

§8. Формирование стандартного математического образа

Каждая учебная задача предполагает приведение ее исходных данных к некоторому достаточно простому, хорошо известному объекту, геометрическая или аналитическая интерпретация которого позволяет быстро и точно ответить на поставленный вопрос.

С точки зрения определенных психологических свойств мышления это естественно. В предисловии к русскому изданию книги «Распознавание образов» И. Пинскер пишет:

«... любое решение, любое действие, связанное с обработкой внешней информации, основано на узнавании и той конкретной ситуации, которой это действие отвечает, т.е. на распознавании образов» [130, с. 5].

8.1. Изображение основных математических понятий

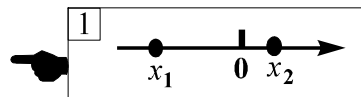
Активное и целенаправленное использование визуального мышления в процессе обучения основано на формировании устойчивых образов основных математических понятий.

Первой встающей здесь методической задачей является подготовка добротных геометрических изображений этих понятий, адекватно отображающих их основные черты, удобных в работе, пригодных для многократного использования. Большинство этих изображений устоялось в практике преподавания математики.

Перечислим и представим эскизы наиболее важные понятия, которые мы относим к стандартным (рис. 8.01, см. также рис. I.01 на стр. 749).

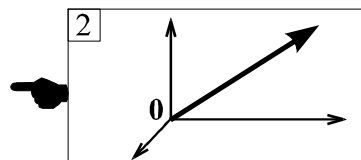
1. Число – точка числовой оси

(рис. 8.01.1).



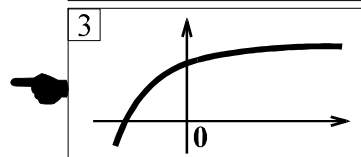
2. Вектор – направленный отрезок

(рис. 8.01.2).



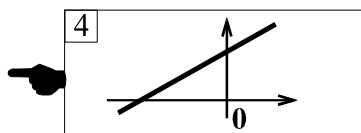
3. Функция – график

(рис. 8.01.3).



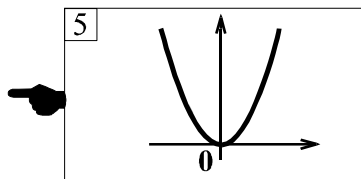
4. Линейная функция – прямая

(рис. 8.01.4).

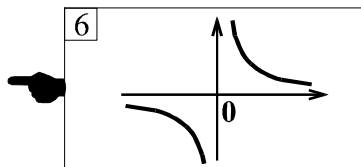


5. Квадратичная функция – парабола

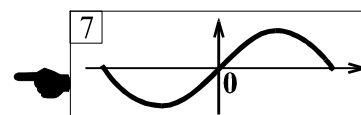
(рис. 8.01.5).



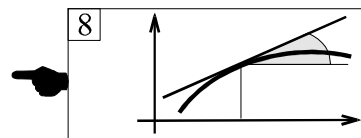
6. Обратная пропорциональная зависимость – гипербола (рис. 8.01.6).



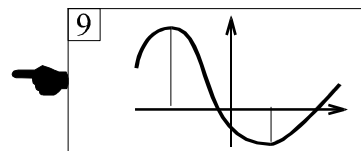
7. Колебательный процесс – синусоида (рис. 8.01.7).



8. Производная – наклон касательной (рис. 8.01.8).



9. Экстремум – горб или впадина (рис. 8.01.9).



10. Интеграл – площадь

(рис. 8.01.10).

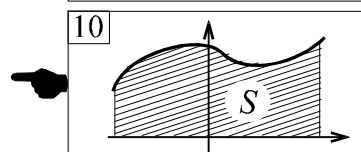


Рис. 8.01.

Эскизы важнейших
математических понятий

Естественно, что объем содержания такого визуального образа не полностью совпадает с объемом содержания соответствующего понятия.

Так, отношение “Экстремум – горб или впадина” позволяет по графику:

- определить важнейшие “параметры” поведения функции точки максимума и минимума, изменение функции вблизи этих точек (возрастание, с одной стороны, и убывание, с другой),
- “измерить” значение самого экстремума и т.д.

Однако, чтобы осуществить дефиницию самого понятия, необходимо нечто большее. Нужна дисциплина зрительного восприятия, знание стандартных зрительных образов, понимание, что само слово “экстремум” нуждается в описательном расширении типа “экстремум функции в заданной точке” и т.д. Необходим грамотный, квалифицированный перевод с языка образов на язык слов и формул.

Обратим внимание на то, что новым в предлагаемой нами методике является акцент на образ, его “первичность”, установка на немедленную зрительную ассоциацию с абстрактным понятием, предшествующую словесному описанию. Насколько важна такая “первичность” писал еще Павлов:

«При страшной сложности работы больших полушарий, по-видимому, имеется такой принцип: все то, что было образовано, не пе-

ределяется, но остается в том же виде, а новое лишь наслаивается» [см. в книге 204].

Проблему “первого впечатления” мы предлагаем разрешить с помощью специальных учебных моделей, которые ранее называли визуальными стандартами.

Под **визуальным стандартом (стандартным образом)** мы понимаем такую визуальную или формульную интерпретацию математического понятия (его свойства или отношения между такими понятиями), которое наиболее полно и точно отображает его словесную дефиницию. Таким образом, стандартный образ понятия должен отвечать следующим условиям:

- содержание должно удовлетворять принципу необходимости и достаточности;
- объем должен совпадать с объемом исходного понятия;
- представление должно осуществляться так, чтобы стал возможен адекватный перевод на другие языки предъявления математической информации.

Поясним данные условия на конкретных примерах.

Основой каждого графика должны служить кривые, строго отражающие функциональные зависимости между числовыми переменными. К сожалению, стенды, сделанные учителями или изготовленные типографским способом довольно часто искажают (рис. 8.02) положение: для любого аргумента x из области определения функции f существу-

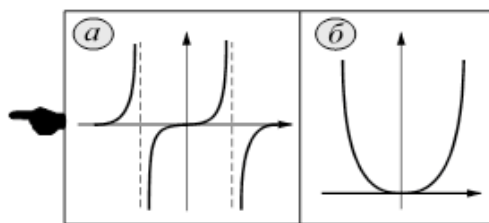


Рис. 8.02.

Неверные изображения тангенсоиды (а), параболы (б)

ет и единственно значение $f(x)$

из множества значений функции f .

Это приводит к тому, что учащиеся не осознают главной визуальной особенности геометрического задания функционального соответствия: кривая в плоской системе координат является графиком функции тогда, когда любая прямая, проведенная параллельно оси значений f (перпендикулярно оси аргументов f), пересекает эту кривую не более чем в одной точке.

Учащимся не под силу определить:

- какие из кривых на рисунке 8.03 являются графиком функции?
- где (в какой точке или на каком отрезке) происходит нарушение функциональности для кривых, изображенных на рисунках 8.03.3 и 8.03.8?

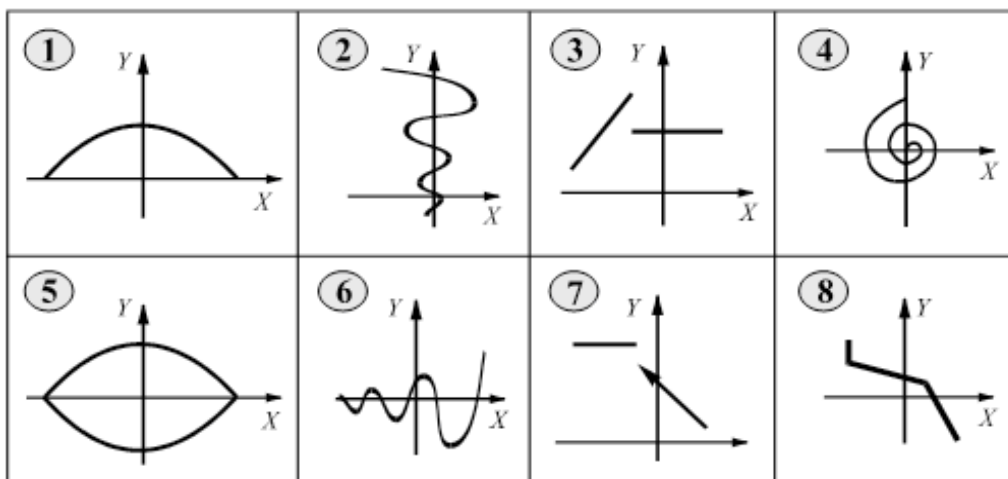


Рис. 8.03.

Задания для установления в изображениях
соблюдения функциональности кривых

При недостаточно прочно сформированном зрительном восприятии учащиеся плохо ориентируются в изображениях,

не опознают “портрет” функции,

не видят тенденции ее развития.

В таком случае полезны упражнения типа:

- определите, графики каких элементарных функций перемещены так, чтобы получились следующие кривые на рисунке 8.04?

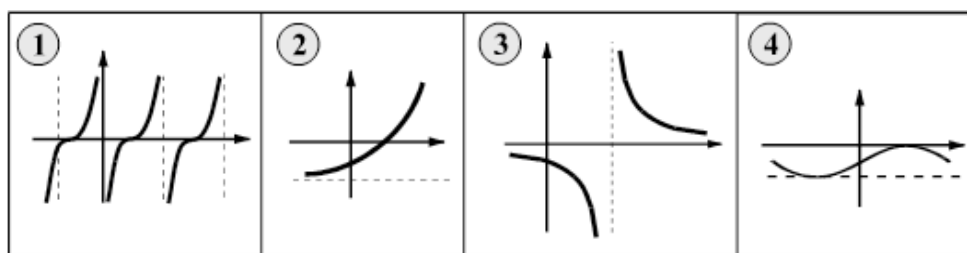


Рис. 8.04.

Задания на определение графиков элементарных функций, в результате которых получились заданные кривые

- кривые (1) и (2) составлены из “кусков” графиков элементарных функций (рис. 8.05). Запишите данные иллюстраций в виде формулы:

$$y = \begin{cases} f(x), & a < x < b \\ g(x), & b < x < c \\ p(x), & c < x < d \end{cases}, \text{ где}$$

$f(x)$, $g(x)$, $p(x)$ – есть формулы

элементарных функций,

a , b , c , d – точки, разделяющие область определения функции y на соответствующие интервалы.

(см. также рис. I.10 на стр. 488).

Комплекс “график-уравнение” должен четко отмечать в своем визуальном блоке все необходимые “точки опоры” – элементы, позво-

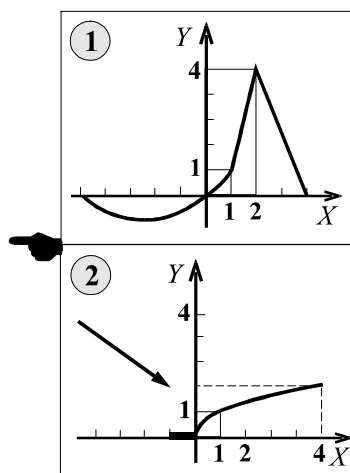


Рис. 8.05.

Задания на составление по графическому заданию функций ее формулы

ляющие придти к необходимым обобщениям, предопределить свертывание мыслительных операций.

В частности, для геометрического задания тригонометрических функций к таким элементам можно отнести:

- точки, обозначенные на оси абсцисс $(-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2})$;
- пунктирные (или тонкие) линии, отмечающие область значений этой функции (рис. 8.06.2).

При соблюдении упомянутых условий у учащихся довольно просто формируются формульные стандарты типа:

- нули синуса: $0, \pm\pi, \pm\pi/2, \dots$;
- область допустимых значений синуса: $x \in [-1; 1]$ и т.д.

В свою очередь эти данные приведут к свертыванию мыслительных операций при решении примеров, подобных:

“Решить уравнение

$$\sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0”.$$

Модель рассуждений дана на рисунке 8.07.

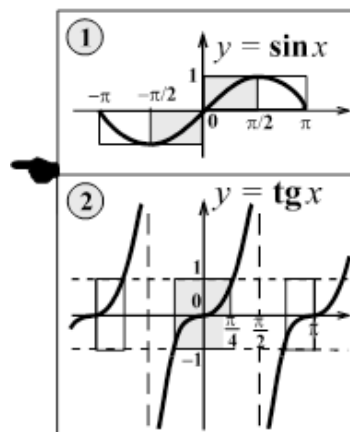


Рис. 8.06.

Опорные элементы
для построение графиков
тригонометрических функций

Решение	Стандарты для свертывания
$\sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0$ $\Downarrow$ $(\sin x - 3) \cdot (\sin x + 1) = 0$ $\Downarrow$ $\sin x = -1$ $\Downarrow$ $x = \frac{\pi}{2}(4k - 1) (k \in \mathbb{Z})$	$a^2 - 2a - 3 = 0$ Теорема Виета: $\begin{cases} a_1 \cdot a_2 = -3 \\ a_1 + a_2 = 2 \end{cases}$ Область определения синуса: $E(\sin): \sin x \leq 1$ Минимумы синуса: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Рис. 8.07.

Опорные знания (справа) для решения соответствующего тригонометрического уравнения (слева)

Формируя визуальный стандарт определенного понятия, можно рассматривать содержание одной и той же задачи “в разных плоскостях”. Мы полагаем, что зрительное восприятие одних и тех же объектов в различных вариантах позволит более продуктивно формировать умения, знания и навыки как отдельного ученика, так и класса в целом.

Визуальные дидактические материалы легко варьируются, поэтому каждому ученику может быть предложен конкретный вариант одной и той же задачи, которую он в удобном для себя темпе рассмотрит и обдумает, задаст по ней интересующие его вопросы и сможет в дальнейшем участвовать в общем обсуждении.

На рисунке 8.08 представлена информационная страница «Внутренние и внешние углы треугольника», обсуждая содержание которой, учащиеся практически решают основную задачу: восстановление и закрепление образов различных углов треугольника.

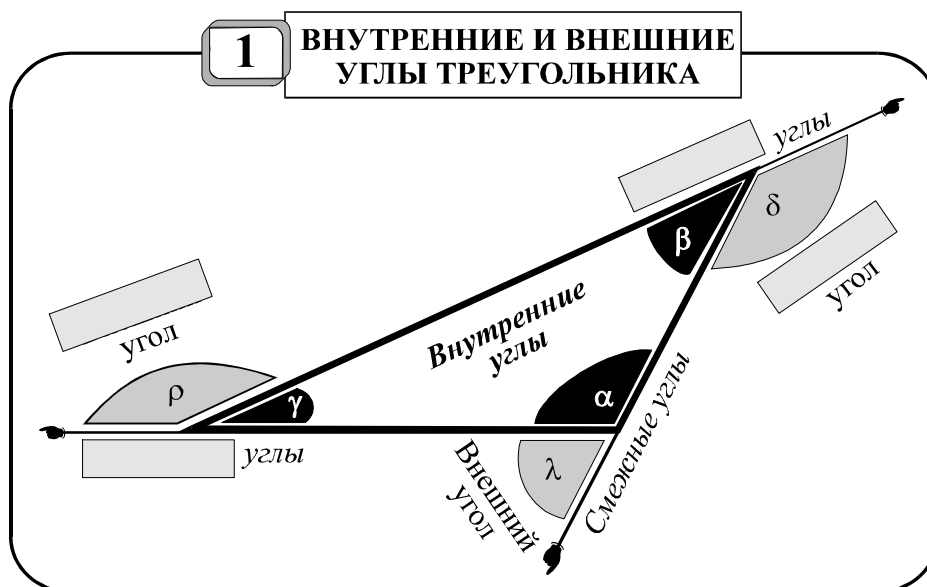


Рис. 8.08.

Информационная страница
с пропусками для заполнения учащимися

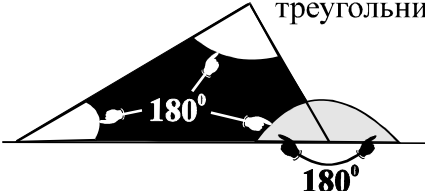
Эта задача (на данной странице) адресована более слабым ученикам и тем, кто по каким-либо причинам забыл или не знает теорему о сумме внутренних углов треугольника.

Рисунок первого задания комплекта задач к этой странице (рис. 8.09.1) дает все необходимые ориентиры для извлечения из памяти фактов: сумма внутренних углов треугольника равна **180°** , сумма смежных углов также равна **180°** .

Поэтому задание №2 (рис. 8.09.2) предназначено для формирования техники проведения доказательных рассуждений и вполне по силам тем, кто хорошо знает предшествующий материал.

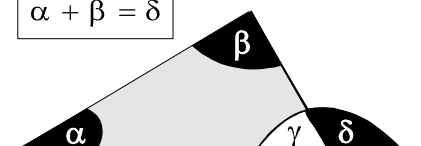
1 ПОСМОТРИТЕ И НАЙДИТЕ

правило нахождения величины внешнего угла треугольника



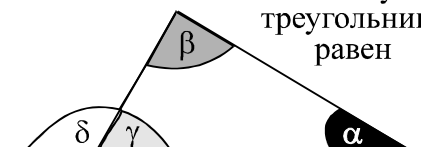
2 Докажите, глядя на рисунок, что

$\alpha + \beta = \delta$



3 ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

Внешний угол δ треугольника равен



А	α
Б	β
В	γ
Г	$\alpha + \beta$
Д	$\alpha + \gamma$

Рис. 8.09.

Задания разной степени сложности
к одному и тому же положению учебной математической теории

Сильным учащимся можно сразу предложить найти ответ по рисунку 8.09.3, где поиск закона о связи между величиной внешнего угла треугольника с суммой двух внутренних его углов, не смежных с этим внешним “запрограммирован” списком ответов к основному вопросу.

8.2. Параметры визуального стандарта

Для того чтобы “базовый” рисунок-стандарт помогал решать конкретную учебную задачу, необходимо продумать его содержание и при оформлении расставить все важнейшие акценты.

По словам Вазари

«... рисунок... имея свое начало в рассудке, извлекает общее понятие из многих вещей, ... отсюда следует, что он познает сораз-

мерность целого с частями и частей между собой и с целым... из этого познания рождается определенное понятие и суждение, ... и можно заключить, что рисунок этот не что иное, как видимое выражение и разъяснение понятия, которое создалось в идее. И отсюда, возможно, и возникла греческая пословица:

“По когтю льва”» [27, с. 214].

Проведем аналог.

Предлагаемое ниже методическое средство обозначено нами как “Направляющие прямоугольники”. Оно обеспечивает точность исполнения и ясность восприятия графиков элементарных функций (рис. 8.10, см. также рис. I.01 на стр. 479).

Для того чтобы более полно представить предлагаемое нами методическое средство, проанализируем содержание комплекта “Направляющие прямоугольники прямой и параболы”, внедренного в учебный процесс в одной из экспериментальных школ Мурманской области.

Отдельные его фрагменты даны на рисунках 8.11 и 8.12 (см. также рис. I.05-I.06 на стр. 483).

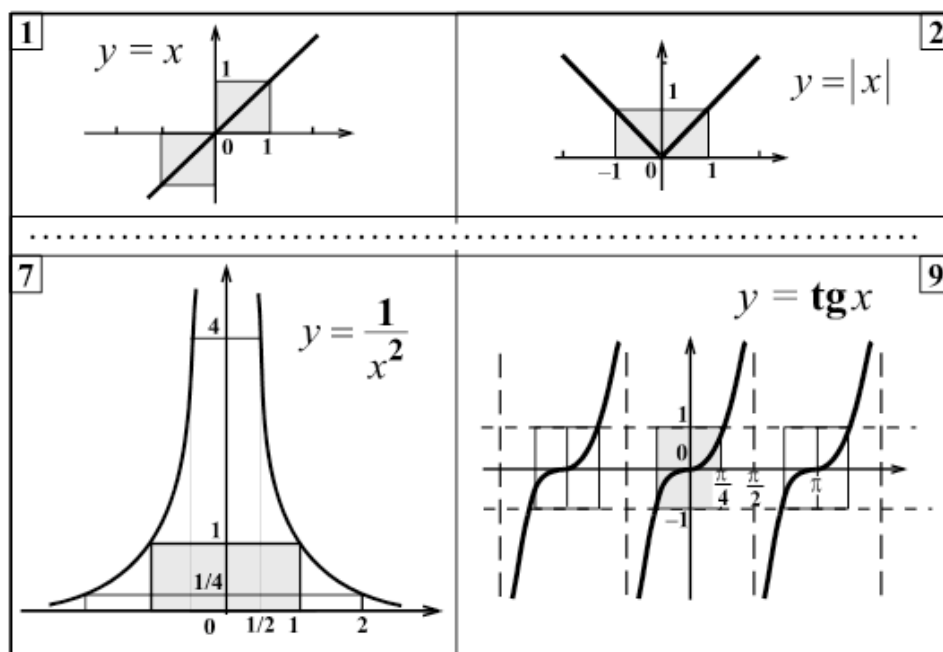


Рис. 8.10.

Направляющие прямоугольники
графиков элементарных функций

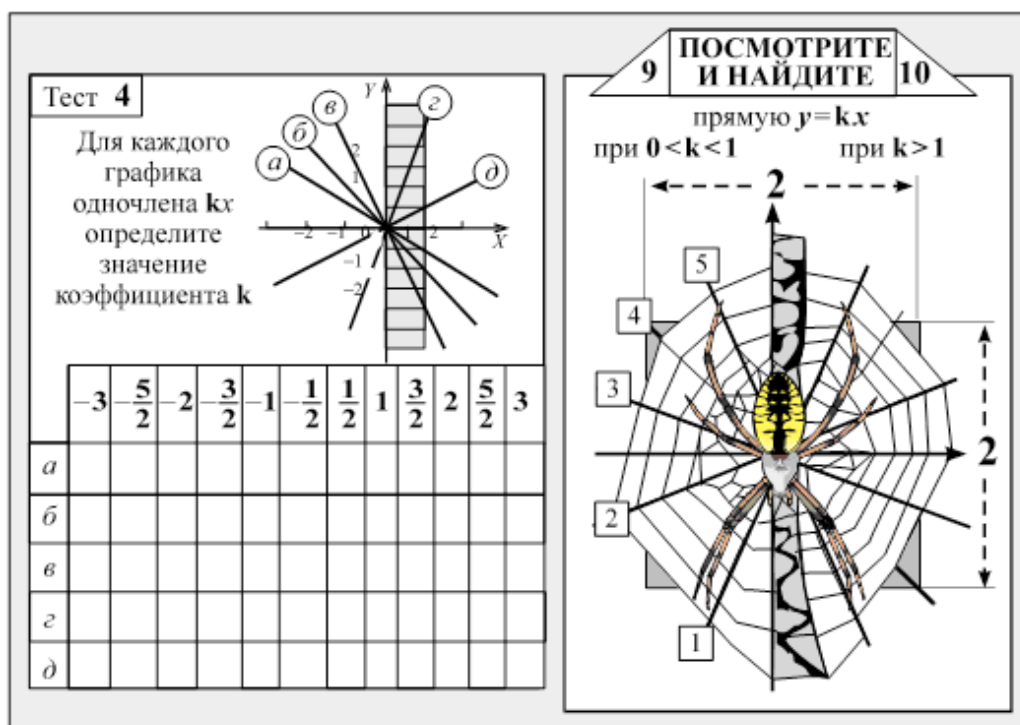


Рис. 8.11.

Задания на нахождение по графику линейной функции
значения углового коэффициента прямой

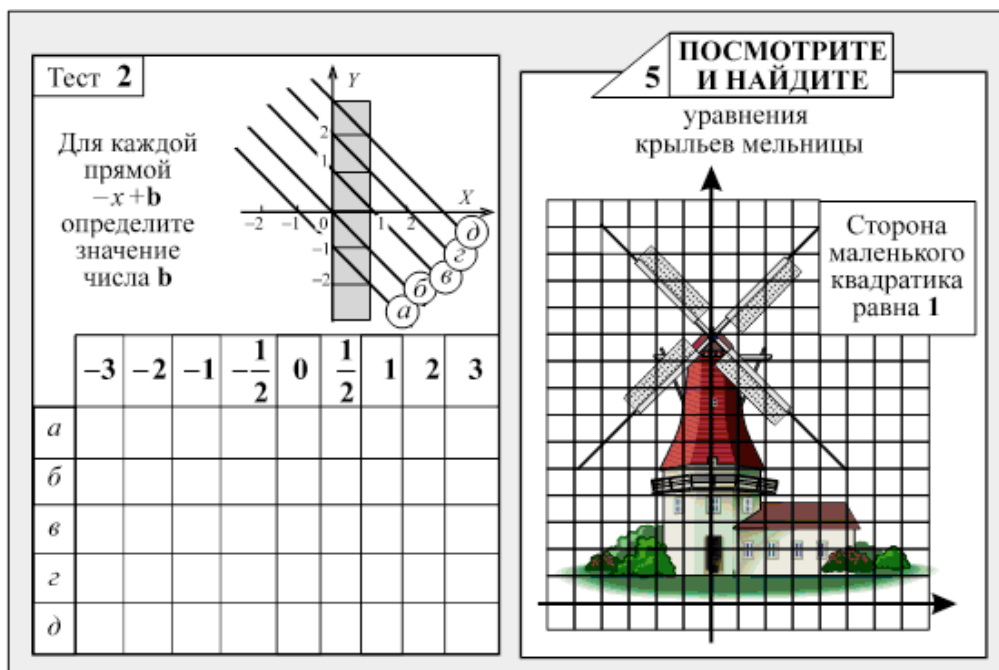


Рис. 8.12.

Задания на нахождение уравнения линейной функции по ее графическому представлению

“Меню” данной тетради состоит из следующих позиций:

1. Прямые $x = k$ и $y = p$.
2. Направляющий прямоугольник прямой $y = x$.
3. Направляющий прямоугольник прямой $y = -x$ (рис. 8.09).
4. Направляющий прямоугольник прямой $y = kx$ при $k > 0$.
5. Направляющий прямоугольник прямой $y = kx$ при $k < 0$.
6. Направляющий прямоугольник прямой $y = x + k$.
7. Направляющие прямоугольники параболы $y = x^2$ (рис. 8.09.2).
8. Направляющие прямоугольники параболы $y = -x^2$.
9. Построение параболы $\pm y = x^2 + k$.
10. Направляющие прямоугольники кубической параболы (см. рис. V.15-V.17 на стр. 601-603).

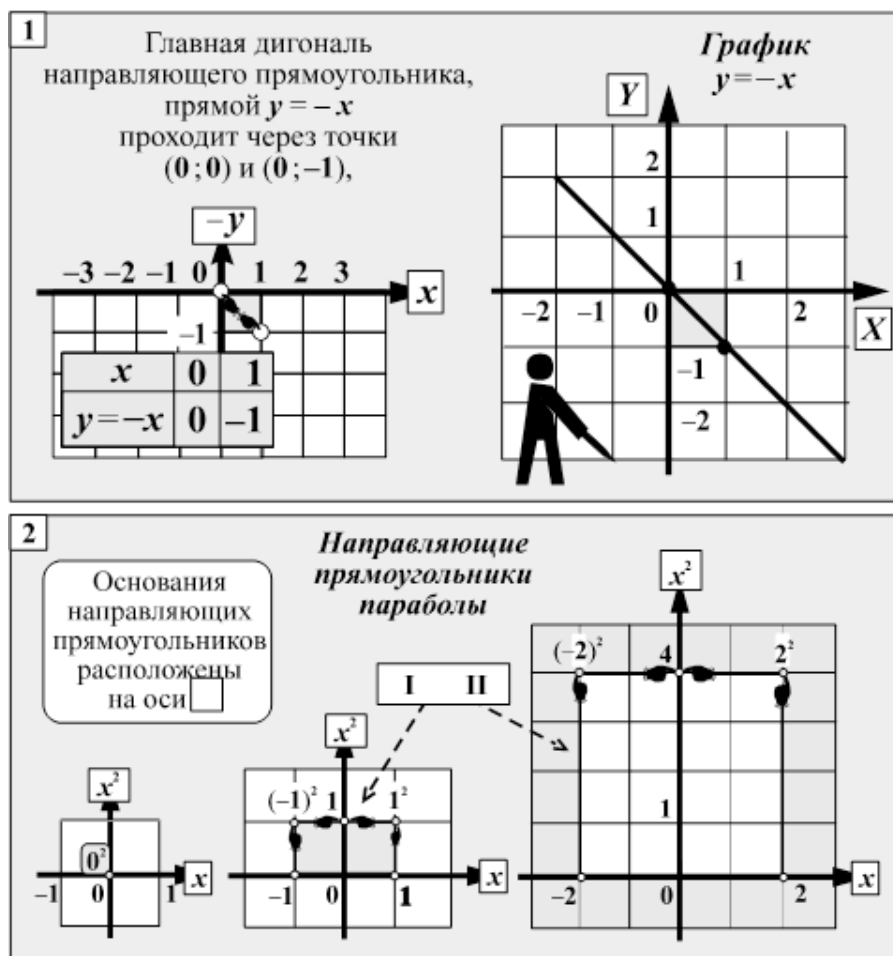


Рис. 8.13.

Поэтапное построение
направляющих прямоугольников прямой (1) и параболы (2)

Содержание тетради вбирает в себя все позиции соответствующей темы базисной программы по математике 7-го класса, однако подход к изучению темы значительно отличается от традиционного.

При разработке методики формирования стандартного зрительного образа прямой и параболы мы определили для себя следующие обязательные требования:

а) к изображениям –

точность построений, визуальный “акцент” на необходимых деталях, наличие “опорных точек”, т.е. таких элементов стандарта,

которые помогают быстро и безошибочно построить или восстановить искомый образ,

б) к визуальным материалам –

формирование образов осуществлять последовательно, постоянно восстанавливая (обновляя) предшествующие знания и навыки, постепенно расширяя диапазон и степень трудности заданий,

в) к результатам обучения –

в итоге ученики должны уметь не только “строить заданные кривые по точкам”, но и свободно составлять соответствующее уравнение по готовому чертежу.

Рассмотрим для примера комплект материалов “Направляющий прямоугольник прямой $y = -x$ ” (рис. 8.14 и рис. 8.15, см. также рис. I.03-I.04 на стр. 481-482).

Для выполнения первого установленного нами требования мы применили переход от построения собственно направляющего прямоугольника прямой (параболы) к полному изображению этого объекта.

Повторение пройденного (визуальные стандарты прямых $y = k$ и $y = x$) осуществляется при заполнении теста со звездочкой (рис. 8.14, внизу).

Постепенность и последовательность в формировании визуального стандарта прямой $y = -x$ обеспечена тренажерами №2-3 (рис. 8.15) и серией №4 (рис. 8.16). Тренажер №2 позволяет определить “направление” прямой, которую (по заданию тренажера 3) ученики должны построить самостоятельно. Серия №4 (рис. 8.16) формирует обратные действия.

Каждая последующая задача представляет условия более сложные, чем предшествующая.

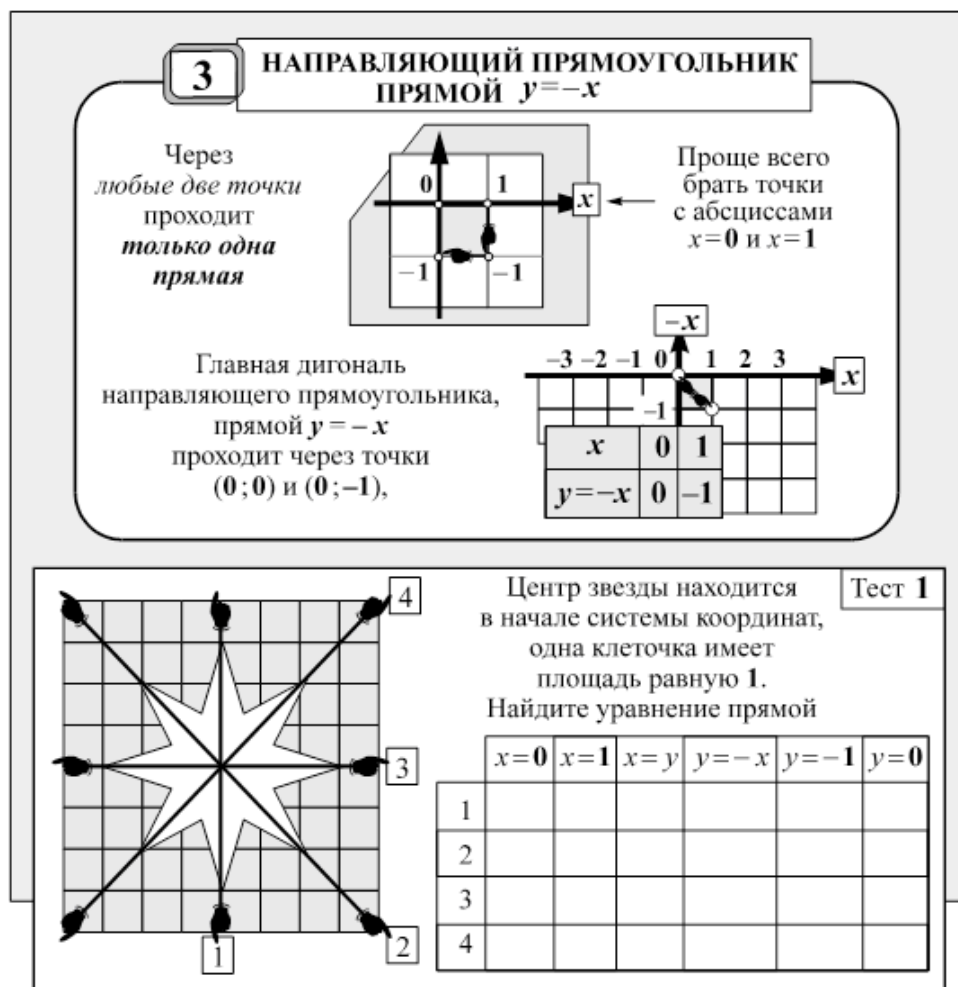


Рис. 8.14.

Визуальные рекомендации к построению прямой $y = -x$ (вверху),
тест, на хождение формулы функции по ее графику (внизу)



Рис. 8.15.

Тренажеры на построение
направляющих прямоугольников прямой

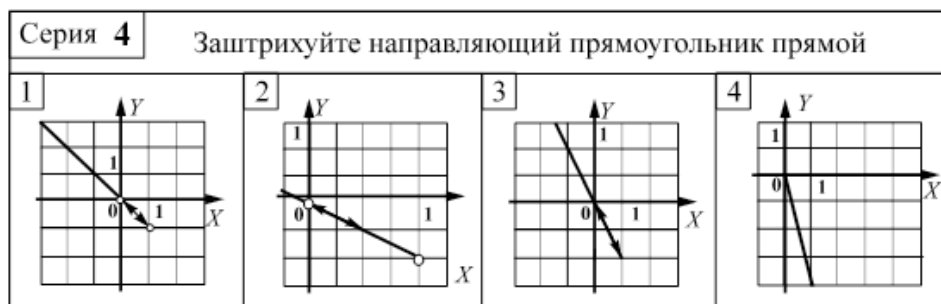


Рис. 8.16.

Задания на построение направляющих прямоугольников прямой
в разных системах отсчета на каждой из осей координат

В первом задании (рис. 8.16.1) система отсчета традиционна: единице измерения соответствует одна клеточка всей “сетки”.

Во втором упражнении (рис. 8.16.2) система отсчета изменена (по горизонтали на единицу приходятся три клеточки, по вертикали – две) и т.д.

Далее эти ориентиры постепенно “изымаются” – ученик должен самостоятельно восстанавливать их (рис. 8.16.3-4).

Последние задания (“Правильные ответы” 5-8) позволяют еще раз обдумать полученные сведения, сделать полезные обобщения (см. рис. I.04 на стр. 482).

Численная обработка результатов работы по данной тетради приведена в последнем параграфе данного исследования. Здесь отметим, что в итоге все цели, поставленные нами при конструировании этих материалов, были выполнены.

В частности (по свидетельству учителя) практически все ученики, участвующие в эксперименте, по аналитическому заданию линейной функции $y = x + k$ (квадратичной $y = x^2 + k$) опознавали прямую (параболу), могли указать ее расположение по отношению к оси Y и определить куда происходит сдвиг стандарта прямой (параболы).

Подробное и тщательное выполнение геометрического задания показательной функции по основанию **2** может привести к полезным ассоциациям. “Точки опоры” в виде цифр (на оси абсцисс: **–1, 0, 1**; на оси ординат: **1/2, 1** и **2**) позволяют определить (предугадать) соответствия для экспоненты с основанием **3** и **4**. (Конечно, на рисунке 8.17 лучше было бы этот визуальный ориентир выделить цветом).

Подобные исследования позволяют сформировать образ экспоненты с основанием $a > 1$ (в рамке).

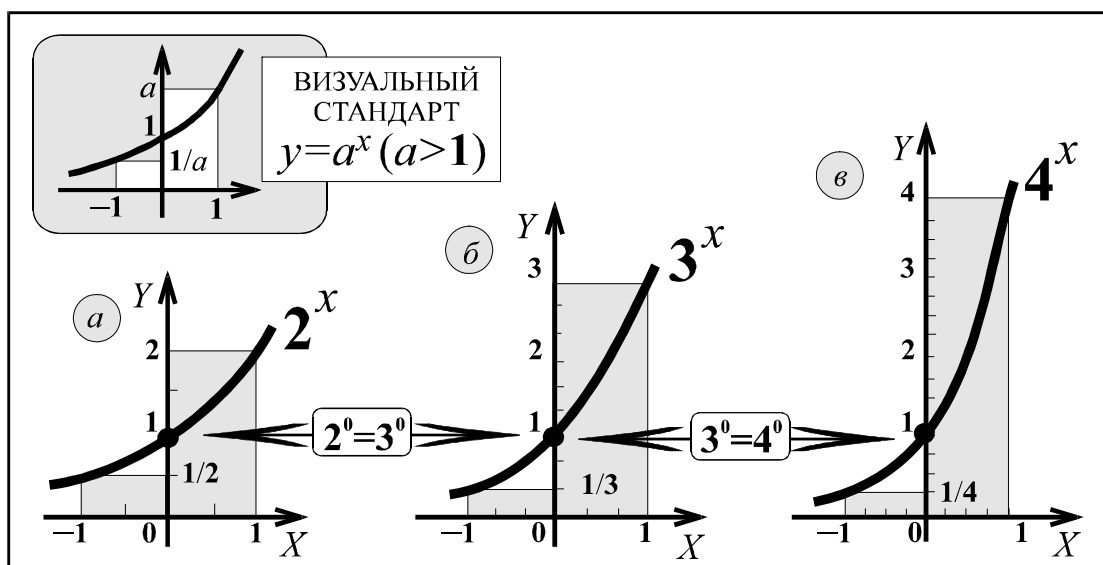


Рис. 8.17.

Визуальные ориентиры
для построения экспонент с разными основаниями

При построении графиков более сложных функций (особенно на начальных этапах) важно

- строго соблюдать цветовую гамму в их аналитическом и геометрическом заданиях,
- четко фиксировать направление отсчета на числовых осях (слева направо по горизонтали, снизу вверх по вертикали),

- выбирать единицы измерения (в школьной тетради – две клетки на единицу, три – на число $\pi/2$ для тригонометрической функции и т.д.),
- выделять основные и вводить вспомогательные элементы.

Приведем пример возможного хода решения задачи, весьма показательной с точки зрения использования графических стандартов.

Задача. Построить график функции $y = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1}, & -1 < x \leq 2 \\ x - 2, & x > 2 \end{cases}$.

Для начала построим геометрические стандарты кривых:

$$y = x^2, y = \sqrt{x}, y = x.$$

Т.е. в визуальной форме мы отвечаем на вопрос “Что задано?” (рис. 8.18.1).

Осуществим перемещение графиков в соответствии с формулами условия, т.е. определим “Где задано?” (рис. 8.18.2).

Выделим те участки кривых, которые удовлетворяют начальным ограничениям. Тем самым мы ответим на вопрос: “Когда, т.е. как развивается наша функция во времени?” (рис. 8.18.3).

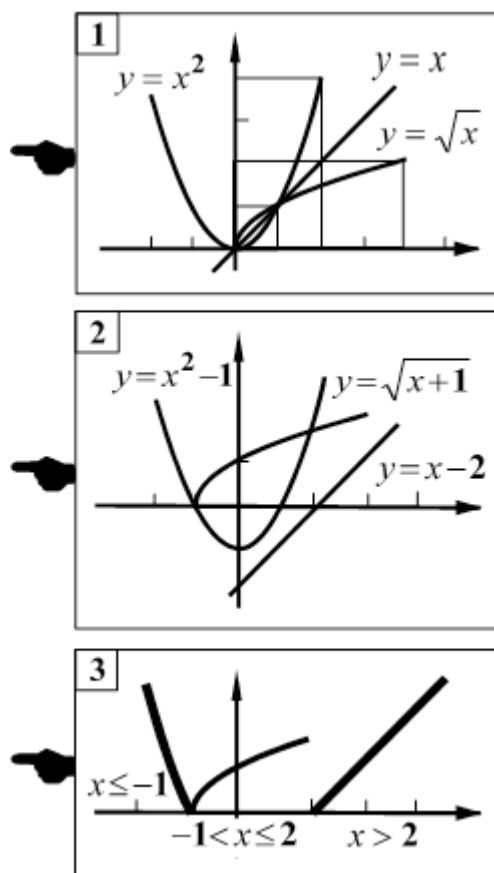


Рис. 8.18.

Построение
графика функции
по заданной формуле

И, наконец, вносим корректировку, необходимую для сохранения закона функциональности, т.е. определяем поведение функции “на стыках”.

(Полностью оформление хода решения этой задачи дано на рисунке 8.19).

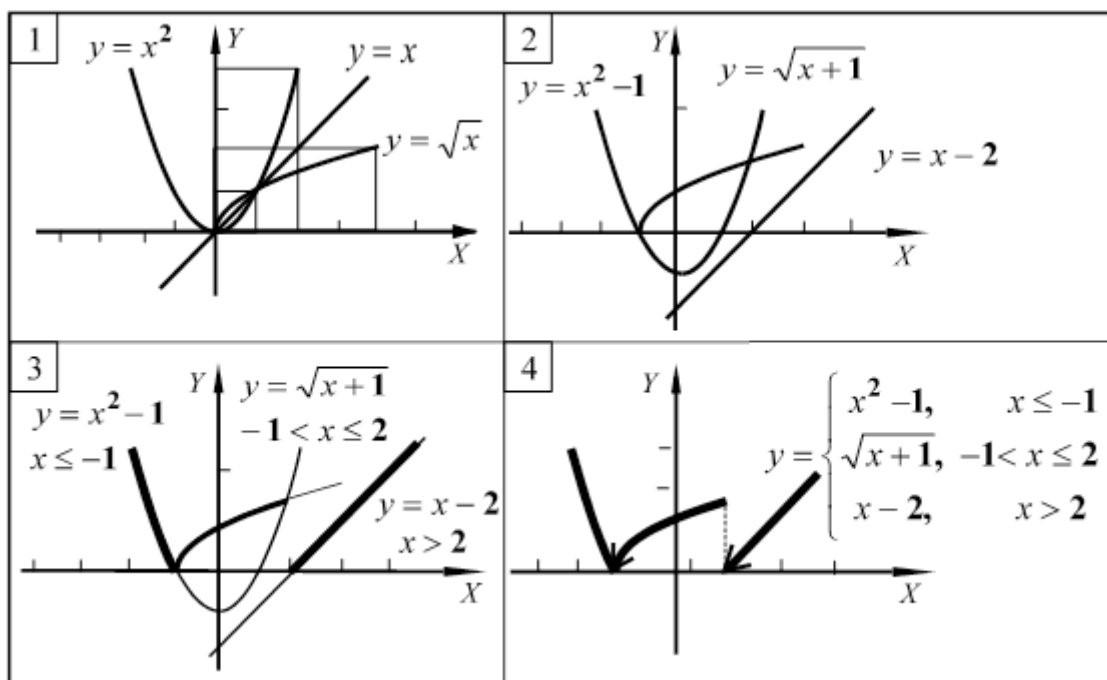


Рис. 8.19.

Построение графика кусочно-непрерывной функции:
графики исходных функций (1), сдвиги их по оси абсцисс (2),
учет области определения каждой из функций (3), результат (4)

Словами С.А. Шапоринского подведем важный итог.

«Образ – это сплав зримого и знакомого. Последнее не только входит в содержание образа, но и определяет то, что извлекается из зримого. Наглядный образ – результат переработки того, что было запечатлено, было зримо» [196, с. 53].

8.3. Развитие визуального образа

В качестве примера проследим развитие одного из интереснейших визуальных математических стандартов – тригонометрической окружности. Важность данного образа неоспорима, поскольку весь курс “вычислительной” тригонометрии и теории тригонометрических функций базируется на ее свойствах.

Начинать непосредственное знакомство с тригонометрической окружностью естественно с ее первой четверти. Здесь необходима постепенность, внимание к восприятию и усвоению учениками ее “секретов” – углы, которые можно построить без транспортира (рис. 8.20), величины синусов и косинусов этих углов и т.д.

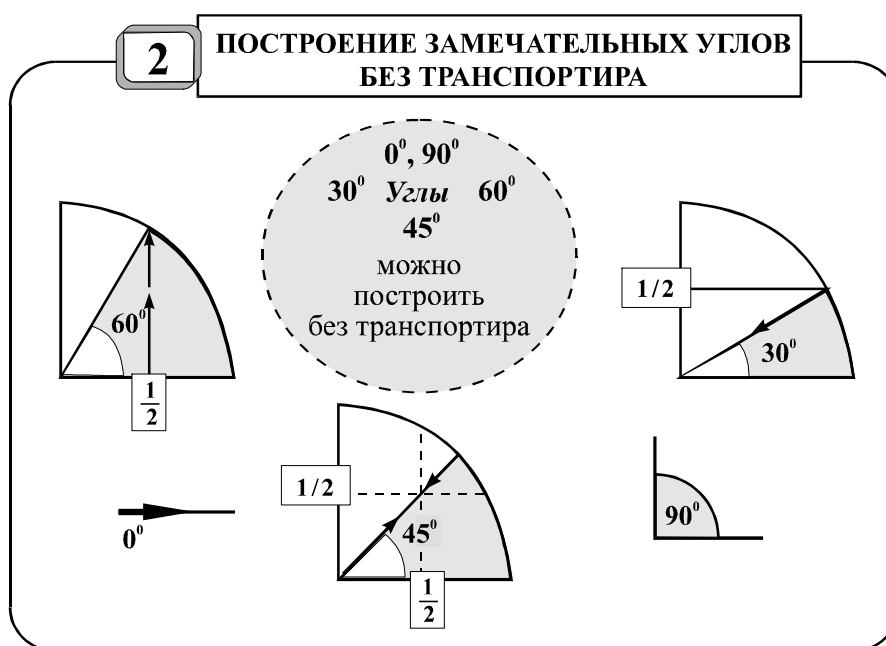


Рис. 8.20.

Информационная страница визуальной тетради
«Замечательные углы и числа»

Тригонометрическая окружность – это весьма сложный объект. Соединение строго организованного ряда числовых величин с адекватным

рядом простейших геометрических понятий (углов и дуг) достаточно трудны для восприятия и усвоения.

Именно поэтому здесь не следует торопиться – на первых этапах своего внедрения такой образ должен нести минимум информации (к примеру, соотношения числовых значений на самой окружности и ее диаметрах, как на рисунке 8.21).

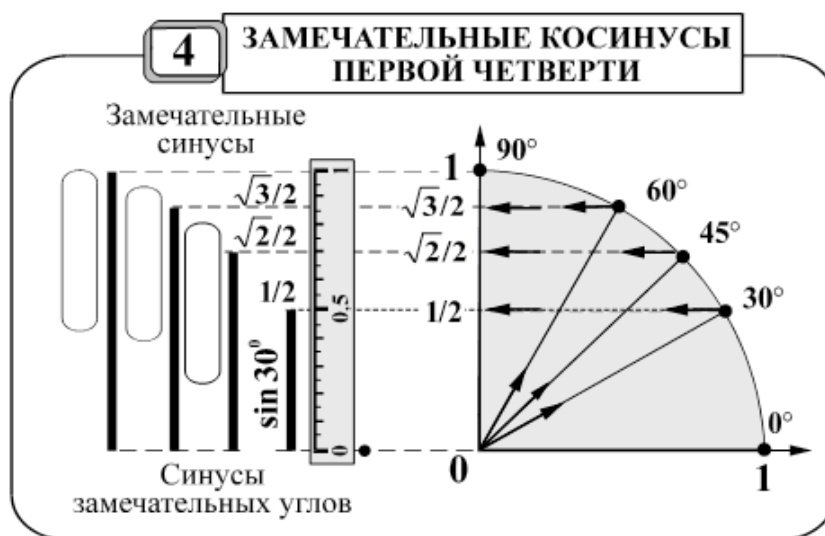


Рис. 8.21.

Информационные страницы визуальной тетради
«Синус и косинус, тангенс и котангенс»

Запас необходимых визуальных представлений учащихся еще сравнительно невелик, поэтому здесь самым подробным образом *показан* ряд “замечательных” чисел (рис. 8.22, внизу, справа).

Такой подход оказывается наиболее эффективным. Автор в своей практике (обобщение темы в выпускных классах школы, восстановление утраченных знаний на подготовительных курсах вуза), не раз убеждался в том, насколько полезна подобная наглядность. Типична реакция учащихся в этих случаях (цитируем): “Почему же нам это раньше не показали? Мы так мучились!”, “Наконец-то я видела синусы!” и т.д.

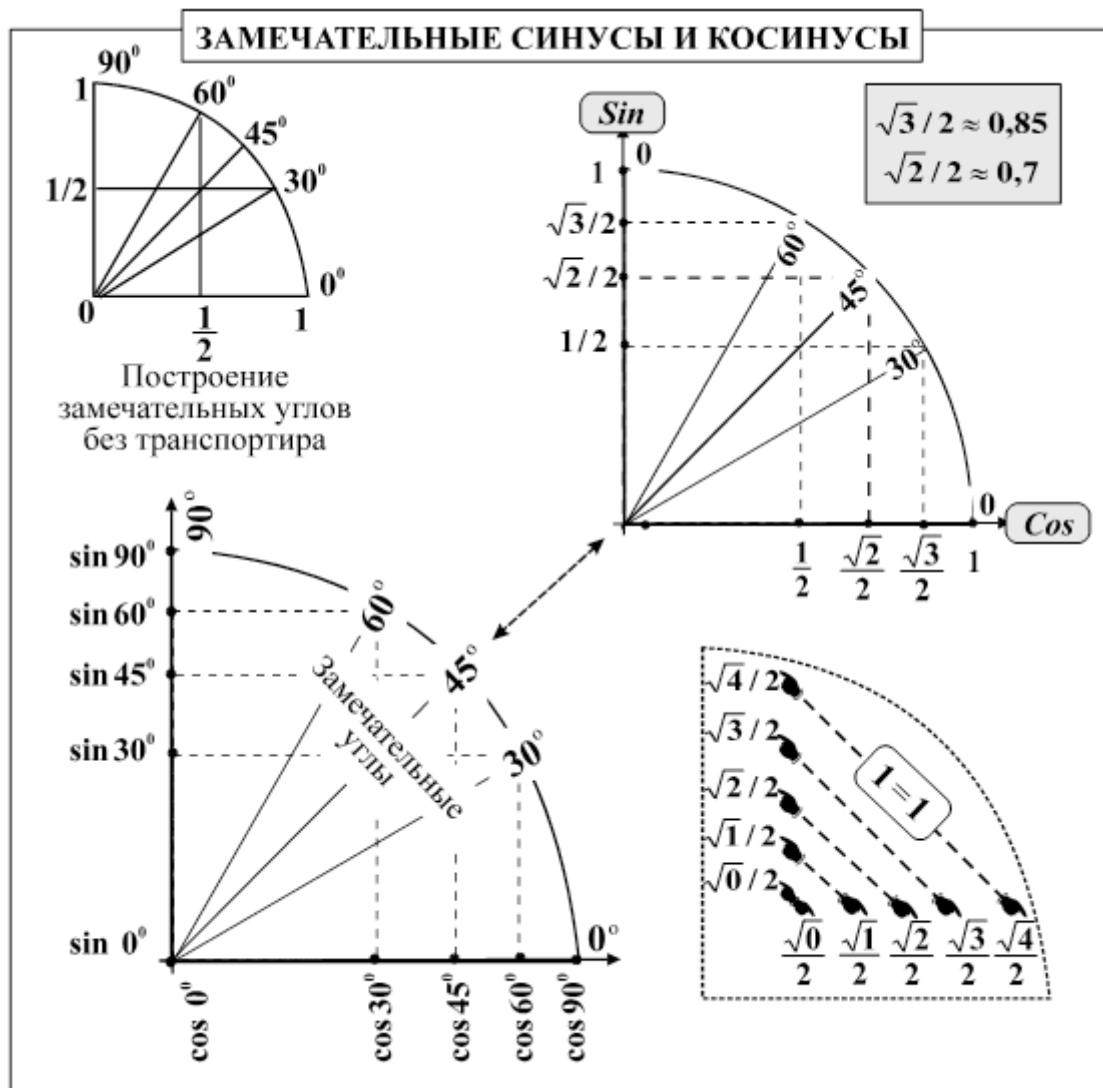


Рис. 8.22.

Информационная схема, предназначенная для пропедевтического периода изучения тригонометрии

Дальнейшая модификация образа может быть связана с определением конкретных линий – числовых осей, на которых отмечаются новые важные числовые значения, затем с общей демонстрацией этих значений (рис. 8.23).

Схема «Синусы и косинусы замечательных острых и тупых углов» (рис. 8.23, см. также рис. I.17 на стр. 495) и аналогичная ей схема «Синусы и косинусы противоположных углов» (см. рис. 2.03 на стр. 43),

а также схема «Замечательные котангенсы» (рис. 8.24) расширяют представления о свойствах тригонометрической окружности.

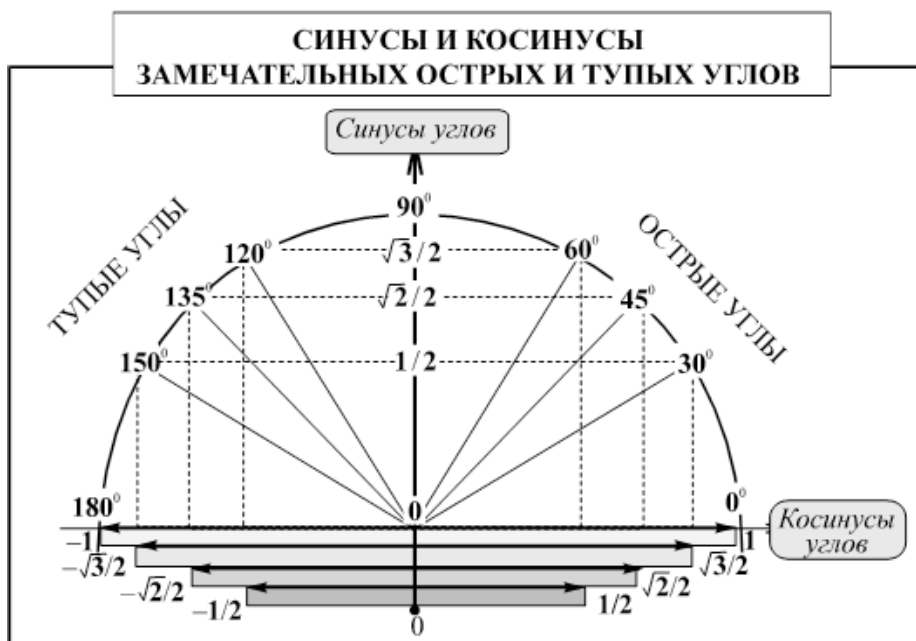


Рис. 8.23.

Сопоставление значений синусов и косинусов
замечательных острых и тупых углов

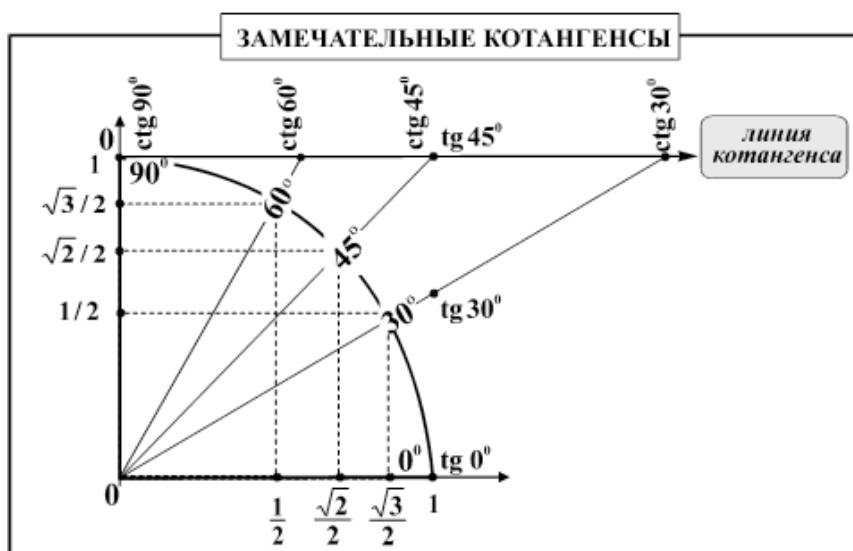


Рис. 8.24.

Введение котангенсов замечательных острых углов

Содержание предшествующей им схемы (см. выше рис. 8.22) полностью включено в них так, что учащийся может при необходимости свободно восстановить исходные данные, порождающие очередной вариант временного справочника.

Стандарт “Тригонометрическая окружность” представляет собой прекрасную модель для формирования связей между отдельными разделами математики. Действительно, “осваивая” тригонометрическую окружность, учащийся работает с целыми, дробными, рациональными и иррациональными числами, использует и одновременно обогащает свои геометрические представления о простейших плоских фигурах, учится проводить доказательные рассуждения и оформлять различного вида преобразования.

Трансформации (развитию) может подвергаться не только вся схема, но и ее отдельный фрагмент.

Это поможет в сложных переходах, в тех случаях, когда на изучение темы школьной программой отпущено недостаточное количество часов (рис. 8.25, см. также рис. I.21 на стр. 499).

Подобная вспомогательная схема позволит учащимся легче и быстрее ориентироваться в дальнейших преобразованиях основной информационной схемы и решать разнообразные задачи (рис. 8.26, см. также рис. I.18 на стр. 496).

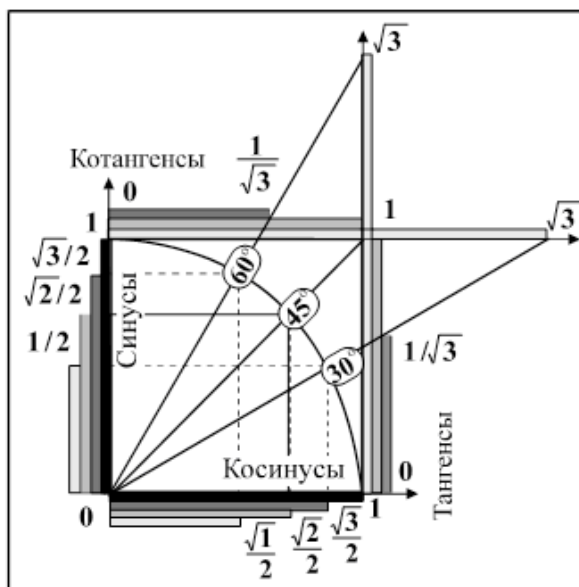


Рис. 8.25.

Преобразованный фрагмент
информационной схемы

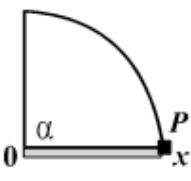
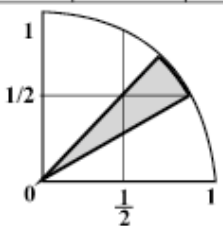
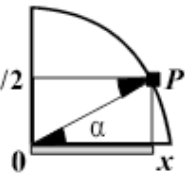
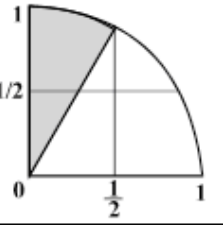
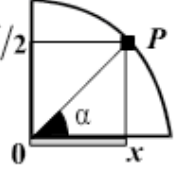
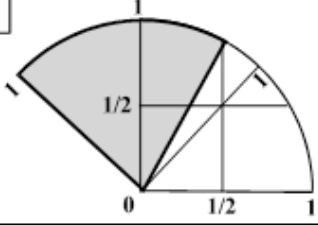
МАТРИЦА 3	Для каждого угла α определите и запишите				
ПОСТРОЕНИЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ УГЛОВ БЕЗ ТРАНСПОРТИРА	угол, на который по отношению к начальному положению, переместилась точка P	угол, на который по отношению к предшествующему положению, переместилась точка P	длину отрезка x	что больше: $1/2$ или $\cos\alpha$	число, равное $\sin\alpha - \cos\alpha$
	Серия 1 Определите (не пользуясь транспортиром) величину затушеванного угла 1 				
	2 				
	3 				
					

Рис. 8.26.

Визуальные задачи из тетради

«Синус и косинус, тангенс и котангенс»

Информационная схема “Тригонометрическая окружность” (рис. 8.27) является итоговой, поскольку практически все сведения на данную тему представлены в ней явным или скрытым образом.

Она формируется так, чтобы учащийся всегда мог самостоятельно восстановить ее (заполнить пропуски в каждом из ее фрагментов). Эта схема соединяет в себе ряд стандартных образов, позволяющих описать:

- единичную окружность;

- оси синуса, косинуса, тангенса и котангенса;
- замечательные углы $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$;
- свойства и поведение тригонометрических функций;
- значения каждой из функций при конкретных (из перечисленных) значениях аргумента и т.д.

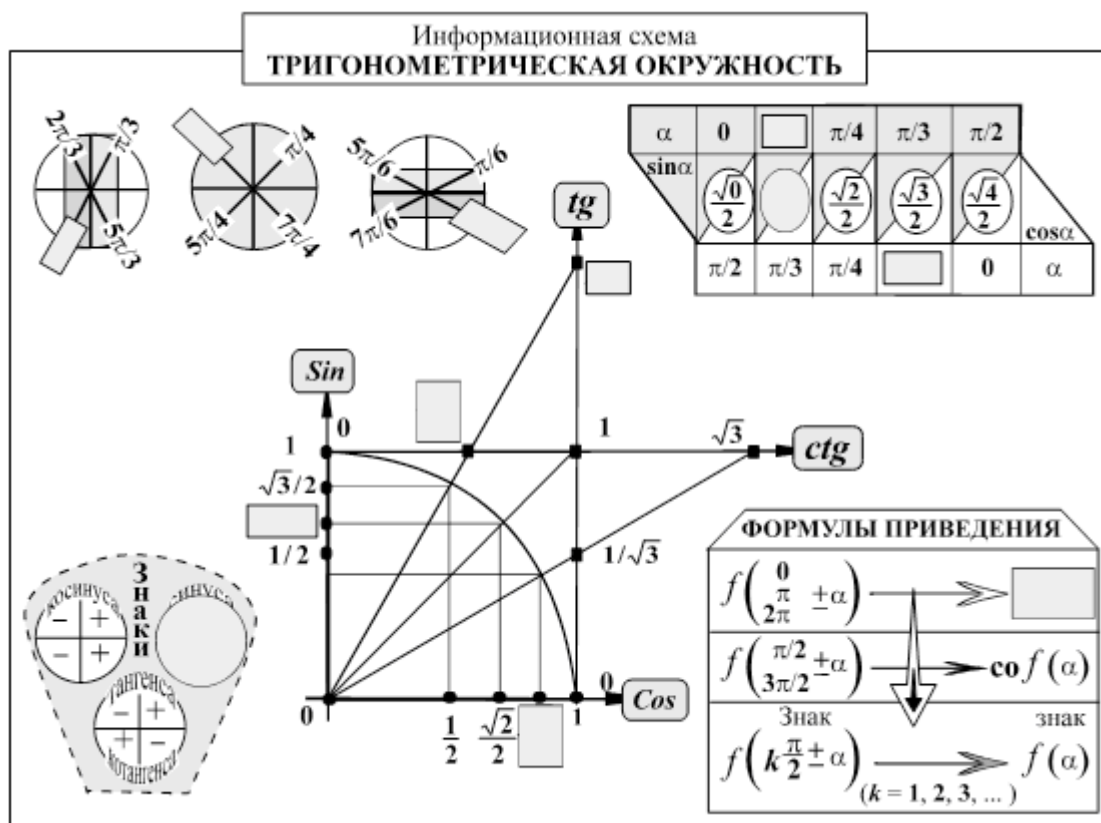


Рис. 8.27.

Превращение информационной схемы
в комплект визуальных задач

Использование данного справочника может быть многократным и разнообразным.

Приведем примеры.

№1. Значения тригонометрических функций угла в 30° .

№2. Период тангенса (см. рис. I.20 на стр. 498).

№4.Решение простейшего тригонометрического уравнения.

№5.Преобразование тригонометрического выражения типа

“Упростить выражение $\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha - 2}$, если $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$,”

(рис. 8.28, см. также рис. I.20 на стр. 498).

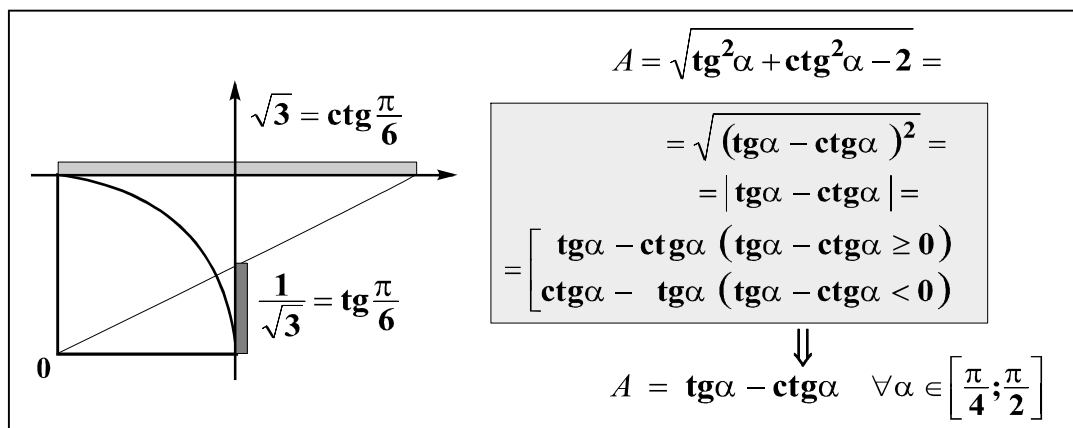


Рис. 8.28.

Пример решения визуальной задачи,
построенной на использовании свойств тригонометрической окружности

Планомерное формирование визуального образа тригонометрической окружности может дать весьма ощутимые результаты.

Так, например, в 1995/96 учебном году в 10 экономическом классе Мурманского морского лицея за двухчасовое занятие был практически повторен весь теоретический материал и решено большое количество примеров из специальных дидактических комплектов (см. рис. V.25-V.28 на стр. 611-614).

Урок порастил присутствующих (более 30 учителей) высокой продуктивностью. Это стало возможным, в силу того что ученики этого класса в течение трех лет обучались средствами визуальной методики преподавания практически по всем разделам

школьного курса математики. Вот что пишет о визуальных средствах обучения преподаватель этого класса Н.Г. Неделько.

Эффективность формирования... новых понятий в значительной степени зависит от того, в каком виде произошло первое знакомство с ним, т.е. каким оказался первый зрительный образ, ставший затем “носителем” данного понятия (сила первого впечатления).

Поэтому вначале изучения “Соотношения в прямоугольном треугольнике” лицеистам было показано много чертежей (картинок), в которых варьировались несущественные признаки... Чертежи и рисунки – эффективное средство формирования... умения подмечать закономерности на основе наблюдений, вычислений, преобразований и сопоставлений... Чертеж позволяет наглядно представить важную математическую идею, подвести их к осознанию даже неочевидного факта.

Такой стиль обучения привел к тому, что мои ученики научились “видеть тригонометрию”.

§9. Организация учебной математической информации

Визуальные образы-стандарты не должны быть чем-то застывшим, фотографически фиксирующим изучаемые объекты. Внедрение таких образов в учебный процесс предполагает не только последовательное формирование их, но при необходимости расчленение, сборку отдельных их деталей в иное единое целое – новое образование. Этому служит умение выделить в визуальных стандартах важнейшие свойства понятий, отразить определенные операции над ними.

Здесь налицо целесообразность активного использования различного рода визуальных дидактических материалов, которые мы разбирали достаточно полно и подробно.