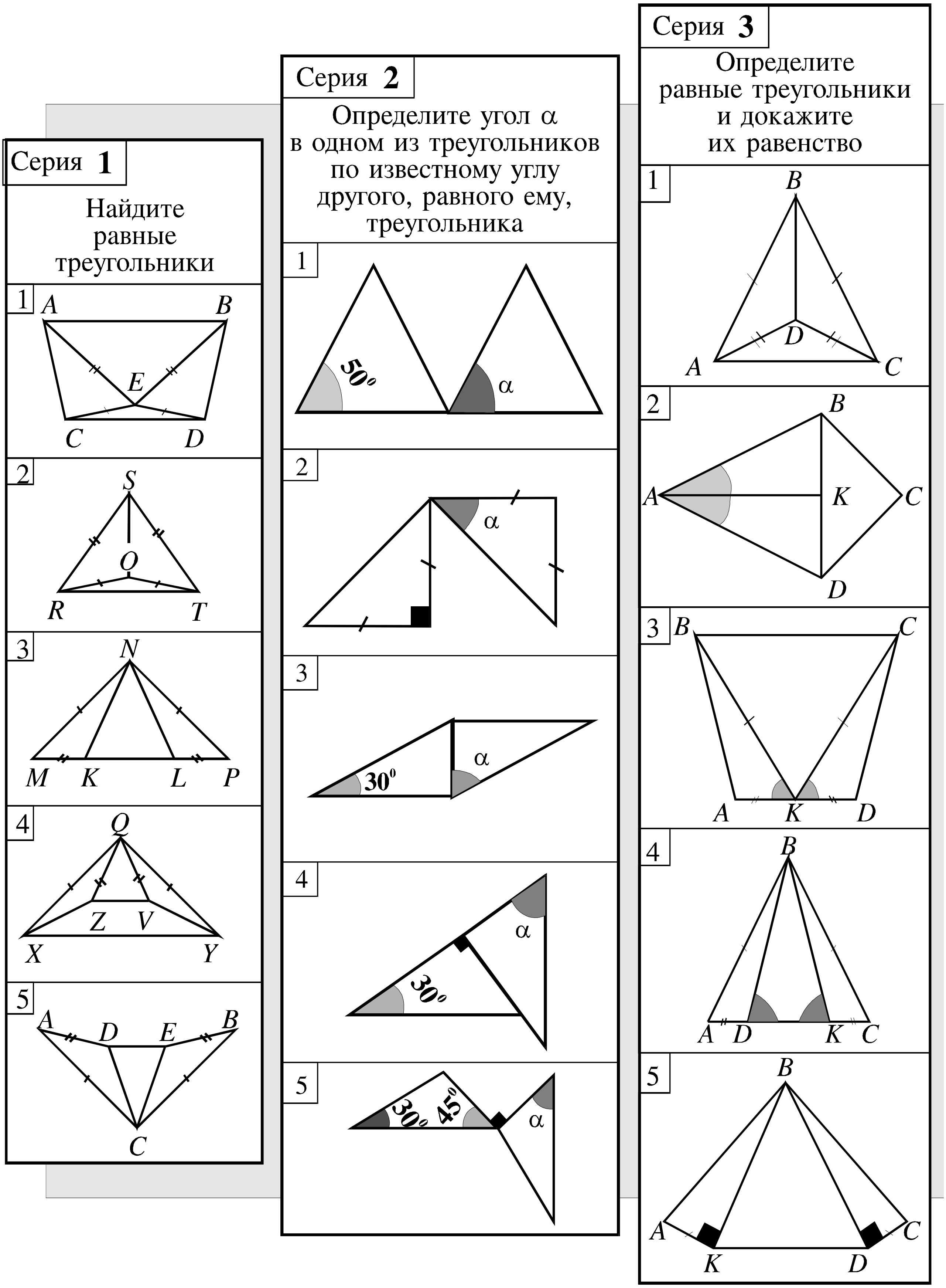
Серия 1
Найдите равные треугольники
1 A B E C D
2 S O R T
3 N M K L P
4 Q Z V X Y
5 A D E B C
Серия 2
Определите угол α в одном из треугольников по известному углу другого, равного ему, треугольника
1 50° α
2 α
3 30° α
4 α 30°
5 30° 45° α
Серия 3
Определите равные треугольники и докажите их равенство
1 B D A C
2 B A K C D
3 B C A K D
4 B A D K C
5 B A C K D

Рис. 77

Резник Н.А. Методические основы использования визуального мышления в математическом образовании школьника: дис. ... уч. ст. докт. пед. наук. – СПб., 1997. – 500 с.

К примеру, при изучении признаков равенства треугольников, сначала можно предложить учащимся найти равные треугольники, не требуя специальных обоснований. Затем перейти к формированию навыков проведения таких обоснований и в конечном итоге прийти к возможности правильно и грамотно провести соответствующие доказательные рассуждения.

На рис. 78 приведено шесть подобных образов, к каждому из которых прилагается конкретное указание.

№1. Докажите, глядя на рис. 78-а, что объем наклонного цилиндра равен площади перпендикулярного сечения S на длину его ребра l.

№2. Докажите, глядя на рис. 78-б, что касательная к параболе $y = ax^2$ в точке M с абсциссой x делит отрезок $[\mathbf{0}\ ;\ x]$ пополам.

№3. Докажите, глядя на рис. 78-в формулу дифференцирования обратной функции.

№4. На одном и том же чертеже 78-г построены графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Сопоставляя эти графики, докажите что

а) $\sin(45° - x) = \cos(45° + x)$;

б) $\sin x = \cos(90° - x)$;

г) $\cos(45° - x) = \sin(45° + x)$;

д) $\sin(30° + x) = \cos(60° - x)$.

№5. Докажите, глядя на рис. 78-д, что $0 < t < \pi/2$: $\sin t < t < \operatorname{tg} t$.

№6. Площадь подграфика полупериода синуса равна **2** (рис. 78-е). Устно вычислите следующие интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx$; б) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\,dx$;

г) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx$; в) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx$.

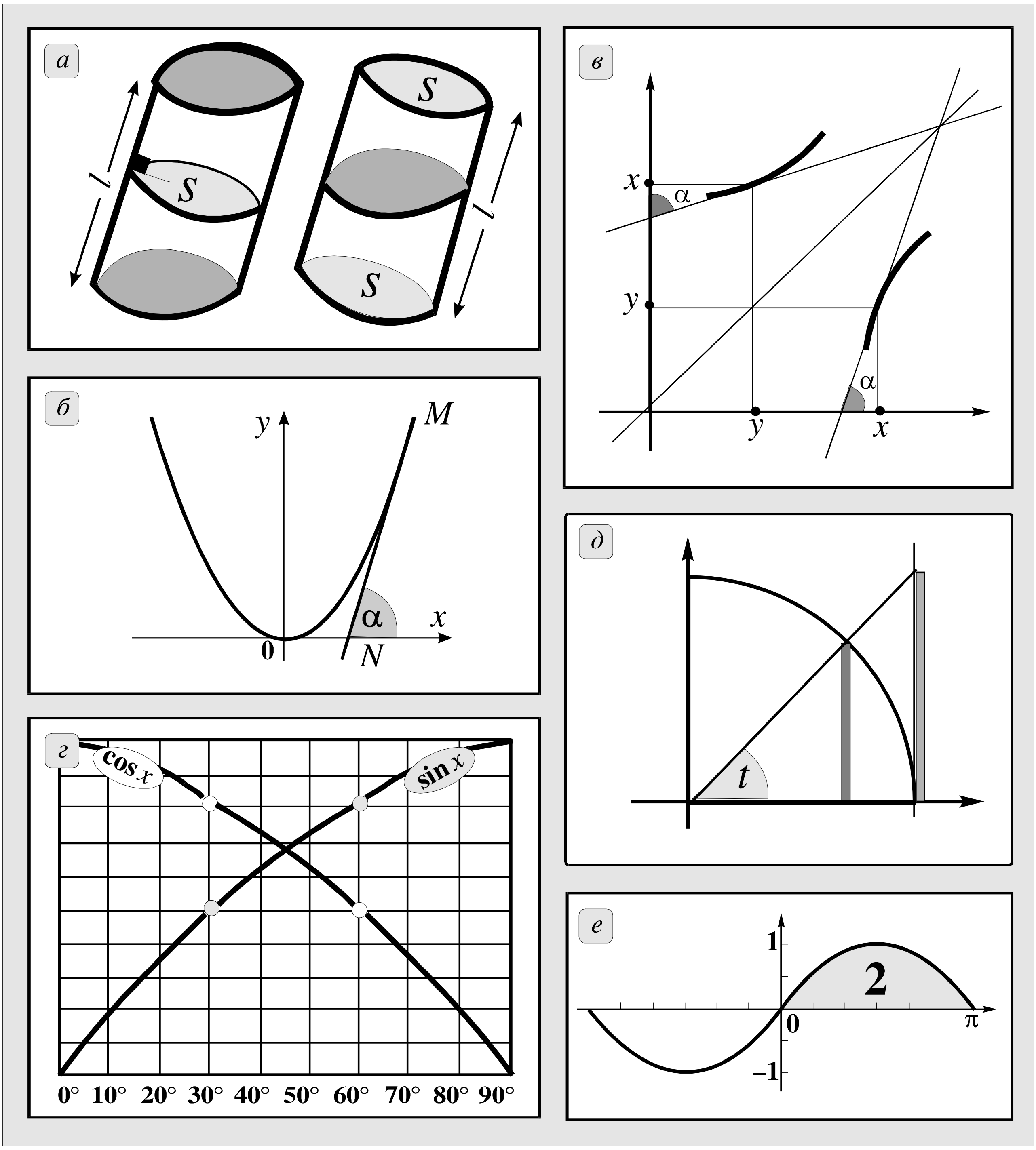

Рис. 78

Краткие итоги

Мы глубоко убеждены в следующем: “точка зрения, утверждающая, что “открывать” новое в математике для ученика труднее, чем заучивать готовое, ошибочна. Верно лишь то, что для педагога труднее учить открывать, чем учить заучивать. Школьнику же, при соответствующей постановке обучения, легче действовать как математику, открывать самому истину, чем заучивать готовую систему предложений и доказательств без понимания ее происхождения, значения и взаимных связей” (77, с. 11-12).

Разрабатывая различные приемы визуализации доказательных рассуждений, демонстрируя с их помощью возможный ход мысли в поиске ответа на вопрос, мы “раздвигаем рамки” интеллектуальных возможностей ученика, готовим его активно искать ответы на вопросы, которые могут возникнуть в его профессиональной дальнейшей деятельности.