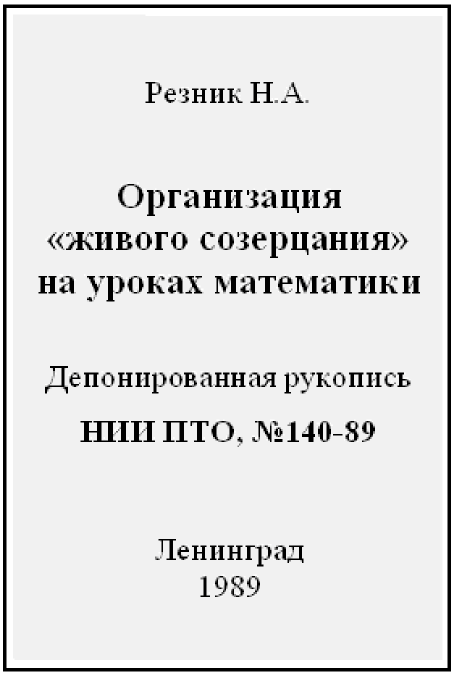
ОРГАНИЗАЦИЯ «ЖИВОГО СОЗЕРЦАНИЯ» НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Н.А. Резник



Резник Н.А.

Организация «живого созерцания» на уроках математики

Депонированная рукопись

НИИ ПТО, №140-89

Ленинград
1989

Автор: Резник Наталия Александровна, ассистент кафедры высшей математики Мурманского высшего инженерно-морского училища им. Ленинского комсомола (МВИМУ).

Источник:

Резник Н.А. Организация «живого созерцания» на уроках математики (депонир. рукопись). – НИИ ПТО, №140-89 – 46 с.

Коллажи и графика:

Резник Н.А.

Каждый учитель математики использует на уроках наглядный материал – формулы и чертежи на доске, рисунки и схемы на экране, плакаты и таблицы на стенах, модели и образцы на столах учеников. Первая цель учителя состоит в том, чтобы ученик смотрел на предъявляемые ему зрительные образы (этой цели достичь легко), вторая – чтобы ученик **ВИДЕЛ** (**понимал**), что заложено в этих образах. Культура зрительного восприятия требует такого же длительного и серьезного воспитания, как культура письма и речи.

В данной работе автором предлагается модель визуальной методики преподавания одного из предметов общеобразовательной и специальной школы – математики, основные положения которой могут быть использованы в преподавании других школьных дисциплин.

Одной из основных функций математики как учебного предмета является усвоение учащимися математического метода познания. При этом мышление, особые параметры которого задаются свойствами учебного знакового материала, должно функционировать всегда, когда есть возможность изложить содержание изучаемого процесса (явления) в визуально представимой форме.

При переходе от устных объяснений к записям, печатному тексту математического содержания происходит отвлечение, перестройка сознания на восприятие знаков как конкретных образов. Именно эта знаковая материализация математических понятий и отношений между ними принимается нами как необходимый атрибут процесса приема и усвоения математических знаний в условиях обучения в средней школе. Момент необходимый, поскольку восприятие символов (как конкретных образов) присутствует при введении каждого нового понятия и повторяется на каждом из этапов изучения курса.

Создаваемая нами методика направлена на формирование умения активно воспринимать и перерабатывать визуальную математическую информацию. Мы обозначили эту сторону умственной деятельности обучаемых словами “живое созерцание”. В основу “живого созерцания” учащихся на уроках математики мы предлагаем положить три выделенных нами важных этапа активного зрительного восприятия:

– анализ визуальной информации;
– распознавание стандарта;
– составление плана работы.

1. Анализ визуальной информации

Анализ визуальной информации начинается с осознания общей структуры информационного сообщения и выделения его элементов. Поясним, что мы понимаем под словами “элемент учебной математической информации” и “структура учебной математической информации”.

Под элементами учебной математической информации, задаваемой с помощью формул, будем подразумевать не только сами символы, но и такие их сочетания, которые можно рассматривать как логически осмысленные “части” (взаимосвязанные блоки) этой информации.

Так, если a и b – элементы некоторого алгебраического выражения, то $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, a/b и т.д. в зависимости от условий также могут оказаться его элементами. Естественно, что и аналитическая форма задания функциональных зависимостей ($\sqrt{x}$, x^n, $|x|$, $\mathbf{lg}\,x$, $\mathbf{sin}\,x$, $\mathbf{tg}\,x$ и т.д.) выступает как некоторый самостоятельный неделимый элемент.

Образование навыков определения элементов структуры формульной информации следует начинать уже с 5-6 классов школы. Разложение на множители и сокращение дробных выражений – операции, которые доставляют много "неприятностей" и учителю и ученику.

Действительно, чтобы объединить, осмыслить тождественность обозначений типа $\mathbf{lg}^2 x$, $\mathbf{log}_{10}^2 x$, $(x)^2$, $(\mathbf{log}_{10} x)^2$, $\dfrac{1}{(\mathbf{log}_{10} x)^{-2}}$, $\left(\mathbf{lg}^{-2} x\right)^{-1}$ и т.д. необходима определенная математическая культура – знание различных форм записей одного и того же математического объекта, правил преобразования одной из них в другую, умение смотреть и видеть.

Однако практика показывает, что учащиеся в большинстве случаев затрудняются в опознании "одинаковых" или "стандартных" (хорошо известных, основополагающих) элементов информации при решении практических задач. Даже в более простых случаях наблюдается, что у учащихся отсутствует восприятие знаковых структур как некоторых зрительно воспринимаемых образований – визуальных образов, особенности которых поддаются активному зрительному анализу.

Различные задания к одному и тому же образу позволяют сосредоточить внимание ученика на определенной операции. К примеру, ученик неполной средней школы, знакомый с правилом сокращения дроби, но не имеющий представления о логарифмах, может сообразить, что $\dfrac{(\mathbf{ln}\,x)^2}{\mathbf{ln}\,x} = \mathbf{ln}\,x$, оперируя с выражением $\mathbf{ln}\,x$ как с единым неделимым элементом. Учебная математическая информация, задаваемая иллюстративным образом, также довольно четко подразделяется на элементы.

При изображениях пространственных тел или плоских фигур в одних случаях к элементам относятся сами эти фигуры, в других – выделенные на чертежах их составляющие (высоты, углы, грани, вершины и т.д.). Графическая иллюстрация функциональных зависимостей включает в качестве элементов оси координат, области определения и множества значений, конкретные значения переменных, участки кривых, оси симметрии и т.п.

Разумеется, подобная дифференциация математической информации на элементы весьма условна. Так, при изучении частных значений функции к элементам относятся все мельчайшие подробности как формульного, так и геометрического способов их предъявления. При переходе же к оценке поведения функции на отрезке, мы укрупняем наблюдаемые элементы, нас интересуют уже не “частности”, а поведение функции “в целом” – на определенном интервале.

Под **структурой** математического информационного сообщения мы подразумеваем относительно устойчивую систему связей элементов, образующих целое – исходную информацию. Одной из самых важных сторон осознания структуры информационного фрагмента является определение связей между его элементами. Например, задание “Расставить знаки умножения в выражениях:

а) $\dfrac{\mathbf{tg}\left(x+y\right)a^{x+y}}{\mathbf{sin}\,x\,\mathbf{cos}\,x}$; б) $\dfrac{\mathbf{lg}\,a\,b}{\mathbf{lg}\left(a-b\right)\mathbf{lg}\left(a+b\right)}$;

часто выполняется учащимися следующим образом:

а) $\dfrac{\mathbf{tg}\cdot\left(x+y\right)\cdot a^{x+y}}{\mathbf{sin}\,x\cdot\mathbf{cos}\,x}$; б) $\dfrac{\mathbf{lg}\cdot a\cdot b}{\mathbf{lg}\cdot\left(a-b\right)\cdot\mathbf{lg}\cdot\left(a+b\right)}$.

При переписывании условия задачи ученики постоянно допускают ошибки типа $\sqrt{a}+b$ вместо $\sqrt{a+b}$, $a^{3}\sqrt{b}$ вместо $a\sqrt[3]{b}$ и т.д., что приводит к изменению смысла исходного условия. Здесь дело не только в незнании определенных математических законов, но и в “невоспитанности” математического зрения.

Именно этим и можно объяснить огромное количество “описок” при перенесении информации с доски или учебника в тетради учащихся. Они так увидели и так переписали, не подумав о возможности различных связей между отдельными элементами математической конструкции. Осознание, визуальный анализ, “живое созерцание” структуры информации имеет громадное значение при использовании известной формулы. Довольно часто, зная, что $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, учащиеся, тем не менее, пишут: $\sqrt[3]{\left(x+1\right)}^{\,2}=\left(x+1\right)\dfrac{2}{3}$.

Активное созерцание формулы плохо реализуется в учебной практике. И это притом, что подавляющее количество примеров и задач любого учебника для каждого класса школы посвящено отработке навыка – по известной формуле составить, преобразовать, вычислить значение. Практически нельзя найти раздел дисциплины естественно-математического цикла, где умение расчленять информацию на элементы и определять ее структуру оказалось бы “без работы”.

Важным этапом анализа визуальной информации является нахождение одинаковых элементов. Формально такие элементы распознать легко. Особое значение имеет нацеленность на их обнаружение.

Например, выполняя задание “Вычислить $\dfrac{\sqrt{6,3\cdot 1,7}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{6,3}{1,7}}-\sqrt{\dfrac{1,7}{6,3}}\right)}{\sqrt{(6,3+1,7)^2-4\cdot 6,3\cdot 1,7}}$”, многие учащиеся стремятся выполнить все операции с помощью микрокалькулятора,вместо того, чтобы выделить два повторяющихся числа “**6,3**” и “**1,7**” и применить формулы сокращенного умножения (рис. 1).

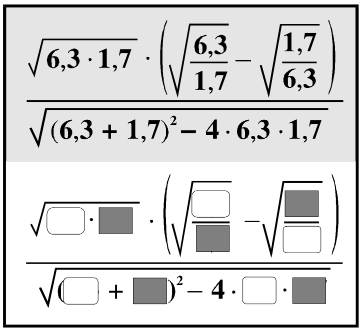


Рис. 1

Большие трудности в обнаружении одинаковых элементов вызывает различная форма их записи (или изображения). Приведем пример.

Группе выпускников школы, занимающихся на подготовительных курсах, автором было предложено вычислить $\mathbf{lg}^2 x\,(\mathbf{log}_{10} x)^2-\dfrac{\mathbf{log}_{10}^2 x}{(\mathbf{lg} x)^{-2}}$. Из 35 слушателей только один не стал тратить время на преобразования, сразу увидев результат.

Целенаправленное воспитание “живого созерцания” структуры, определение одинаковых и различных элементов информации поможет во многих случаях увидеть ответ без оформления промежуточных процедур. При решении геометрических задач полезно отыскивать равные углы, подобные или конгруэнтные треугольники и т.д., даже если они не выделены, не обозначены на чертеже. Превращение визуального анализа чертежа в привычку значительно обогатит возможности самостоятельной работы учащихся.

Обнаружение одинакового (подобного) может сопровождаться изменением или дополнением имеющейся информации, осуществлять которые допустимо различными способами: подчеркивание, обведение в кружок, выделение цветом, специальная символика и т.д. Это известный прием, но важно, что перенос данного действия в сферу визуального анализа дает возможность одновременно с выявлением одинаковых элементов подойти к укрупнению.

Основой укрупнения является метод замены, широко используемый, в частности, при преобразованиях алгебраических. Принцип замены имеет далекие перспективы в смысле формирования математического “зрения”. Таким образом, мы формируем и используем способность зрения не просто видеть наборы алгебраических или иных символов, но и учим его (зрение) выделять те, которые совпадают по своей сути, помогая работе мысли для осознания структуры и, как следствие, выбора пути дальнейших преобразований.

Выделение блоков, укрупнение схем, введение новых обозначений, раскраска чертежа или текста и т.п. могут служить внешним выражением результата первого этапа активного зрительного восприятия – анализа визуальной информации.

2. Распознавание стандарта

На втором этапе активного зрительного восприятия информации учащийся отождествляет отдельные ее фрагменты с известными ему достаточно простыми объектами и понятиями, которые мы называем стандартами. Для усиления целенаправленности этой работы необходимо разобраться в постановке задания, понять и сформулировать “на что” дана задача, т.е. к какому стандартному типу она может быть отнесена. Приведем примеры ожидаемых формулировок.

1. Упростить алгебраическое выражение с помощью формул сокращенного умножения.

2. Решить неравенство, используя метод интервалов.

3. Решить тригонометрическое уравнение (с возможным указанием конкретного приема или типа уравнения).

4. Определить экстремумы функции с помощью производной.

5. Вычислить объем тела вращения.

Основная часть работы по распознаванию стандарта происходит по схеме “специализация-обобщение”. Например, увидев на доске выражение типа $A = \mathbf{4}^x + \mathbf{3} \cdot \mathbf{2}^{\mathbf{2}x-\mathbf{1}} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{3}-\mathbf{2}x}$, учащийся в каждом слагаемом должен опознать функцию вида $y = \mathbf{k} \cdot a^x$, отметив для себя, какие основания показательной функции включены в условие.

Разумеется, первый и второй этапы работы с визуальной информацией часто не разделяются во времени, а тесно переплетаются. Так, если указанное выражение входит в уравнение $A = \mathbf{4}^x + \mathbf{3}\cdot\mathbf{2}^{\mathbf{2}x-\mathbf{1}} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{3}-\mathbf{2}x}$, то визуальный анализ этой формулы может содержать следующие моменты:

1. Уравнение включает в себя показательные функции – это показательное уравнение – опознание стандартной постановки задачи.

2. В уравнение входят показательные функции с основаниями **2**, **4** и **1/2** – распознавание стандартного объекта.

3. Все слагаемые в правой части можно представить как показательные функции с одним и тем же основанием “**2**” – опознание одинаковых элементов.

4. Известны два стандартных типа показательных уравнений: $a^x = b$ и $a^{\mathbf{2}x} + pa^x + q = \mathbf{0}$. Для их опознания надо сравнить показатели степеней, не обращая внимания на постоянные (еще один стандарт – отождествление a^{x+c} и $\mathbf{k}a^x$) – целенаправленность дальнейшего анализа.

5. Все слагаемые имеют вид $\mathbf{k}a^{\mathbf{2}x}$, т.е. представляют собой одинаковые степени одного и того же основания (теперь видно, что этим основанием можно взять как число **2**, так и **4**) с точностью до постоянного множителя – отождествление одинаковых элементов.

6. После выкладок мы получим в левой части три подобных слагаемых типа $\mathbf{k}a^{\mathbf{2}x}$ и, сложив их, придем к стандартному уравнению вида $\mathbf{A2}^{\mathbf{2}x} = \mathbf{5}$, для решения которого есть стандартная формула (свернут еще один шаг – укрупнение схемы, при котором $\mathbf{2}^x$ воспринимается как *z* без формальной замены $z = \mathbf{2}^x$).

Теперь все готово к проведению заключительного этапа анализа – составлению мысленного плана работы, которого мы коснемся чуть позже.

Принцип замены играет существенную роль в использовании стандарта. Заменяя “эталон” на определенный символ, мы как бы освобождаем от его влияния основную структуру выражения и помогаем увидеть (предвидеть) ответ, облегчая дальнейшую работу.

Так, уравнение типа $(\mathbf{lg}\,x)^{\sin^2 23^\circ}\cdot(\mathbf{lg}\,x)^{\cos^2 23^\circ} = \mathbf{3}$ может быть решено, если

учащийся умеет производить мысленные замещения, которые на соответствующей иллюстрации мы оформили в рамках (рис. 2).

Таким образом, в практическом задании стандарт выступает как ориентир, позволяющий определить именно то учебное понятие, изучению свойств которого посвящено задание.

Чтобы успешно осуществлять поиск стандарта, необходимо ориентироваться во всем многообразии различных обозначений одних и тех же математических объектов и их свойств, чему часто препятствуют недостаточно развитые навыки учащихся.

$$(\lg x)^{\sin^2 23^\circ} \cdot (\lg x)^{\cos^2 23^\circ} = 3 \longleftarrow \boxed{\lg x = a}$$

$$\Downarrow$$

$$a^{\sin^2 23^\circ} \cdot a^{\cos^2 23^\circ} = 3$$

$$\Downarrow$$

$$a^{\sin^2 23^\circ + \cos^2 23^\circ} = 3$$

$$\Downarrow$$

$$a = 3 \longrightarrow \boxed{a = \lg x}$$

$$\Downarrow$$

$$\lg x = 3$$

$$\Downarrow$$

$$x = 10^3$$

Рис. 2

В подобных случаях следует специально “остановиться”, выяснить причину ошибок или возникшего затруднения.

$f($	x	$) = 3$	$\cdot$	x	$+1 - \cos$	x
$f($	2	$) = 3$	$\cdot$	2	$\square$	$- \cos$ 2
$f($	a	$) = 3$	$\cdot$	$\square$	$+1 - \cos$	a
$f($	$x+1$	$) = 3$	$\cdot$	$\square$	$+1 - \cos$	$(x+1)$
$f($	$\frac{1}{x}$	$) = 3$	$\cdot$	$\frac{1}{x}$	$+1 - \cos$	$\square$
$f($	x^2	$) = 3$	$\cdot$	$\square$	$+1 - \cos$	$\square$
$f($		$) = 3$	$\cdot$	$\sin\alpha$	$+1 - \cos$	$\square$

$f(x)$	$\mathbf{A} \cdot f(\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}) + \mathbf{B}$
$2\sin x - 1$	$2 \cdot \sin(1 \cdot x + 0) + (-1)$
$3e^{x-1}$	
$\sqrt{2x-1}$	
$\ln \frac{x}{2}$	

Рис. 3

Для закрепления необходимых умений большую роль может сыграть следующий методический прием. Предъявляется одновременно серия примеров со специальным оформлением и особым расположением на плоскости листа. Ученик должен, ориентируясь на верхнюю строчку (общую модель), ввести в таблицу недостающие данные (рис. 3, слева).

В процессе работы выясняется, что все выражения имеют вид $\mathbf{A}\,f\left(\mathbf{k}x+\mathbf{p}\right)+\mathbf{B}$.

Затем предлагается привести к тому же виду выражения типа:

$$3\sin\left(4x+1\right)+6;\qquad \frac{\sin\left(1-x\right)}{2}+1;$$

$$2+p\sin\left(\mathbf{k}x+\mathbf{p}\right);\qquad \sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right)+\sqrt{2};\qquad \frac{\mathbf{k}-\sin\left(\mathbf{k}x+\mathbf{p}\right)}{\sqrt{\mathbf{p}}},$$

используя те же принципы расположения и выделения элементов. Завершающим этапом может служить серия типа предложенной на рис. 3 (справа).

Отметим типичные случаи распознавания стандартов по схеме “обобщение-специализация” с параллельной демонстрацией специальных упражнений, взятых из различных разделов курса математики, которые служат иллюстрациями предлагаемых методических приемов.

Нахождение одинаковых элементов в структуре формулы.

Пример 1. Найти одинаковые элементы и, осуществив их замену буквой “*a*”, записать выражение $\dfrac{5\lg^{-2}x+7\sqrt{\lg x}}{3\log_{10}x-2\lg\dfrac{1}{x^{-1}}}$.

2. Определение стандарта в структуре геометрической конструкции.

Пример 2. На рис.4-а предложена иллюстрация к теореме “Признак скрещивающихся прямых”. Выделите этот стандарт на рис. 4-б,-в,-г (вверху).

Как и ранее, для начала определим структуру стандарта (рис. 4-д, вверху), благодаря которой придем к ответам (рис. 4-е,-ж,-з, вверху).

Пример 3. Какие из отмеченных фигур (рис. 4, внизу) являются плоскими сечениями куба?

3. Указание принадлежности функции к определенному классу.

Учащиеся часто путают наименования кривой с наименованием порождающей ее функции, поэтому мы считаем полезным внести в общий список и этот вопрос.

4. Нахождение значений функций.

5. Образование сложной функции и анализ ее структуры.

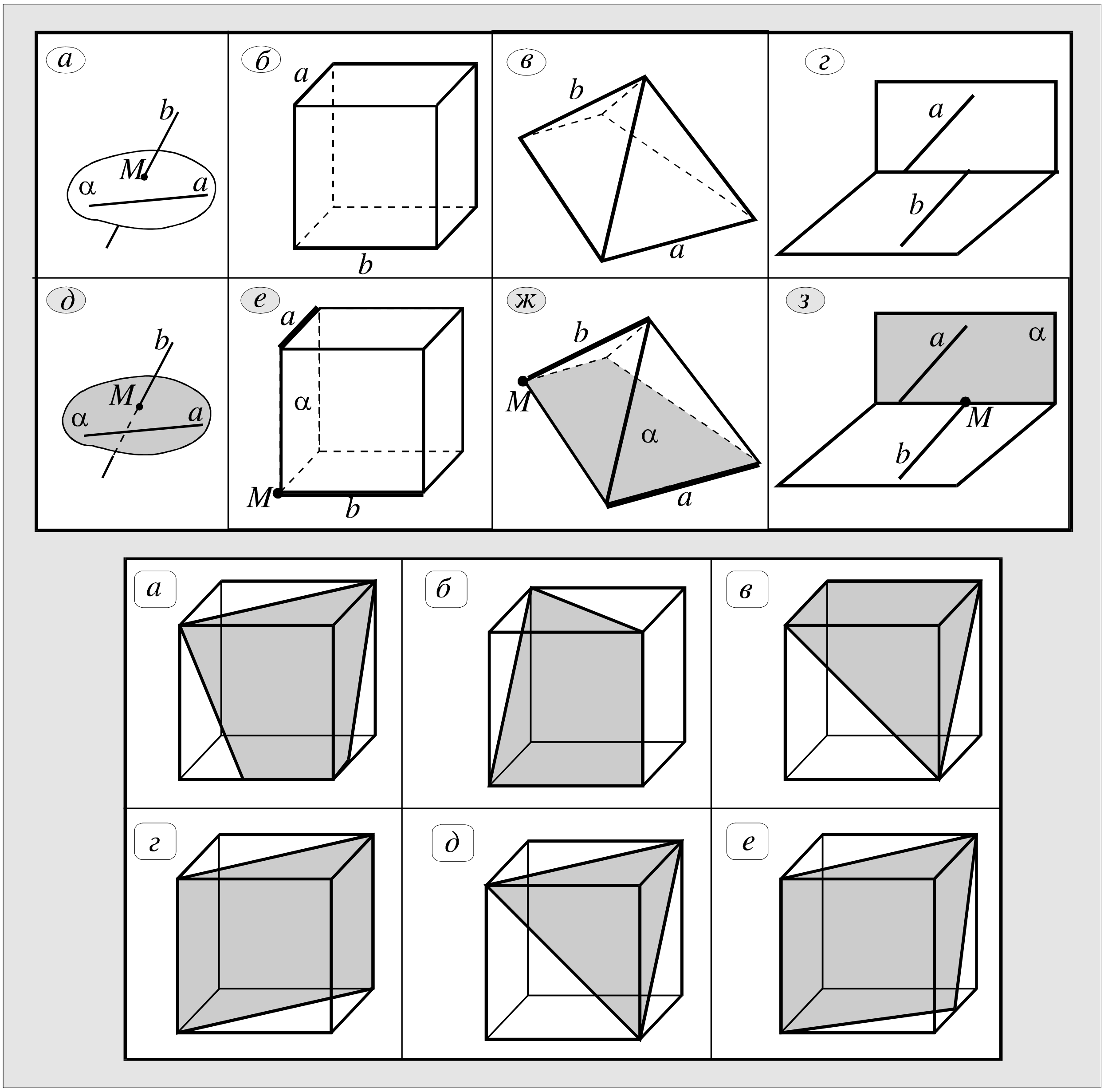


Рис. 4

Пример 4. «Пусть $f(x) = \mathbf{3}^x$; $g(x) = \mathbf{2}x - \mathbf{1}$; $p(x) = \mathbf{sin}\,x$.

Составьте функции:

а) $f[g(x)]$; *б*) $f[p(x)]$;

в) $p[f(x)]$; *г*) $g[f(x)]$;

д) $g[p(x)]$; *е*) $p[g(x)]$».

При построении сложной функции полезны «полиграфические» приемы. Сначала цветом обозначим структуру формулы каждой функции. Поскольку наши возможности в цвете здесь ограничены, то используем иной прием – представление структуры формулы путем “изъятия” аргумента “*x*” в ее записи (рис. 5).

$f(\quad) = \mathbf{3}^{(\quad)}$; $g(\quad) = \mathbf{2}(\quad) - \mathbf{1}$; $p(\quad) = \mathbf{ln}(\quad)$	$f(\circledast) = \mathbf{3}^{(\circledast)}$; $g(\circledast) = \mathbf{2}(\circledast) - \mathbf{1}$; $p(\circledast) = \mathbf{ln}(\circledast)$

а $f\left[g\left(x\right)\right] = \mathbf{3}^{\left[\mathbf{2}\cdot\left(x\right)-\mathbf{1}\right]}$	*б* $f\left[p\left(x\right)\right] = \mathbf{3}^{\left[ln\left(x\right)\right]}$	*в* $p\left[f\left(x\right)\right] = \mathbf{ln}\left[\mathbf{3}^{\left(x\right)}\right]$
е $g\left[f\left(x\right)\right] = \mathbf{2}\cdot\left[\mathbf{3}^{\left(x\right)}\right] - \mathbf{1}$	*д* $g\left[p\left(x\right)\right] = \mathbf{2}\cdot\left[\mathbf{ln}^{\left(x\right)} - \mathbf{1}\right]$	*г* $p\left[g\left(x\right)\right] = \mathbf{ln}\left[\mathbf{2}\cdot\left(x\right) - \mathbf{1}\right]$

Рис. 5

Построение формулы сложной функции требует той ступени мышления, которую мы ранее охарактеризовали как “визуально-логическую”. Действительно, здесь “переплетаются” и восприятие и абстрактные представления.

Такие примеры довольно часто вызывают у учащихся значительные затруднения. Особенно явно это ощущается при нахождении производных. Визуальное оформление специальных мини-алгоритмов позволяет увидеть основной принцип и успешно применить его.

6. <u>Изменение обозначений в формуле.</u>

7. <u>Нахождение и построение формулы сокращенного умножения (ее элементов) в сложной конструкции.Описание поведения функции на заданном интервале по ее графику.</u>

9. <u>Определение стандарта в структуре формулы</u>.

3. Составление плана работы

Организация описанных выше этапов “живого созерцания” знаковой информации приводит к тому, что становится возможным еще до оформления рассуждений (доказательств теорем, решений примеров и задач) наметить план работы и оценить возможные результаты.

В этап составления плана работы обычно входят:

– определение порядка действий,

– свертывание отдельных операций,

– прогонка вариантов решения задачи.

План работы над преобразованием содержания примера или задачи, предъявленной символьными средствами, может составляться при помощи перевода результатов визуального анализа данных в список конкретных команд. При этом отношение изолированности для каждого из отдельных моментов “живого созерцания” особенно активно преобразуется в отношение связи.

При прочно сформированных навыках визуального анализа информации, задания типа “Упростить $\frac{tg^4\alpha - tg^6\alpha}{\frac{1}{tg^4\alpha} - \frac{1}{tg^2\alpha}}$” легко переводятся учащимися в серию предписаний:

1. Заменить элемент “$tg^2\alpha$”.

2. Вынести общие множители.

3. Осуществить действия над дробями.

4. Вынести общие множители и, если можно, то сократить (перспектива сокращения на $1 - tg^2\alpha$ может быть обнаружена визуально).

5. Оформить результат.

Такая вербальная расшифровка визуального анализа исходного указания “Упростить” на деле является ответом на “немой” вопрос, неявным образом присутствующий в каждом практическом задании: какие знания требуются, чтобы можно было получить ответ?

Продемонстрируем свертывание целого комплекса формально-логических процедур на примере проведения доказательных рассуждений. Теорема “Сумма векторов, заданных своими координатами” с помощью вспомогательных средств визуального анализа, может быть изложена в виде рис. 6.

Предложим ученикам по данному образцу доказать теорему о разности векторов, заданных своими координатами. Обычно учащиеся добросовестно и правильно выполняют все преобразования, поскольку сам образец оформлен достаточно ясно и четко.

Однако к этому вопросу можно подойти и с другой стороны. Выделим цветом (или отметим кружочком) в первоначально приведенном доказательстве те знаки “плюс”, которые определяют именно операцию сложения векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, а не операцию суммирования составляющих компонентов каждого из них.

$$\begin{aligned}
\vec{a}_1 + \vec{a}_2 &= (x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2) = \\
&= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) + (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\
&= (x_1 \vec{i} + x_2 \vec{i}) + (y_1 \vec{j} + y_2 \vec{j}) + (z_1 \vec{k} + z_2 \vec{k}) = \\
&= (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k} = \\
&= (x_1 + x_2; \ y_1 + y_2; \ z_1 + z_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}_1 + \vec{a}_2 &= (x_1; y_1; z_1) \boxed{\pm} (x_2; y_2; z_2) = \\
&= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \boxed{\pm} (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\
&= (x_1 \vec{i} \boxed{\pm} x_2 \vec{i}) + (y_1 \vec{j} \boxed{\pm} y_2 \vec{j}) + (z_1 \vec{k} \boxed{\pm} z_2 \vec{k}) = \\
&= (x_1 \boxed{\pm} x_2)\vec{i} + (y_1 \boxed{\pm} y_2)\vec{j} + (z_1 \boxed{\pm} z_2)\vec{k} = \\
&= (x_1 \boxed{\pm} x_2; \ y_1 \boxed{\pm} y_2; \ z_1 \boxed{\pm} z_2)
\end{aligned}$$

Рис. 6

Эти приемы позволяют опустить все промежуточные логические операции, провести доказательство визуально (полностью или частично) без подробного письменного оформления.

Завершающим моментом составления плана работы является прогонка вариантов. Это наиболее трудная часть визуального анализа. Навыки мыслительной прогонки возможных вариантов вырабатываются путем долгой и кропотливой работы.

Данный момент трудно контролируется, так как он сильно зависит от индивидуальных особенностей ученика. В то же время овладение данным навыком – надежный путь к усилению самостоятельности и творческой активности учащегося. Поэтому заслуживают внимания частные примеры, в которых можно организовать прогонку вариантов большинством учащихся.

Приведем некоторые из них.

Целенаправленный визуальный анализ содержания учебной математической информации во многих случаях позволяет определить возможные результаты.

Речь идет об оценке элементов и блоков информационных сообщений, о влиянии структуры знакового материала на прогнозирование вида конечного результата.

Например, решение достаточно сложного задания

“Упростить выражение $\boxed{\dfrac{\sqrt[3]{a+\mathbf{2}\sqrt{a-\mathbf{1}}}}{\left(\sqrt{a-\mathbf{1}}\right)^{-1/3}}+\dfrac{\sqrt[3]{a-\mathbf{2}\sqrt{a-\mathbf{1}}}}{\left(\sqrt{a-\mathbf{1}}-\mathbf{1}\right)^{-1/3}}}$”

можно свернуть, если заметить особую симметрию блоков $\dfrac{\sqrt[3]{a+\mathbf{2}\sqrt{a-\mathbf{1}}}}{\left(\sqrt{a-\mathbf{1}}\right)^{-1/3}}$ и $\dfrac{\sqrt[3]{a-\mathbf{2}\sqrt{a-\mathbf{1}}}}{\left(\sqrt{a-\mathbf{1}}\right)^{-1/3}}$. Это “сопряженные” выражения.

Следовательно, скорее всего ответ будет складываться из пары их упрощенных модификаций вида “$k+p$” и “$k-p$”. Поэтому достаточно рассмотреть подробно только одно из слагаемых заданного выражения.

Осуществим начальные преобразования первого слагаемого:

$$\sqrt[3]{a+\mathbf{2}\sqrt{a-\mathbf{1}}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a-\mathbf{1}}+\mathbf{1}}.$$

По-видимому, следует ожидать результат типа $\sqrt[3]{(\quad)^3}$.

Если за сомножитель $\sqrt[3]{()^3}$ принять $\sqrt[3]{a+\mathbf{2}\sqrt{a-\mathbf{1}}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a-\mathbf{1}}+\mathbf{1}}$, то квадрат подкоренного выражения в точности равен выражению под первым из радикалов: $\sqrt[3]{a+\mathbf{2}\sqrt{a-\mathbf{1}}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a-\mathbf{1}}\quad+\mathbf{1}}=\sqrt{a-\mathbf{1}}+\mathbf{1}$.

Отсюда для второго слагаемого предположительно имеем: $\boxed{\dfrac{\sqrt[3]{a-\mathbf{2}\sqrt{a-\mathbf{1}}}}{\left(\sqrt{a-\mathbf{1}}\right)^{-1/3}}=\sqrt{a-\mathbf{1}}-\mathbf{1}}$.

Полезно повторить весь ход рассуждений еще раз, одновременно оформляя решение и проверяя последнее предположение.

Громадную помощь в прикидке результата могут оказать визуальные стандарты. Продемонстрируем их действие на примере “Определить знак произведения: $A=\mathbf{lg\,sin32^\circ}\cdot\mathbf{lg\,sin17^\circ}\cdot\mathbf{lg\,sin32^\circ}\cdot\mathbf{lg\,sin40^\circ}\cdot\mathbf{lg\,sin2^\circ}$”.

Осуществляя визуальный анализ геометрического предъявления соответствующих “порций” информации, от опорного стандартного образа приходим к ответу: $\boldsymbol{A<0}$ (рис. 7).

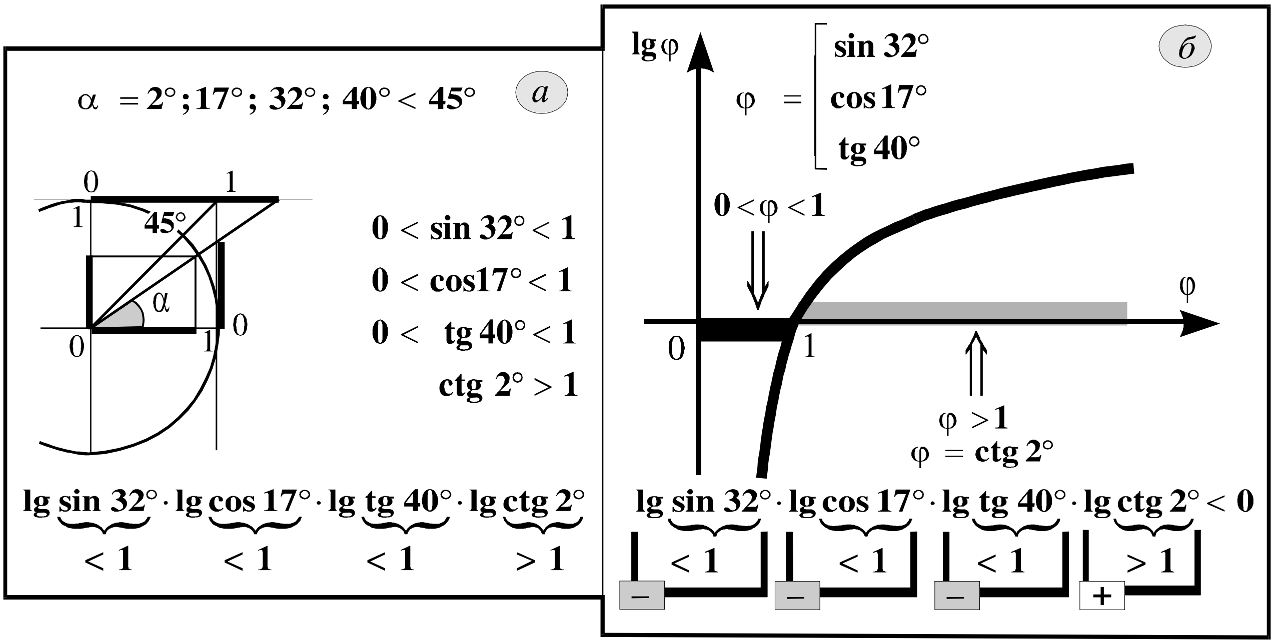


Рис. 7

Таким образом, последовательно организуя все изложенные операции “живого созерцания” учебной знаковой информации, мы не только используем природные свойства зрения ученика, но и формируем некоторые специальные особенности, которые у способных детей образуются часто непроизвольно, спонтанно.

4. Визуализация содержания учебного математического текста

Специфика изложения учебного материала должна определять знание вида тех или иных понятий, умение выделять их среди множества объектов различной природы, навыки оперирования ими, понимание как эти операции осуществляются, и еще, к тому же, решать разнообразные задачи. Однако обеспечение этих умений, знаний и навыков весьма проблематично по многим причинам. На некоторые из них мы ниже обращаем особое внимание.

Довольно часто при изложении теоретического материала иллюстрации помещаются произвольно, где-то в стороне, и сопровождаются указаниями типа: “см. рис. № ... ”. Будет ли учащийся, читая достаточно скучный и трудный текст, листать книгу в поисках этого рисунка? Нередки случаи, когда рядом с этим рисунком размещены другие, относящиеся либо к задачам, либо к иному фрагменту основного текста. Это также не способствует лучшему восприятию ученика.

Приведем один из таких текстов.

“Пусть α и α' – две параллельные плоскости и h – прямая, пересекающая эти плоскости. Пусть P – выпуклый плоский многоугольник в плоскости α и A_1, A_2, ... – его вершины. Проведем через каждую точку X многоугольника P прямую, параллельную прямой h, и обозначим через X' точку пересечения ее с плоскостью (рис. 8, вверху). Отрезки XX' заполняют некоторый многогранник. Этот многогранник называется **призмой**. Его граница состоит из многоугольника P, равного ему многоугольника P' в плоскости α' и параллелограммов $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ...

Многоугольники P и P' называются **основаниями призмы**, а параллелограммы – **боковыми гранями**. Отрезки $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ... называются **боковыми ребрами** призмы. **Высотой призмы** называется расстояние между плоскостями ее оснований. Отрезок, который соединяет две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю призмы**. **Диагональным сечением** призмы называется сечение плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани ... ”.

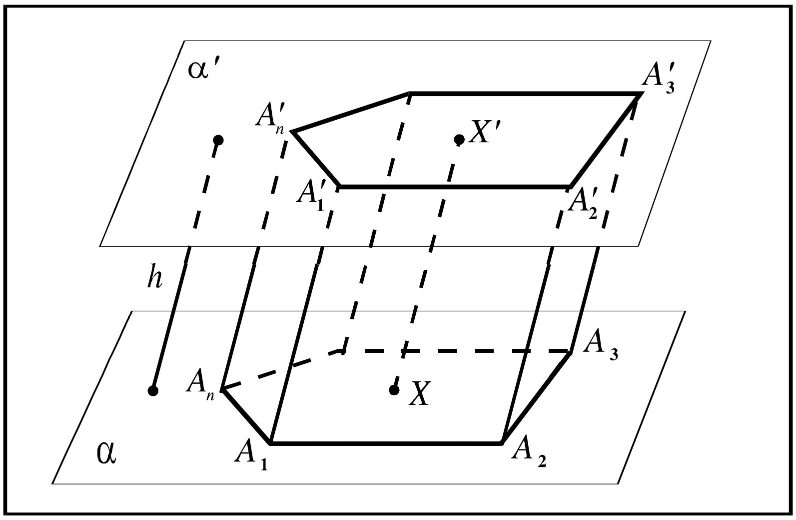


Рис. 8

Мы привели данный фрагмент целиком с целью проанализировать, что требуется от ученика при его чтении. При этом ситуация нами значительно смягчена, поскольку в учебнике сам рисунок отделен от данного текста задачей и ее решением, а рядом с сопутствующей иллюстрацией помещены еще две, к содержанию именно этого текста не имеющие непосредственного отношения.

Начнем с того, что до указания “рис. 8” читателю необходимо самому составить визуальные образы объектов: P, P', α, α', A_1, A_2, ... ,X, X', h и обнаружить структуру связей между ними.

Рисунок, предъявленный значительно позже, дает значительно более объемную информацию, чем та, которую может почерпнуть читающий из предшествующего текста. В нем нужно отобрать, выделить уже описанное словами.

Обилие обозначений, например, плоских многоугольников $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ... дробит образы, подменяя их громоздким перечнем букв, из-за чего неоднократно придется переключать внимание с текста на рисунок, чтобы догадаться, что речь идет об интуитивно ясном понятии – поверхности тела.

К тому же с одной картинкой связан слишком большой круг новых объектов.

В погоне за “математической чистотой” мы забываем весьма примечательные и поучительные факты из истории математики. Совсем не сразу возникли современные строгие математические дефиниции, воспроизведения которых мы так настойчиво добиваемся от наших учеников. Обратимся к естественной практике человеческого развития. Ребенок сначала выделяет из окружающей среды некий предмет, многократно рассматривает его, повторяя за родителями его наименование, а потом уже переходит к самостоятельному устному его обозначению. Алгоритм “сначала вижу – потом говорю” заложен по-видимому в человеческой психике со сроком действия более значительным, чем мы его учитываем. У нас сначала описание – затем изображение, и по “объему” описания значительно превосходят визуальную информацию, тем самым еще увеличивая разрыв в восприятии.

Перейдем к рассмотрению двух возможных способов соединения отдельных зрительных блоков в единое целое. Их условные наименования – информационная схема и информационная тетрадь (иногда для краткости – схема и тетрадь). Оба эти способа формируют последовательность восприятия образов и могут быть активно использованы при обучении с помощью компьютера.

Толчок к началу мыслительной деятельности ученика может порождаться различными причинами: постановка задачи, специальная иллюстрация, необычная фраза, наводящий вопрос, сравнение или аналог. Мы предлагаем специальный вариант такого толчка – специальную подсказку, анализируя содержание которой, ученик самостоятельно “добывает” для себя необходимые сведения.

Информационная схема – это помощь, специальная таблица, предназначенная для восстановления или обобщения необходимых знаний. Она состоит из блоков, каждый из которых посвящен отдельному фрагменту учебной теории, и использует три языка знаковой информации (рисунок, текст и формулу), что позволяет быстро ориентироваться в ее содержании.

Данная идея не нова. Многие учителя самостоятельно разрабатывают таблицы, используемые для оборудования кабинетов. Имеется внешнее сходство нашей схемы с опорными сигналами В. Шаталова. Однако было бы неправильно отождествлять их. Опорные сигналы – это “узелки на память”, ориентированные главным образом на широкий круг мнемонических средств, не всегда адекватно и полно отражающих существо рассматриваемого явления. Новыми элементами, характеризующими предлагаемые нами схемы, являются следующие:

1. Содержательная насыщенность. Схема может содержать теоретический материал большого фрагмента учебной теории, объединять сведения из разных тем. Ее можно многократно использовать в различных ситуациях – при ознакомлении, изучении или повторении материала.

2. Соединение различных средств представления учебной информации. По сравнению с обычными текстами увеличивается эффективность восприятия визуальной информации: разбиение содержания на 4-6 самостоятельных блоков; использование краткой, понятной и четкой словесной информации (заголовки, надписи, текстовые пояснения); цветовые и графические выделения; специальное оформление формульных выкладок; перевод с наглядно-образного языка на язык символов.

3. Отделение главного от второстепенного. В центре, как правило, располагаются зрительные образы, адекватно отражающие “главный случай”; необходимые исключения переводятся на периферию зрительного восприятия. Зрительный образ, соответствующий основному главному, существенному моменту содержания должен быть тем или иным образом выделен (например, расположен в центре). Второстепенные детали и образцы (примеры) могут отличаться по манере “исполнения” и располагаться так, чтобы не нарушалось активное восприятие основной идеи всей схемы.

4. Динамичность воспроизведения. Схема должна позволять ученику при ее воспроизведении менять те объекты, которые изображают изучаемые переменные (числа, функции, фигуры и т.п.), сохраняя ее общую структуру.

Для начала разберем пример информационной схемы “Чтение графика функции”, посвященную одному из центральных вопросов курса – исследованию поведения функции по ее графику (рис. 9, вверху).

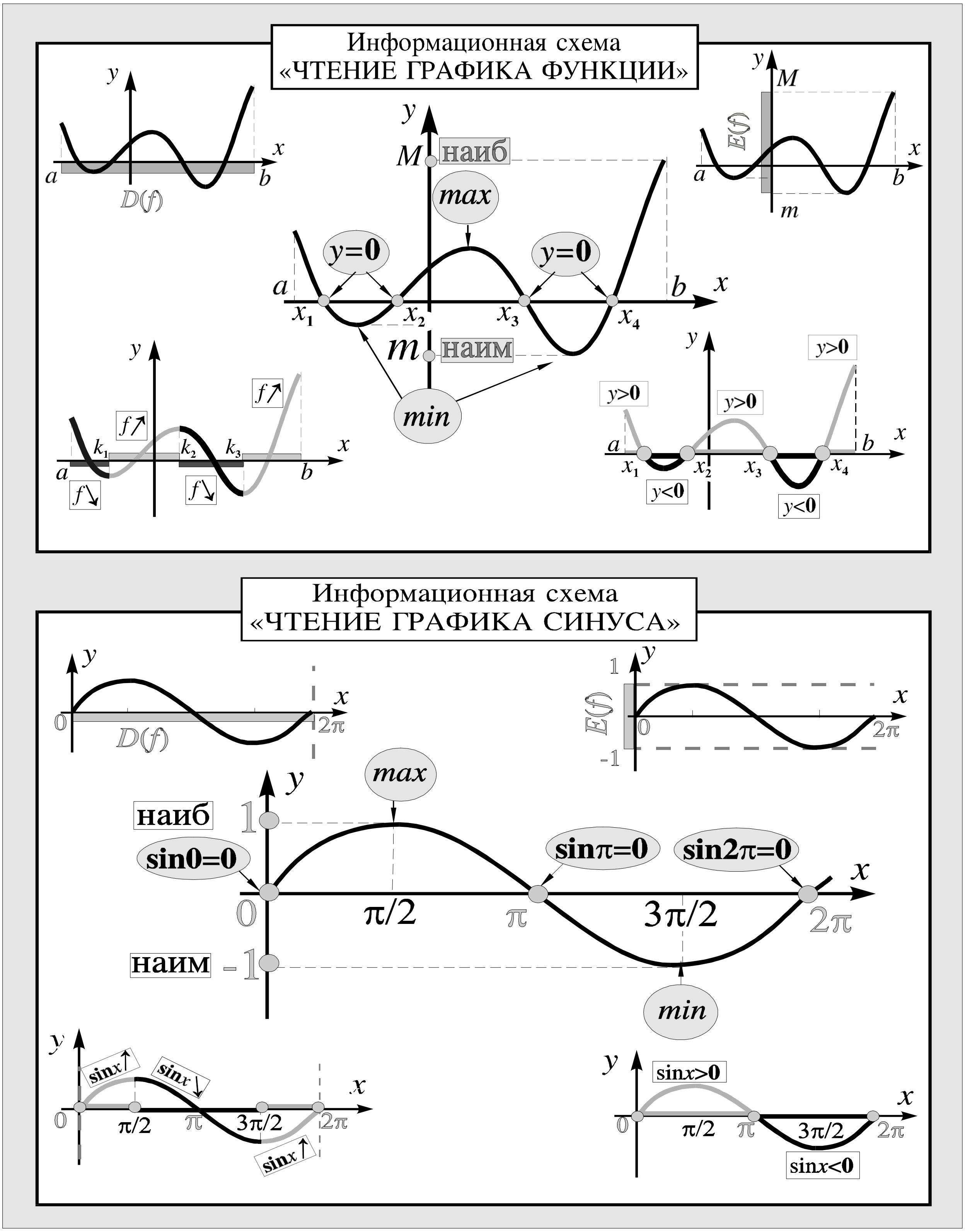


Рис. 9

Здесь представлены: область определения и множества значений, точки нулевых значений и экстремумов, участки знакопостоянства и монотонности. Сюда включены все данные, необходимые для грамотного и достаточно полного анализа геометрического способа задания функциональной зависимости.

Специальное расположение отдельных блоков позволяет учащимся перейти от исходных позиций (области определения и множества значений – верхние блоки) к обнаружению сведений, заложенных в центральном и нижних блоках. Центральный фрагмент посвящен визуальному обозначению положения нулей функции, ее экстремумов и т.д. Пара нижних графиков задает зрительные ориентиры для исследования функции на монотонность и знакопостоянство.

Данная схема может использоваться для изучения основных характеристик связей между зависимыми и независимыми переменными. Цвет и оформление помогают упорядочить процесс визуального восприятия: точки из области определения выделяются одним цветом, участки монотонности и знакопостоянства по цвету совпадают с указанием поведения частей графика. Соответствующий цвет дает перевод с “наглядно-образного языка” на “язык формул”.

Этот справочник достаточно полно отражает “главный случай”. Кроме того, им в качестве визуального алгоритма можно руководствоваться при описании конкретной функции. Действительно, всякого рода случайности (типа точек разрыва и точек перегиба, участки постоянства значений) неявным образом подразумеваются в ее содержании.

Схема в каждом конкретном случае позволяет отталкиваться от индивидуальных свойств кривой, сохраняя общую структуру как самих особенностей заданных функциональных зависимостей, так и порядка действий. Например, при решении задачи типа “Исследовать поведение синуса на промежутке от $\mathbf{0}$ до $\mathbf{2\pi}$” эта схема может быть трансформирована в один их многих частных вариантов (рис. 9, внизу). Тот же принцип сохраняется и при исследовании графика функции, “обогащенной” параметрами.

Информационная схема-справочник, вбирающая в себя различные визуальные модели, объединенные в отдельные блоки, поможет ученикам осознать обоснования определенных фрагментов теории, побудить их к созданию аналогий. Одну и ту же информационную схему в разные периоды обучения можно оформить по-разному, меняя компоновку, объем содержания и расположения ее блоков. Это дает

ученику возможность задуматься над разнообразием связей между рассматриваемыми объектами,

учителю формировать ее варианты, ориентированные на восприятие конкретных учебных групп в зависимости от их подготовленности к восприятию ее содержания.

Информационная тетрадь – это совокупность отдельных фрагментов определенного раздела учебной теории, следующие в строго заданном (логически обоснованном) порядке, который должен быть продиктован соображениями разумности и достаточности. Содержание тетради может полностью соответствовать определенному фрагменту основного учебного текста. Серия визуальных блоков (страниц, листов), выстроенных в определенной последовательности и по смыслу тесно связанных между собой, позволяет реализовать принцип «кусочно-непрерывного» обучения, ориентированного на «регулирование» роста знаний и умений учащегося.

Каждая тетрадь – это не просто набор листов, в ней есть общая идея. Она раскрывается постепенно, с использованием всех видов предъявления учебной информации. Сначала, как правило, вводятся чувственно воспринимаемые знаковые компоненты понятия или его свойства, затем осуществляется переход на абстрактный уровень. Тетрадь разбивает процесс овладения темой на отдельные шаги, выделяющие каждый поворот мысли, причем для каждого из них может быть найден свой способ визуально-схематического отражения как его содержания, так и его связи с предыдущим материалом.

Страница информационной тетради может быть обогащена дополнительными сведениями, отсутствующими в стандартном учебном тексте. На ней можно визуально акцентировать внимание на особо важных моментах, привести специальные примеры или модели. Сообщение, излагаемое на странице, должно быть невелико, что позволит ученику:

- осуществить подготовку к восприятию нового понятия;
- получить начальные представления о понятии на визуальном уровне;
- проследить за преобразованиями слова в образ или формулу;
- запомнить общепринятые обозначения и наименования;
- выделить главное в предъявлении информации;
- рассмотреть и обдумать каждый из узловых моментов положения учебной теории;
- разъяснить смысл новой операции, представив визуально ее результат;

Из области определения функции f выбираем любую точку x (аргумент). Находим значение функции f в этой точке x (полезно отметить одним цветом). На оси аргументов откладываем отрезок, определяющий точку $f(x)$ как аргумент функции g.

Находим значение функции g в точке $f(x)$, т.е. получаем $g[f(x)]$ (отмечаются другим цветом). Сравниваем длины отрезков на осях X и Y. Получаем результат: $x = g[f(x)]$ (рис. 10).

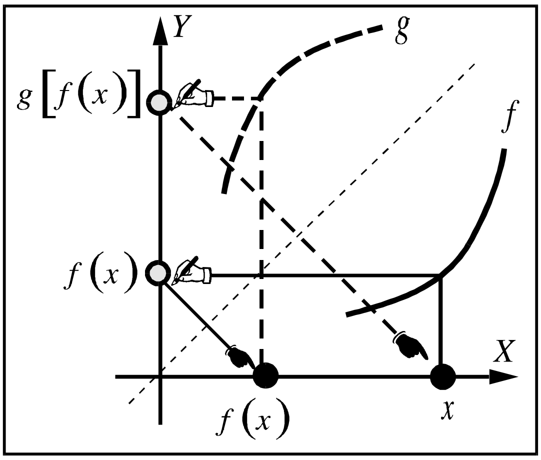


Рис. 10

С помощью подобной страницы ученик может

- сопоставив слово и образ, понять происхождение термина до введения строгого определения понятия;
- приобрести полезные и интересные;
- вывести или обобщить теоретическое положение;
- усвоить самостоятельно все необходимые или возможные переходы в практическом применении изученного правила или формулы;
- познакомиться с методами исследований или преобразований.

Информационная страница является наименьшим «шагом» в обучении (изложении теории), однако в любой момент имеется возможность обогатить ее содержание дополнительными сведениями. Все свойства визуального, вербального и формульного способов представления информации широко используются при оформлении страниц тетради.

Содержание тетради может соответствовать определенному фрагменту параграфа основного текста учебного пособия, варьируя его оформление и детали изложения. Составитель может проявить свою индивидуальность, подчеркнуть собственные склонности, не разрушая “общей канвы” обучения. Отличие состоит в назначении и приемах использования.

Текст учебника применяется в различных ситуациях: на уроке и дома, целиком или по частям, с пропусками тех или иных фрагментов. Все зависит от целей и мотивов обучения. Ученик может воспользоваться указаниями учителя или сам организовать свою деятельность, устанавливая свой собственный режим и темп. Информационная (в перспективе – компьютерная) тетрадь, с одной стороны, действует достаточно «жестко» – полнота и последовательность изложения теории, уровень трудности заданий и их объем задаются учителем. С другой стороны, в свободном режиме “сценарий” изучения ее содержания можно строить различными способами. Можно вернуться к забытому положению, пропустить то, что кажется на первый взгляд легким. Допустимо вообще нарушать “линейность” изучения текста – выбирать самое необходимое и переходить к новым страницам.

5. Введение нового понятия

Метод расчленения учебной информации на самостоятельные отдельные блоки позволяет компоновать информационные тетради с четко определенными параметрами: использование конкретных умственных действий, общность (алгоритмизация) представления содержания, разнообразие подходов к рассматриваемым объектам и их свойствам.

К перечню «спецификаций» содержания можно отнести: введение понятия, вывод формулы, применение конкретного положения математической теории и т.д. Приведем пример тетради, реализующей перечисленные спецификации: “Координаты единичного вектора”.

Стр. 1. **“Координаты вектора”** (рис. 11)

Здесь “личный” символ $\vec{i}_\alpha$ означает поворот вектора $\vec{i}$ на угол α.

Стр. 2. **“Координаты единичного вектора”** (рис. 11)

Обе страницы содержат уже знакомый материал. Учащиеся должны суметь записать вектор $\vec{i}_\alpha$ в координатной форме. Если возникнут затруднения, то эти страницы можно рассматривать одновременно (параллельно). Цвет поможет установить: $\vec{i}_\alpha = (\mathbf{cos}\,\alpha\ ;\ \mathbf{sin}\,\alpha)$.

Стр. 3. **“Составляющие векторов”** (рис. 11)

Обычно учащиеся с трудом воспринимают, что $\mathbf{cos}\,\alpha \cdot \vec{i}$ и $\mathbf{sin}\,\alpha \cdot \vec{j}$ также есть векторы. Иллюстрации данного листа помогут им установить этот факт и осознать его.

Стр. 4. **“Разложение единичного вектора на составляющие”** (рис. 11)

Центральный момент – учащиеся, действуя по образцу, выводят формулы задания единичных векторов в координатной форме. Поскольку все содержание тетради основано на подобных предыдущих сериях, вывод никакой трудности не представляет.

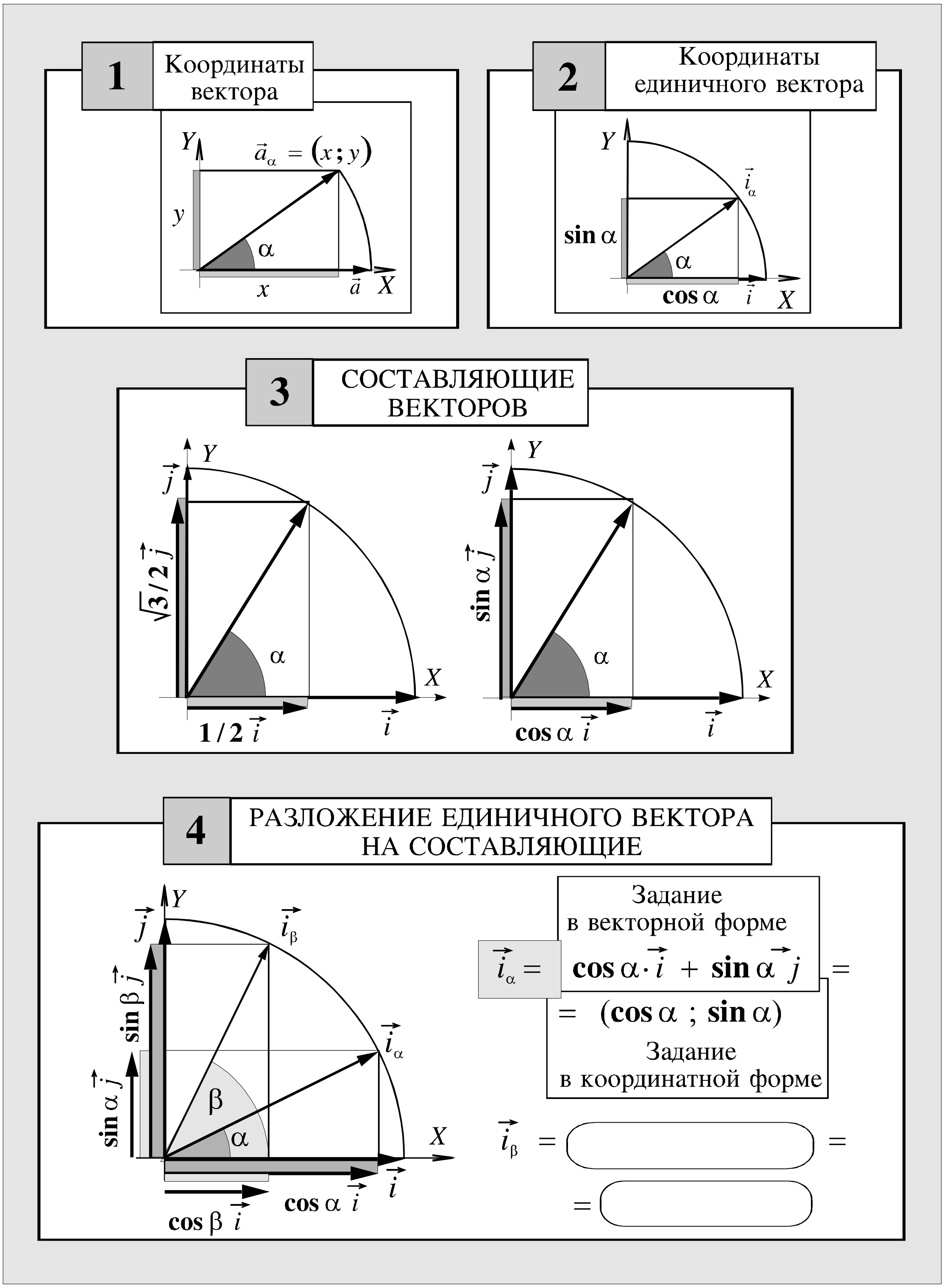


Рис. 11

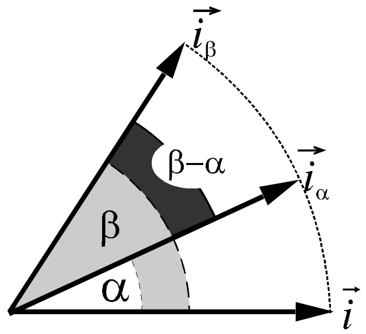
Стр. 5. **“Скалярное произведение единичных векторов, заданных координатами”**

Стр. 6. **“Скалярное произведение единичных векторов, заданных геометрически”** (рис. 12)

5 СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЕДИНИЧНЫХ ВЕКТОРОВ, ЗАДАННЫХ КООРДИНАТАМИ

Теория	Реализация
$\vec{a}_1 = (\,x_1\,;\,y_1\,)$	$\vec{i}_\alpha = (\mathbf{cos}\,\alpha\,;\,\mathbf{sin}\,\alpha\,)$
$\vec{a}_2 = (\,x_2\,;\,y_2\,)$	$\vec{i}_\beta = (\mathbf{cos}\,\beta\,;\,\mathbf{sin}\,\beta\,)$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = (\,x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2\,)$	$\vec{i}_\alpha \cdot \vec{i}_\beta = (\mathbf{cos}\,\alpha \cdot \mathbf{cos}\,\beta + \mathbf{sin}\,\alpha\,\mathbf{sin}\,\beta$

6 СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЕДИНИЧНЫХ ВЕКТОРОВ, ЗАДАННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ



$$\vec{i}_\alpha \cdot \vec{i}_\beta =$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \mathbf{cos}\,\vec{a}\,{}^\wedge\,\vec{b}}$$

$$= \vec{i}_\alpha \cdot \vec{i}_\beta \cdot \mathbf{cos}\,\vec{i}_\alpha\,{}^\wedge\,\vec{i}_\beta =$$

$$= \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{cos}\,(\alpha - \beta) =$$

$$= \mathbf{cos}\,(\alpha - \beta)$$

$$\mathbf{cos}(\alpha - \beta) = \mathbf{cos}\,\alpha \cdot \mathbf{cos}\,\beta + \mathbf{sin}\,\alpha \cdot \mathbf{sin}\,\beta$$

$$\mathbf{cos}(\beta - \alpha) = \mathbf{cos}\,\beta \cdot \mathbf{cos}\quad + \mathbf{sin}\quad \cdot \mathbf{sin}$$

$$\mathbf{cos}(\gamma - \delta) = \mathbf{cos}\quad \cdot \mathbf{cos}\quad + \mathbf{sin}\quad \cdot \mathbf{sin}$$

$$\mathbf{cos}(\mathbf{90}^\circ - \alpha) = \mathbf{cos}\quad \cdot \quad + \mathbf{sin}\quad \cdot$$

$$\mathbf{cos}(\;\mathbf{85}^\circ\;) =$$

Рис. 12

Страница 5 (рис. 12) дает возможность повторить теорему о скалярном произведении векторов, заданных координатами. Страница 6 (рис. 12)– определение скалярного произведения двух векторов. Прием “обобщение – специализация” активно реализует такие моменты “живого созерцания”, как:

а) использование формулы как модели (по формуле определения скалярного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляется формула скалярного произведения конкретных векторов $\vec{i}_\alpha$ и $\vec{i}_\beta$;

б) действие по модели (по символическому изложению теоретического положения – скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, – конкретизируется соответствующее утверждение для пары рассматриваемых единичных векторов).

Таким образом, не только восстанавливается в памяти уже изученное ранее, но и совершенствуются навыки анализа знакового материала.

К последней странице прилагается специальный список примеров, позволяющих усвоить формулу косинуса разности двух аргументов (рис. 12, внизу): Учащиеся должны устно или письменно решить его примеры.

Цветовое оформление формулы позволяет осознать особенности ее структуры, быстрее запомнить порядок компонентов серии. Данная, завершающая страница тетради формирует “гладкий” переход к теме “Формулы тригонометрического сложения”.

К комплекту страниц подобной тетради можно составить множество “быстрых” задачек. Например,

к *стр*. 1: а) отрицательны или положительны координаты вектора $\bar{a}_\alpha$?

б) постройте вектор $\vec{i}_\alpha$ при $\mathbf{180°} < \alpha < \mathbf{270°}$ и оцените его координаты,

к *стр*. 3: запишите значения координат векторов $\vec{i}_\pi$, $\vec{i}_{3\pi/4}$, $\vec{i}_{\pi/6}$,

к *стр*. 6: составьте формулы $\mathbf{cos}(\alpha+\beta)$, $\mathbf{cos}\,\mathbf{2}\alpha$ и т.д.

Разумеется, удачная на взгляд учителя страница может быть применена в учебном процессе в отрыве от всего комплекта, составляющего единое целое – информационную тетрадь. Но ценность ее будет значительно снижена, так как не будут применены самые сильные инструменты обучения – последовательность и постепенность, наглядность и преемственность.

Имея в руках свой экземпляр такой тетради (или возможность вывести на монитор любую из ее страниц), учащийся может не бояться отстать от сильных товарищей. Вопросы учителя объединяют класс в поисках результата. В рабочих тетрадях остается лишь записывать ответы, оформлять наиболее трудные этапы решения.

6. Изображение основных математических понятий

Каждая учебная задача предполагает преобразование, свертывание данных к некоторому достаточно простому, хорошо известному объекту. Геометрическая или аналитическая интерпретация найденного стандарта позволяет быстро и точно ответить на поставленный вопрос.

Активное и целенаправленное использование визуального мышления в процессе обучения основано на формировании устойчивых образов основных математических понятий. Первой встающей здесь методической задачей здесь является подготовка добротных геометрических изображений этих понятий, адекватно отображающих их основные черты, удобных в работе, пригодных для многократного использования. Большинство этих изображений устоялось в практике преподавания математики. Перечислим наиболее важные понятия, которые мы относим к стандартным.

1. Число – точка числовой оси.
2. Вектор – направленный отрезок.
3. Функция – график.
4. Линейная функция – прямая.
5. Квадратичная функция – парабола.
6. Обратная пропорциональная зависимость – гипербола.
7. Колебательный процесс – синусоида.
8. Производная – наклон касательной.
9. Экстремум – горб или впадина.
10. Интеграл – площадь.

Естественно, что объем содержания такого визуального образа не полностью совпадает с объемом содержания соответствующего понятия. Так, отношение “Экстремум – горб или впадина” (рис. 13) позволяет по графику определить важнейшие “параметры” поведения функции (точки максимума и минимума, изменение функции вблизи этих точек – возрастание, с одной стороны, и убывание, с другой), “измерить” значение самого экстремума и т.д. Однако чтобы осуществить дефиницию самого понятия, необходимо нечто большее. Нужна дисциплина зрительного восприятия, знание стандартных зрительных образов, понимание, что само слово “экстремум” нуждается в описательном расширении типа “экстремум функции в заданной точке” и т.д. Необходим грамотный, квалифицированный перевод с языка образов на язык слов и формул.

Обратим внимание на то, что новым в предлагаемой нами методике является акцент на образ, его “первичность”, установка на немедленную зрительную ассоциацию с абстрактным понятием, предшествующую словесному описанию.

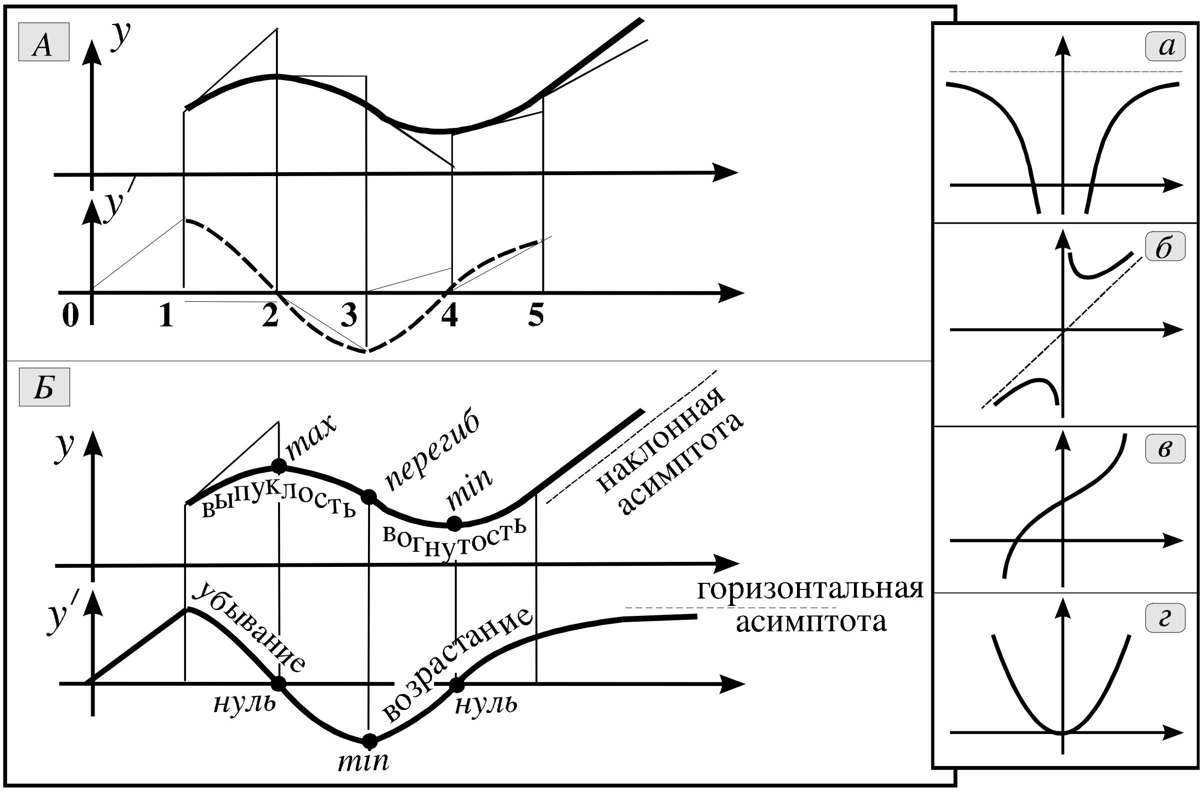


Рис. 13

Насколько важна такая “первичность” писал еще Павлов.

Под **визуальным стандартом** (**стандартным образом**) мы понимаем такую визуальную или формульную интерпретацию математического понятия (его свойства или отношения между такими понятиями), которое наиболее полно и точно отображает его словесную дефиницию. Таким образом, стандартный образ понятия должен отвечать следующим условиям:

– содержание должно удовлетворять принципу необходимости и достаточности;

– объем должен совпадать с объемом исходного понятия;

– представление должно осуществляться так, чтобы стал возможен адекватный перевод на другие языки предъявления математической информации.

Поясним данные условия на конкретных примерах.

Учитывая, что задание функции с помощью графика является одним из основных объектов разрабатываемой нами методики, сосредоточим внимание на нескольких важных условий подготовки соответствующих стандартных образов. Основой каждого графика должны служить кривые, строго отражающие функциональные зависимости между числовыми переменными.

К сожалению, стенды, сделанные учителями или изготовленные типографским способом, довольно часто искажают положение: для любого аргумента x из области определения функции f существует и единственно значение $f\left(x\right)$ из множества значений функции f.

На стенах классов висят изображения, типа приведенных на рис. 14. Это приводит к тому, что учащиеся не осознают главной визуальной особенности геометрического задания функционального соответствия – кривая в плоской системе координат является графиком функции тогда и только тогда,

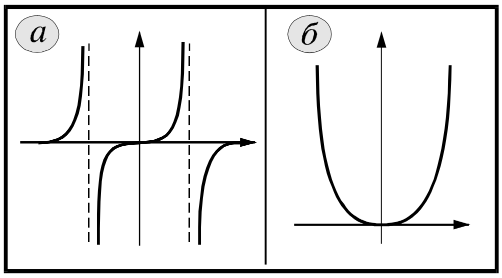


Рис. 14

когда любая прямая, проведенная параллельно оси значений f (перпендикулярно оси аргументов f), пересекает эту кривую не более чем в одной точке.

Учащимся не под силу определить:

– какие из кривых на рис. 15-(1) являются графиком функции?

– где (в какой точке или на каком отрезке) происходит нарушение функциональности для кривых, изображенных на рис. 15-(1) (-в,-з)?

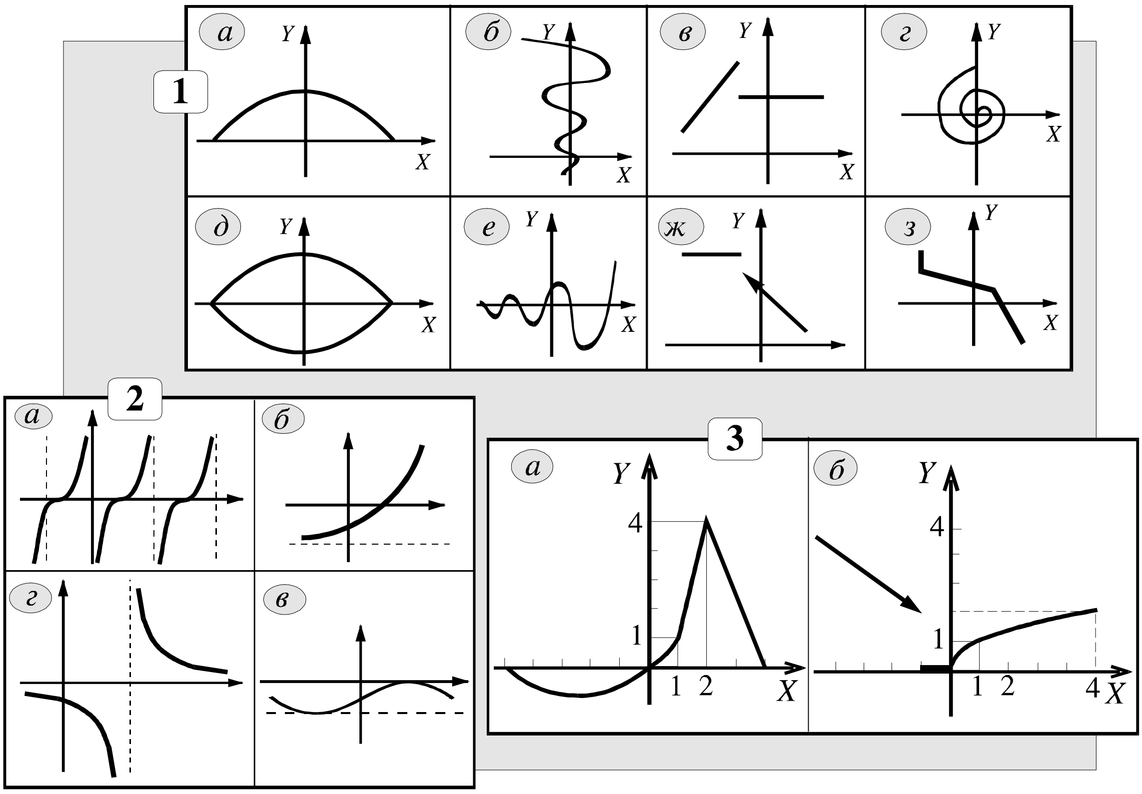


Рис. 15

При недостаточно прочно сформированном зрительном восприятии учащиеся плохо ориентируются в изображениях, не опознают “портрет” функции, не видят тенденции ее развития.

Комплекс “график-уравнение” должен четко отмечать в своем визуальном блоке все необходимые “точки опоры” – элементы, позволяющие придти к необходимым обобщениям, предопределить свертывание мыслительных операций.

В частности, для геометрического задания синуса к таким элементам можно отнести: точки, обозначенные на оси абсцисс: $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$; пунктирные (или тонкие) линии, отмечающие область значений этой функции (рис. 15-(2)-г). При соблюдении упомянутых условий у учащихся довольно просто формируются формульные стандарты типа:

– нули синуса: 0, $\pm\pi$, $\pm\frac{\pi}{2}$, ... ;

– область допустимых значений синуса: $x\in[-1\,;1]$ и т.д.

Решение	Стандарты для свертывания
$\sin^2 x-2\sin x-3=0$	$a^2-2a-3=0$
$\Downarrow$	Теорема Виета: $\begin{cases} a_1\cdot a_2=-3\\ a_1+a_2=2\end{cases}$
$(\sin x-3)\cdot(\sin x+1)=0$	
$\Downarrow$	Область определения синуса: $E(\sin)$: $\sin x \le 1$
$\sin x=-1$	
$\Downarrow$	Минимумы синуса: $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in Z)$
$x=\frac{\pi}{2}(4k-1) \quad (k\in Z)$	

Рис. 16

В свою очередь эти данные приведут к свертыванию мыслительных операций при решении примеров, подобных:

“Решить уравнение $\sin^2 x-2\sin x-3=0$” (рис. 16).

Формируя визуальный стандарт определенного понятия, можно рассматривать содержание одной и той же задачи “в разных плоскостях”. Мы полагаем, что зрительное восприятие одних и тех же объектов в различных вариантах позволит более продуктивно формировать умения, знания и навыки как отдельного ученика, так и класса в целом.

7. Параметры визуального стандарта

Для того чтобы “базовый” рисунок-стандарт помогал решать конкретную учебную задачу, необходимо продумать его содержание и при оформлении расставить все важнейшие акценты.

Проведем аналог. Предлагаемое методическое средство обозначено нами как “Направляющие прямоугольники”. Оно обеспечивает точность исполнения и ясность восприятия графиков элементарных функций. При построении графиков функций (особенно на начальных этапах) важно строго соблюдать цветовую гамму в их геометрическом и аналитическом заданиях, четко фиксировать направление отсчета на числовых осях (слева направо по горизонтали, снизу вверх по вертикали), выбирать единицы измерения (в школьной тетради – две клеточки на единицу, три – на число $\pi / \mathbf{2}$ для тригонометрической функции и т.д.), выделять основные и вводить вспомогательные элементы.

Подробное и тщательное выполнение геометрического задания показательной функции по основанию **2** может привести к полезным ассоциациям. “Точки опоры” в виде цифр (на оси абсцисс: –**1**, **0**, **1**; на оси ординат: $\mathbf{1/2}$, **1** и **2**) позволяют определить (предугадать) соответствия для экспоненты с основанием **3** и **4**. На рис. 17 полезно было бы эти визуальные ориентиры выделить цветом. Подобные исследования позволяют сформировать образ экспоненты с основанием $a > \mathbf{1}$ (рис. 17, в кружке).

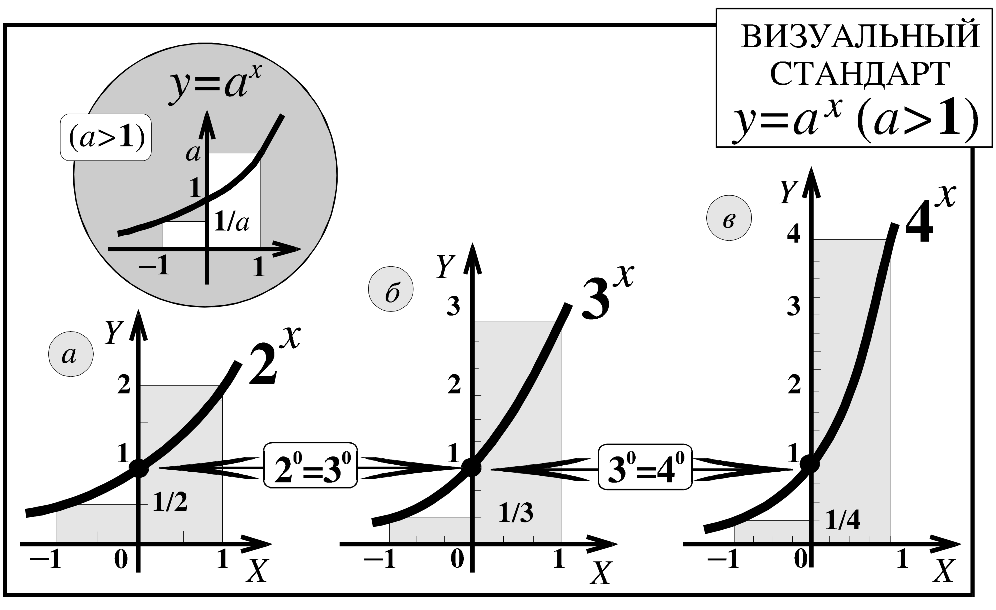


Рис. 17

8. Развитие визуального образа

Проследим развитие одного из интереснейших визуальных математических стандартов – тригонометрической окружности. Важность данного образа неоспорима, поскольку весь курс “вычислительной” тригонометрии и теории тригонометрических функций базируется на ее свойствах.

Тригонометрическая окружность – это весьма сложный объект. Соединение строго организованного ряда числовых величин с адекватным рядом простейших геометрических понятий (углов и дуг) достаточно трудны для восприятия и усвоения. Именно поэтому здесь не следует торопиться – на первых этапах своего внедрения такой образ должен нести минимум информации (к примеру, соотношения числовых значений на самой окружности и ее диаметрах).

Начинать непосредственное знакомство с тригонометрической окружностью естественно с ее первой четверти. Здесь необходима постепенность, внимание к восприятию и усвоению учениками ее «секретов» – углы, которые можно построить без транспортира, величины синусов и косинусов этих углов и т.д. (рис. 18).

Запас необходимых визуальных представлений учащихся еще сравнительно невелик, поэтому здесь самым подробным образом *показан* ряд “замечательных” чисел. Такой подход оказывается наиболее эффективным. Автор в своей практике не раз убеждался в том, насколько полезна подобная наглядность. Типична реакция учащихся в этих случаях (цитируем): «Почему же нам это раньше не показали? Мы так мучились!», «Наконец-то я видела синусы!» и т.д.

Дальнейшая модификация образа может быть связана с определением конкретных линий – числовых осей, на которых отмечаются важные числовые значения, затем с общей демонстрацией этих значений (рис. 19).

Стандарт “Тригонометрическая окружность” представляет собой прекрасную модель для формирования связей между отдельными разделами математики. Действительно, “осваивая” тригонометрическую окружность, учащийся работает с целыми, дробными, рациональными и иррациональными числами, использует и одновременно обогащает свои геометрические представления о простейших плоских фигурах, учится проводить доказательные рассуждения и оформлять различного вида преобразования.

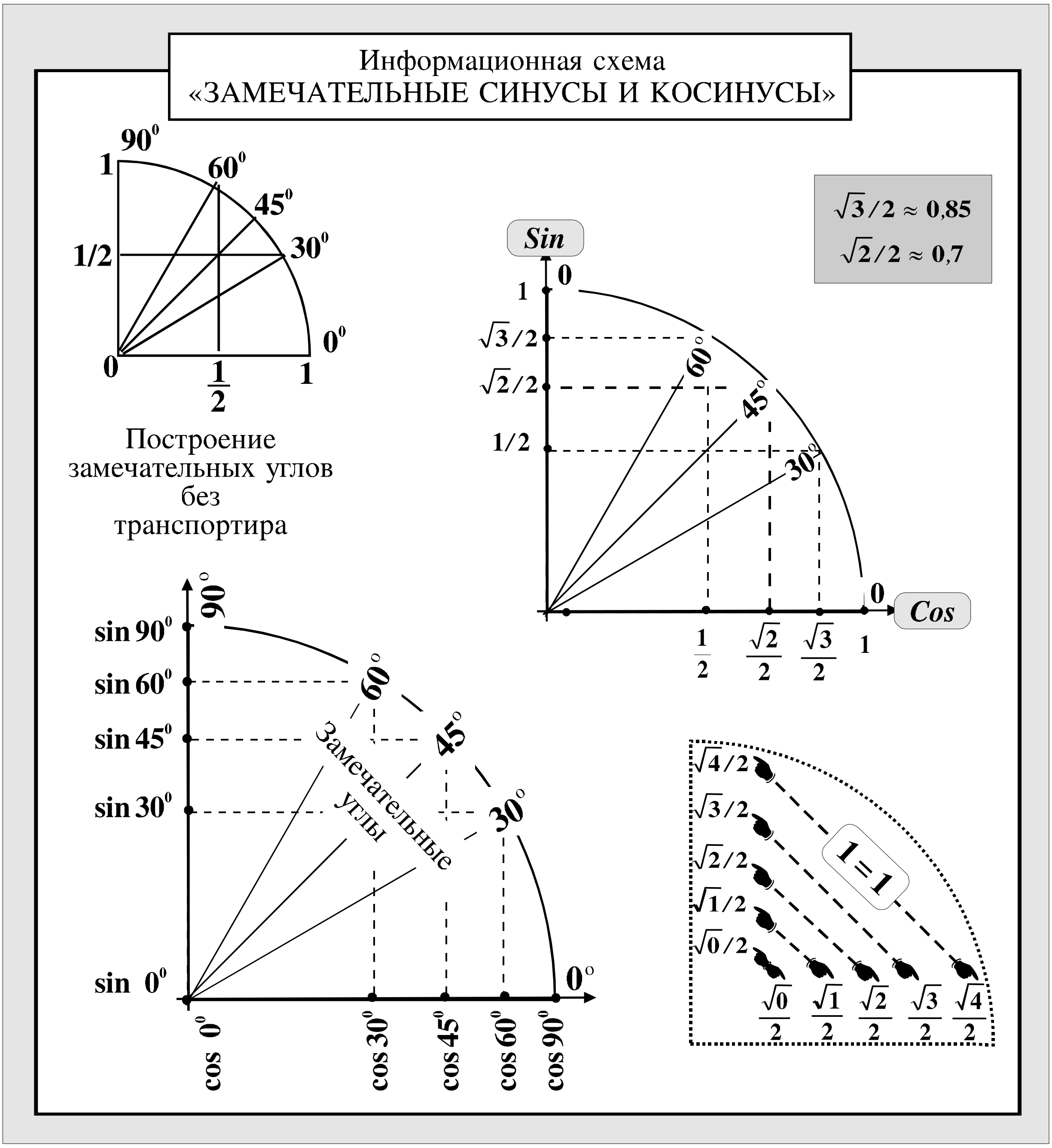


Рис. 18

Трансформации (развитию) может подвергаться не только вся схема, но и ее отдельный фрагмент. Это поможет в сложных переходах, в тех случаях, когда на изучение темы школьной программой отпущено недостаточное количество часов. Подобная вспомогательная схема позволит учащимся легче и быстрее ориентироваться в дальнейших преобразованиях основной информационной схемы.

Информационная схема “Тригонометрическая окружность” (рис. 19) является итоговой, поскольку практически все сведения на данную тему представлены в ней явным или скрытым образом. Она формируется так, чтобы учащийся всегда мог самостоятельно восстановить ее.

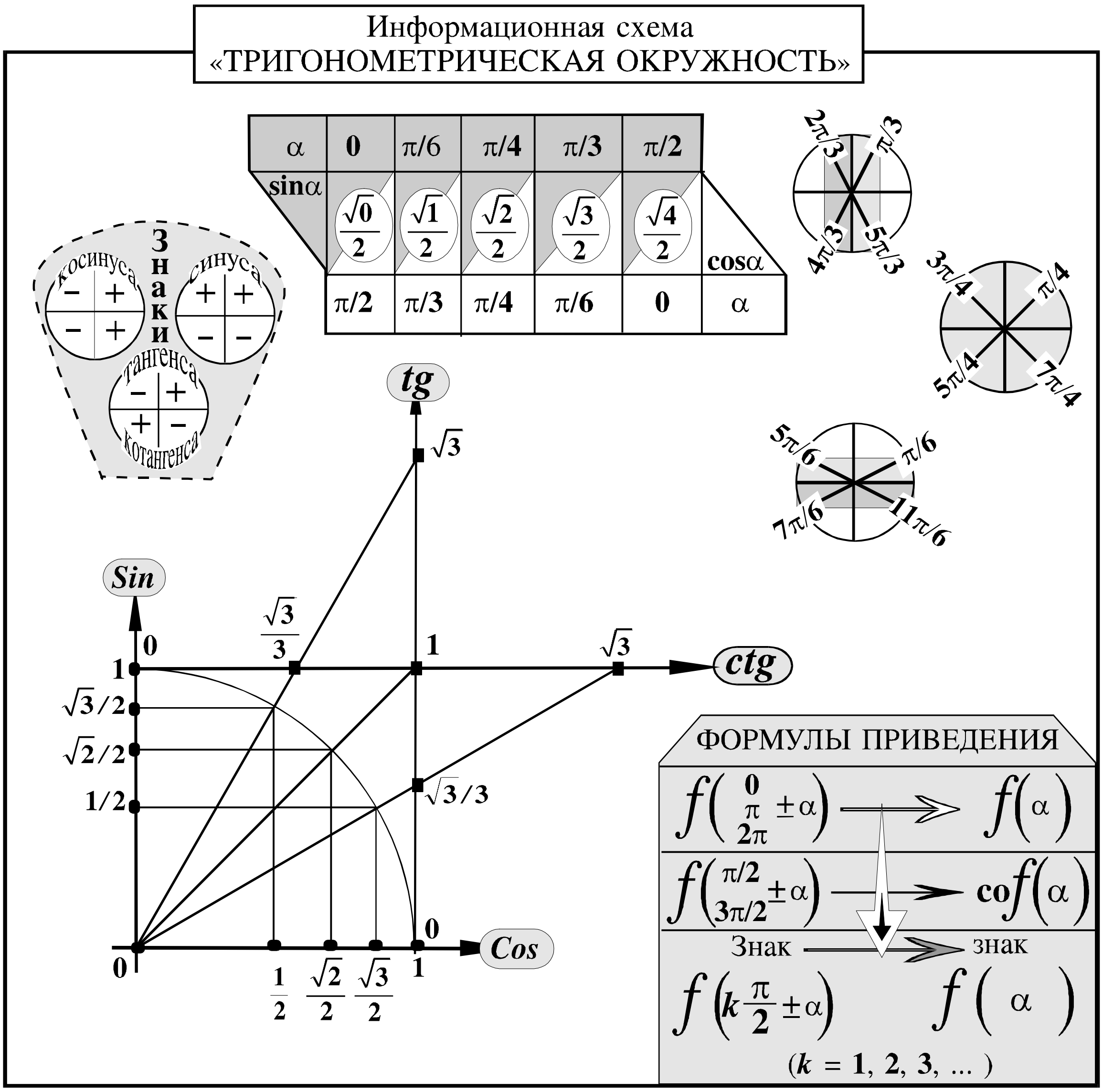


Рис. 19

Эта схема соединяет в себе ряд стандартных образов, позволяющих описать: единичную окружность; оси синуса, косинуса, тангенса и котангенса; замечательные углы $\mathbf{0}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$; свойства и поведение тригонометрических функций; значения каждой из функций при конкретных (из перечисленных) значениях аргумента и т.д.

9. Организация учебной математической информации

Визуальные образы не должны быть чем-то застывшим, фотографически фиксирующим изучаемые объекты. Внедрение таких образов в учебный процесс предполагает не только последовательное восстановление их, но при необходимости расчленение, сборку отдельных деталей в единое целое – новое образование. Этому служит умение выделить на визуальных стандартах важнейшие свойства понятий, отразить определенные операции над ними. Здесь налицо целесообразность активного использования различного рода визуальных дидактических материалов, которые мы разобрали достаточно полно и подробно.

Решение проблемы, связанной с восприятием визуальной информации, активным анализом ее элементов и структуры можно разрешить при помощи специальной организации учебного материала.

Опишем одну из характерных ситуаций. После разбора положения о вынесении числа при задании вектора его координатами, предложен пример: “Пусть $(\mathbf{3}\,;\mathbf{3}\,;p)=\vec{a}$; $(\mathbf{1}\,;m\,;\mathbf{1})=\vec{b}$; $\vec{a}=\mathbf{3}\,\vec{b}$. Найти числа m и p”.

Если перед этим подобная задача не была решена, то возникает ряд недоразумений. Оказывается, несмотря на всю простоту данных, учащиеся не воспринимают тот факт, что имеются одинаковые символы в соответствующих информационных сообщениях. Лишь немногие видят, что $(\mathbf{3}\,;\mathbf{3}\,;p)=\mathbf{3}\cdot(\mathbf{1}\,;m\,;\mathbf{1})$. Только что изложенное теоретическое положение остается для большинства вне поля их зрения. Им трудно сделать первый шаг: $(\mathbf{3}\,;\mathbf{3}\,;p)=(\mathbf{3}\cdot\mathbf{1}\,;\mathbf{3}\cdot m\,;\mathbf{3}\cdot\mathbf{1})$.

Выделим этот момент особо, поскольку для учащихся со слабо развитым математическим мышлением характерна “остановка” уже при начальном вводе в ситуацию. Более того “тормоз” того же типа препятствует их деятельности при каждом переходе от одного этапа преобразований к другому.

Так, даже зная свойства координатной формы задания векторов, многие ученики не могут ими воспользоваться. Поэтому, на наш взгляд, задачей первостепенной важности является умение переоформлять и перестраивать символьную информацию. Подобный результат работы с нашим примером представлен в черно-белом варианте на рис. 20).

$$\boxed{\begin{array}{c}(\mathbf{3};\mathbf{3};p)=\vec{a}; \quad \vec{b}=(\mathbf{1};m;\mathbf{1})\\ \vec{a}=\mathbf{3}\,\vec{b}\end{array}}$$

Рис. 20

Целенаправленное оформление информационных данных можно считать неотъемлемым звеном в организации “живого созерцания” на школьных уроках. Образы, сопутствующие специальному распределению элементов информации (блоков, фрагментов) на плоскости листа или на дисплее, позволяют осознать определенную установку:

– найди одинаковые элементы и приравняй их,

– найди “родственные” по содержанию элементы и определи связь между ними и т.д.

Продемонстрируем приемы визуализации учебного математического текста, продолжая обсуждение раздела “Векторы на плоскости и в пространстве”. Поскольку на соответствующие темы программой (ее инвариантной частью) отводится минимум допустимого времени, то особенно важно быстро сформировать умение (мысленно или письменно) восстанавливать основные стандарты:

а) противоположно направленные и сонаправленные (рис. 21-а,-б, слева) векторы;

б) сумма двух векторов (рис. 21-в, слева);

в) разность двух векторов (рис. 21-г, слева).

Учащиеся хорошо знают, что диагональ векторного параллелограмма, соединяющая концы составляющих его векторов, есть вектор их разности, однако направление этого вектора они обычно определяют с трудом. Здесь может помочь визуальная подсказка – стрелка вектора разности двух заданных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должна соприкасаться со стрелкой вектора-уменьшаемого (рис. 21, справа).

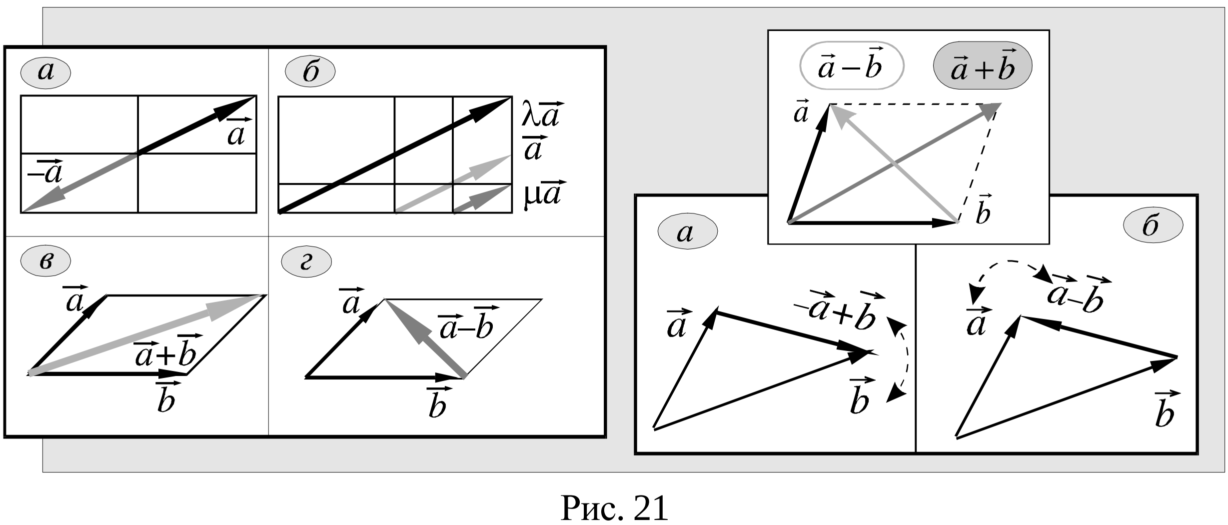


Рис. 21

Уже на первых порах изучения этой (как и всякой иной) темы необходимо сосредоточить внимание на формировании свободного переключения с одного языка предъявления информации на другие, что полезно постоянно поддерживать разнообразными задачами.

Визуальные стандарты помогут учащимся в решении многих геометрических задач. К сожалению, как правило, в учебных пособиях все здания, связанные с векторами, похожи друг на друга. Принцип формирования визуальных дидактических материалов позволяет разнообразить их формы представления и расширить вопросы содержания. В теме “Векторы” каждое теоретическое положение и его применение хорошо “визуализируются”. Иллюстрируемые выше визуальные стандарты (рис. 21) помогут учащимся в решении задач, подобных следующей:

“Точка *O* является центром тяжести треугольника *ABC*.

Доказать, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \vec{\mathbf{0}}$”.

Анализ. Визуальный стандарт центра тяжести треугольника дан на рис. 22-а.

Решение. Примем (рис.22-б,-в): $\overrightarrow{AB} = \vec{c},\ \overrightarrow{BC} = \vec{a},\ \overrightarrow{CA} = \vec{b},$

$\overrightarrow{OA} = \vec{m},\ \overrightarrow{OB} = \vec{n},\ \overrightarrow{OC} = \vec{p}.$

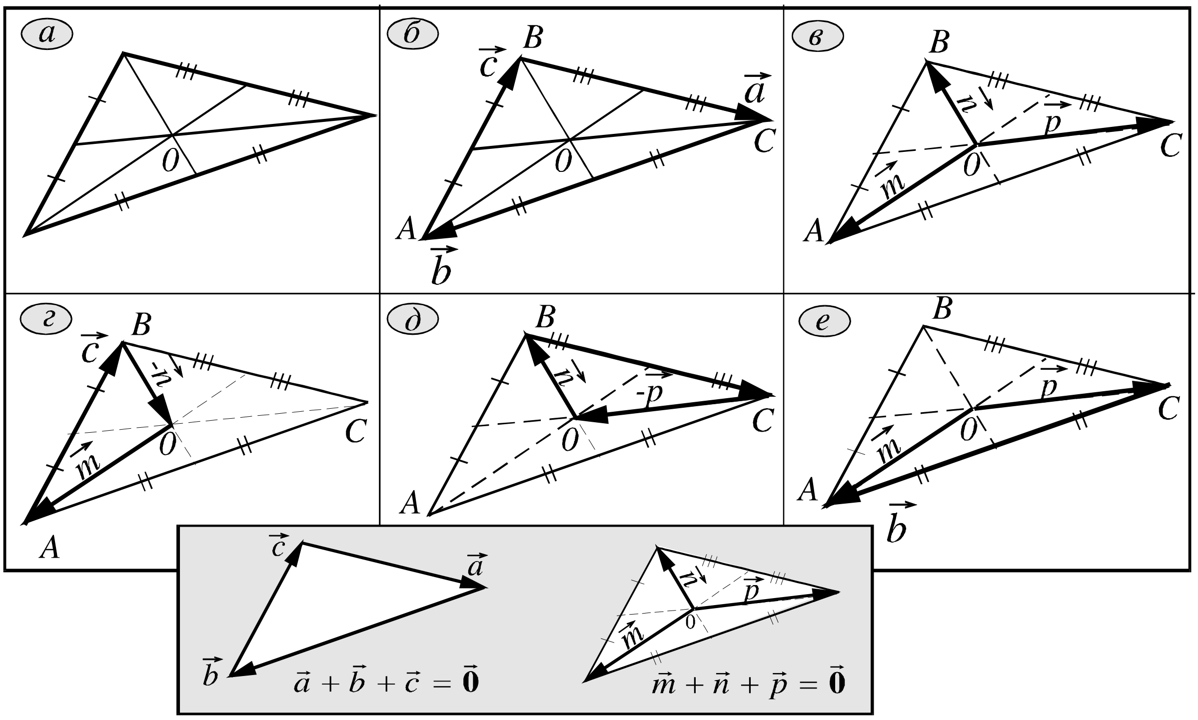


Рис. 22

Используя стандарты, имеем: $\vec{m} = \vec{c} - \vec{n},\ \vec{n} = \vec{a} - \vec{p},\ \vec{p} = \vec{b} - \vec{m}$ (рис. 22-г,-д,-е).

Произведя несложные вычисления, мы от известного образа (рис. 22, внизу слева) перейдем к визуальному обобщению – “векторному свойству” центра тяжести треугольника (рис. 22, внизу справа).

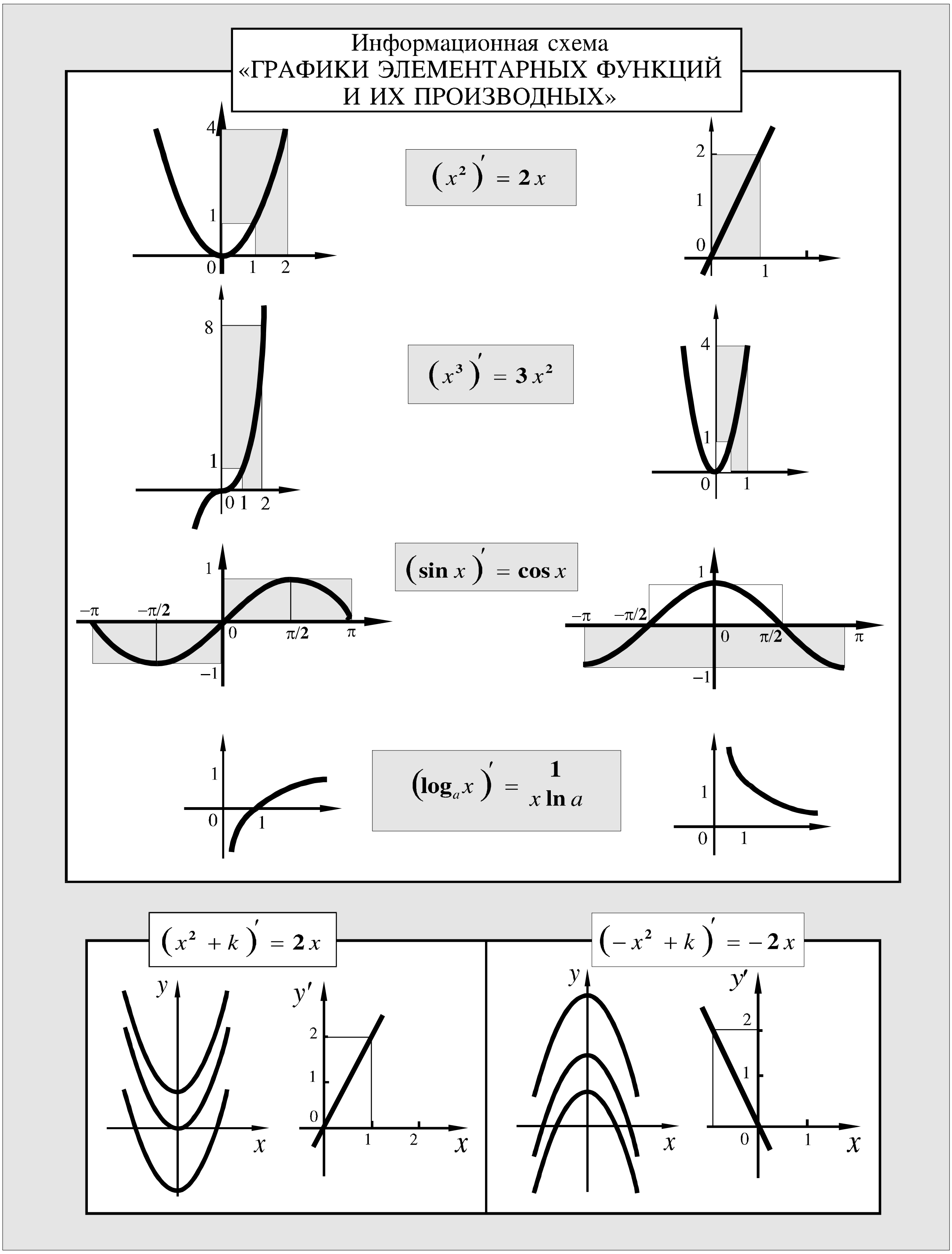


Рис. 23

Под визуализацией (геометрической интерпретацией) связей между двумя различными математическими понятиями мы понимаем сопоставление элементов одного визуального стандарта с элементами другого. Комплекты таких стандартов предназначены для зрительного анализа возможных связей между изображаемыми объектами. Каждая “пара” должна позволять констатировать, а в дальнейшем и восстанавливать искомые характеристики поведения каждого изучаемого математического понятия. Рассмотрим три примера.

Обсудим фрагмент информационной схемы “Графики элементарных функций и их производных” (рис. 23).

“Отождествляя” понятие производной с углом наклона касательной, можно, имея семейство таких касательных, заданных в нескольких точках достаточно малого интервала, восстановить график этой функции и наоборот.

Схема позволяет визуально установить отношение “функция-производная”, например, для квадратичной функции вида “$\pm x^2 + k$”.

Очевидно: каждому столбцу парабол соответствует только один визуальный образ линейной зависимости. Отсюда

вывод:

$\left(x^2 + k\right) = 2x$ – сдвиг графика исходной функции x^2 по горизонтали не изменяет визуального результата ее дифференцирования;

и предвидение:

$\left[(x+k)^2\right]' = 2(x+k)$ – сдвиг графика исходной функции x^2 по горизонтали порождает производную, отличающуюся от случая $\left(x^2\right)' = 2x$ на параметр $2k$.

Аналогично и для остальных пар графиков, изображенных на упомянутой схеме. При исследовании выявляются важные признаки поведения функции и ее производной “в малом” (для тех участков, на которых кусочки графиков по своей конфигурации совпадают с известными). Одновременно выясняется, что:

а) в точках, где функция $f(x)$ имеет экстремум, ее производная численно равна нулю ($f'(x) = 0$);

б) в точках перегиба функции $f(x)$ производная $f'(x)$ имеет экстремум;

в) при изменении x от меньших значений к большим из интервала выпуклости заданной функции $f(x)$ производная $f'(x)$ убывает, а на интервалах вогнутости – возрастает;

г) наклонные асимптоты графика функции $f(x)$ соответствуют горизонтальным асимптотам графика производной $f'(x)$ (рис. 13).

Для учащихся значительную трудность представляют условия взаимосвязи показательных и логарифмических неравенств. Несмотря на то, что переход от экспоненты к логарифму (например, при основании $a>\mathbf{1}$) достаточно легко организовывается цепочкой формул:

$$a^x > y \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{log}_a\, a^x > \mathbf{log}_a\, y \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathbf{log}_a\, y\,,$$

полезно показать, как этот результат выглядит “в натуре”.

Приведем пример пары информационных схем, связанных между собой принципом структурной общности. Левые блоки схем “Обратимость линейной функции” и “Построение экспоненты и логарифма” (рис. 54) показывают: для быстрого построения графика функции $y = k\,x + p$ $\left(y = a^x\right)$ можно так выбирать значения абсцисс и ординат “контрольных” точек, чтобы естественным образом использовались значения параметров k и p при $x=\mathbf{0}$, $x=\mathbf{1}$ (основания a при $x=\mathbf{0}$, $x=\mathbf{1}$ и $x=\mathbf{-1}$).

Эти блоки дают визуальную инструкцию для построения формул обратных функций и их “контрольных” точек:

а) в исходном задании поменять местами переменные,

б) выразить y через x,

в) осуществить перестановку координат “контрольных” точек.

Принцип отображения графика функции относительно биссектрисы I-го координатного угла визуально реализует связи между обратными функциями (графические блоки).

Изучение свойств линейной функции в общеобразовательной школе начинается задолго до ее окончания. Постепенно накапливаются знания, последовательно осуществляется знакомство с понятием обратимости и уже “на выходе” учащиеся получают информацию об экспоненте и логарифме. “Сквозная линия”, представленная различными параллельными блоками, позволяет визуально обобщить понятие обратимости, разобраться в его существе и масштабах применения. Алгоритмическая направленность схемы “Обратимость линейной функции” (рис. 24, вверху) позволяет ***умо-зрительно*** определить порядок действий необходимого поиска. Вторая схема “Построение экспоненты и логарифма” (рис. 24, внизу) как бы “дублирует” процесс, дает возможность еще раз применить изученный ранее алгоритм в новой ситуации. Сопоставление этих справочников помогает образованию связей, побуждающих ученика искать подобные аналогии в иных ситуациях.

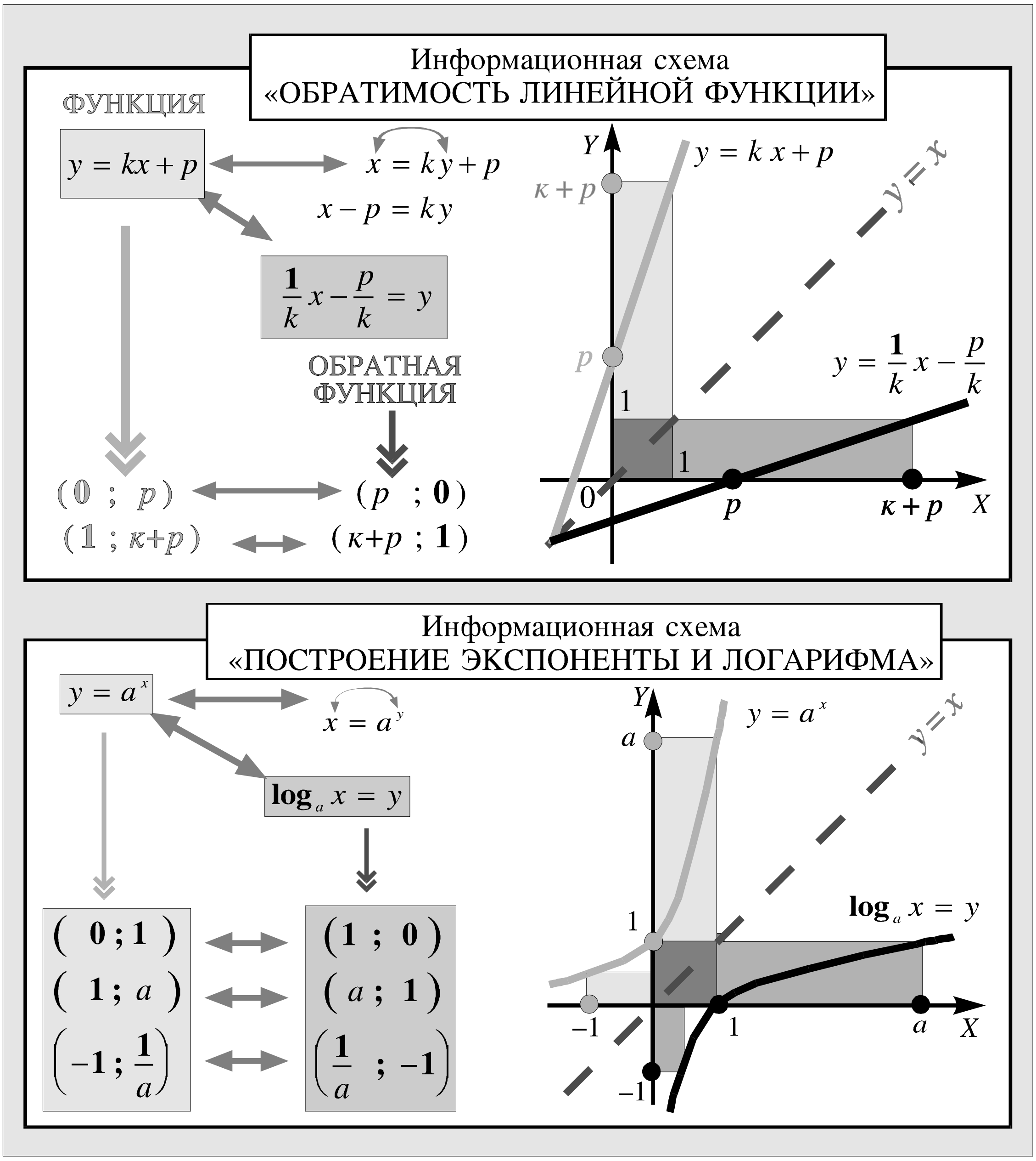


Рис. 24

При решении задач, связанных с нахождением площадей криволинейных трапеций и объемов тел вращения, основой является визуальный образ интеграла от неотрицательной функции (рис. 25, вверху). Однако для успешного получения результатов этого оказывается недостаточно. Данный образ нуждается в расширении, например, информационной схемой, аналогичной приведенной на рис. 25 (внизу(

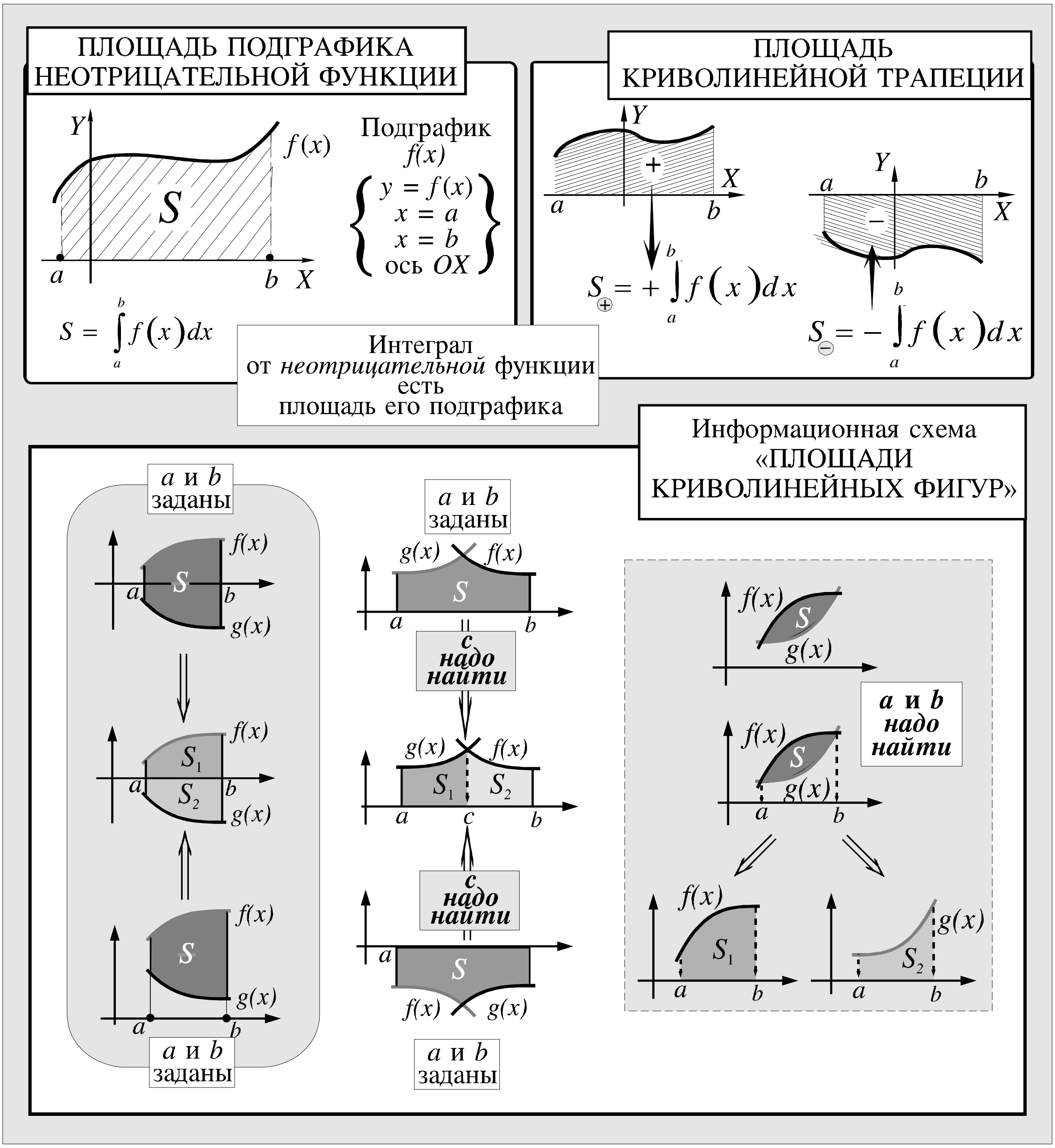


Рис. 25

Блоки схемы “Площади криволинейных фигур, образованных графиками функций” показывают, что в случаях (-а) и (-б) площади криволинейных трапеций, ограниченных графиками f и g на промежутке $[a\,;b]$ равны сумме площадей подграфиков этих функций, а в случае (-в) – их разности.

Обратим внимание на вербальные инструкции этой схемы. В столбике справа имеется указание*:* a и b надо найти. Эта рекомендация нуждается в пояснении. Графики функции f и g имеют “общие места” – точки их пересечения. Перевод этого факта в формулу дает: $f(x)=g(x)$. Данное равенство и определяет искомые точки a и b, поскольку именно для них: $f(a)=f(a)$ и $f(b)=g(b)$.

Схема “Площади криволинейных трапеций” рассматривает все основные ситуации. Например, в случаях слева и в центре представлены визуальные алгоритмы нахождения площадей трапеций, ограниченных графиками f и g на промежутке $[a\,;b]$, а в случае справа – их разности. Однако схема будет успешно работать, если учащиеся предварительно усвоят визуальный образ самого подграфика функции, который можно ввести на одной или двух страницах информационной тетради (рис. 25, вверху).

10. Анализ структуры математической таблицы

Стены классов школы обычно заполнены различными таблицами. Предполагается, что учащийся будет применять их в своей самостоятельной работе. Тем не менее, картина такова: в поисках ответа ученики предпочитают заглядывать в учебники или тетради или же применить заранее изготовленную шпаргалку. Особую трудность в быстром и оперативном использовании представляют таблицы, предлагающие набор формул или графиков. Эти таблицы составляются как справочный материала и содержат большой запас сведений теоретического характера. Распознавание объектов, закономерностей связей между ними затруднено из-за обилия информации, сосредоточенной в столбцах и строках, не всегда удобной для восприятия структурой и т.п.

Главным отличием описываемых информационных схем от привычных стандартных плакатов и таблиц является их “подвижность”. Это позволяет постепенно увеличивать объем информации и разнообразить средства представления, вносить необходимые акценты, сосредоточивать внимание на том существенном, что составляет “зерно” обучения в соответствующий период обучения. Учитель, изготавливая конкретную схему, ориентирует ее на возможности своих учеников, продумывая одновременно способы объяснения ее содержания. Ученики, занимаясь “производством законной шпаргалки”, анализируют и обобщают соответствующий материал, обращаясь к ней всякий раз, когда в этом возникнет необходимость

Может быть действие таблиц, висящих на стенах класса, не столь велико из-за того, что мы предлагаем ученикам просто использовать их данные. Гораздо важнее научить их отделять главное от второстепенного, обогащая мышление новыми свойствами – способностью к анализу структуры и элементов справочного материала. Продемонстрируем на конкретном примере один из возможных способов повышения коэффициента полезного действия таблиц. Поставим задачу: используя свойство симметричности хорошо известной таблицы «Выражение любой тригонометрической функции через остальные», восстановить недостающую в ней информацию (рис. 26).

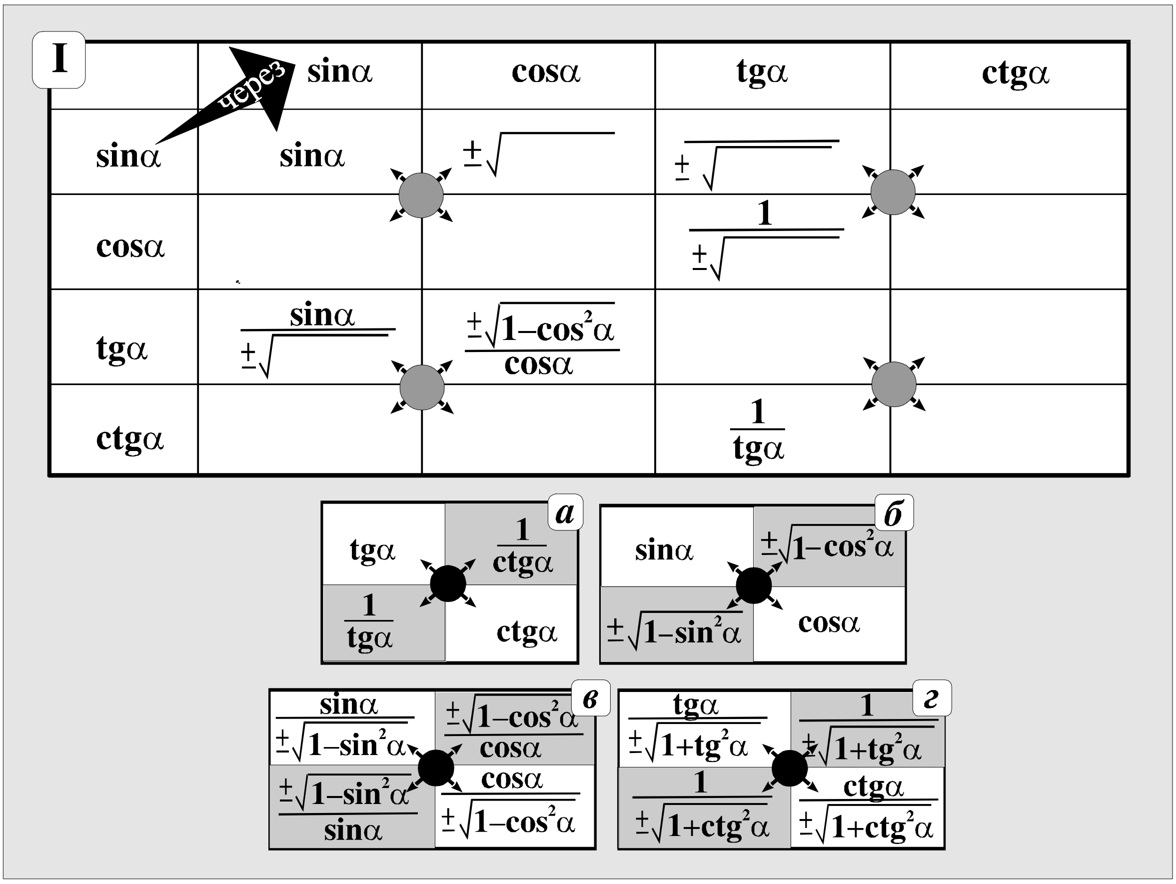


Рис. 26

Для начала естественно заполнить данные одной из диагоналей таблицы. Наиболее легким для реализации результатов «живого созерцания» является квадрант правого нижнего угла. Выявив один из его элементов, без труда приходим ко второму (рис. 26-а). Следующий по степени трудности – верхний левый квадрант – также заполняется без особых усилий (рис. 26-б).

Ориентиры дают обнаруженные ранее свойства данной таблицы:

а) все клетки по горизонтали в качестве определяющего элемента имеют формулу (аналитическое задание) одной из тригонометрических функций;

б) клетки, находящиеся на противоположных концах диагоналей квадрантов, совпадают по структуре выражений, находящихся в них.

Наиболее сложный нижний левый квадрант заполняется тогда, когда характерные свойства данной таблицы восприняты визуально и неоднократно применены на практике (рис. 26-г). Представленный процесс в рамках действий «специализация – обобщение» выглядит следующим образом:

– от специализации содержания и структуры одного из квадрантов к обнаружению общих закономерностей всей таблицы;

– от свойств таблицы (в целом) к выявлению содержания каждого из квадрантов (в отдельности).

Подведем итоги. Учащийся, получив в свое распоряжение некоторую информацию, воспринимает средства ее выражения – символы и рисунки – как определенные (знакомые или нет) образы. Начальным моментом мыслительной деятельности ученика является определение их элементов и анализ структуры.

Решая математическую задачу, учащийся вынужден преобразовывать исходные данные, предварительно распознав тот визуальный стандарт, к которому можно свести задачу. Поэтому мы считаем весьма важным ввести в процесс обучения математике формирование навыков построения основных визуальных математических моделей, среди которых выделяем следующие типы:

изображение основных математических понятий;

визуализация свойств математических понятий и операций над ними;

иллюстрация связей между понятиями.

При визуализации математических понятий, их свойств и операций над ними следует предусмотреть возможную постепенность развития исходного визуального образа, чтобы учащийся мог проследить процесс “сборки” отдельных его составляющих в единое целое. Геометрическая иллюстрация связей между различными понятиями должна осуществляться так, чтобы учащийся мог зрительно проанализировать, а в дальнейшем и восстановить зависимость между парами исследуемых объектов.

На основе всех предлагаемых моделей нами продемонстрировано формирование одного из визуальных стандартов на этапе введения нового понятия. Материалы соответствующей информационной тетради последовательно представляют важнейшие этапы такого процесса: ***умо-зрительное*** введение термина, геометрическую интерпретацию символа, общие и частные случаи действия понятия в конкретных ситуациях, примеры содержательной демонстрации изучаемого понятия.

Здесь налицо еще один чисто психологический аспект. При введении нового объекта (до установления дефиниции) учащийся может не бояться недостаточно «складно и точно» описывать его существенные особенности. Основная задача в этот период – узнать, соотнести термин и образ. И только приобретя достаточный навык в опознании, привыкнув к наименованию и формуле, учащийся будет обязан дать точное определение.